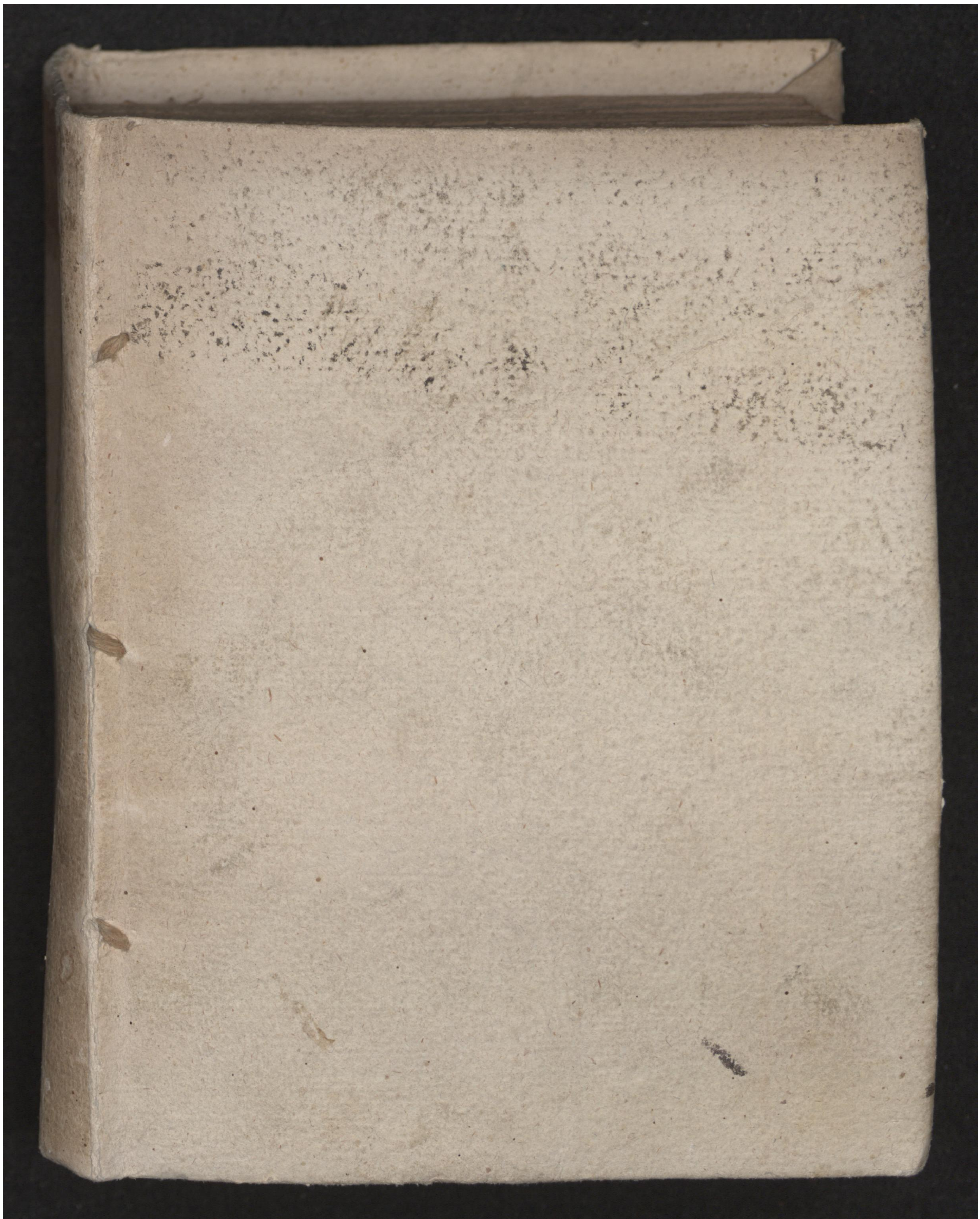
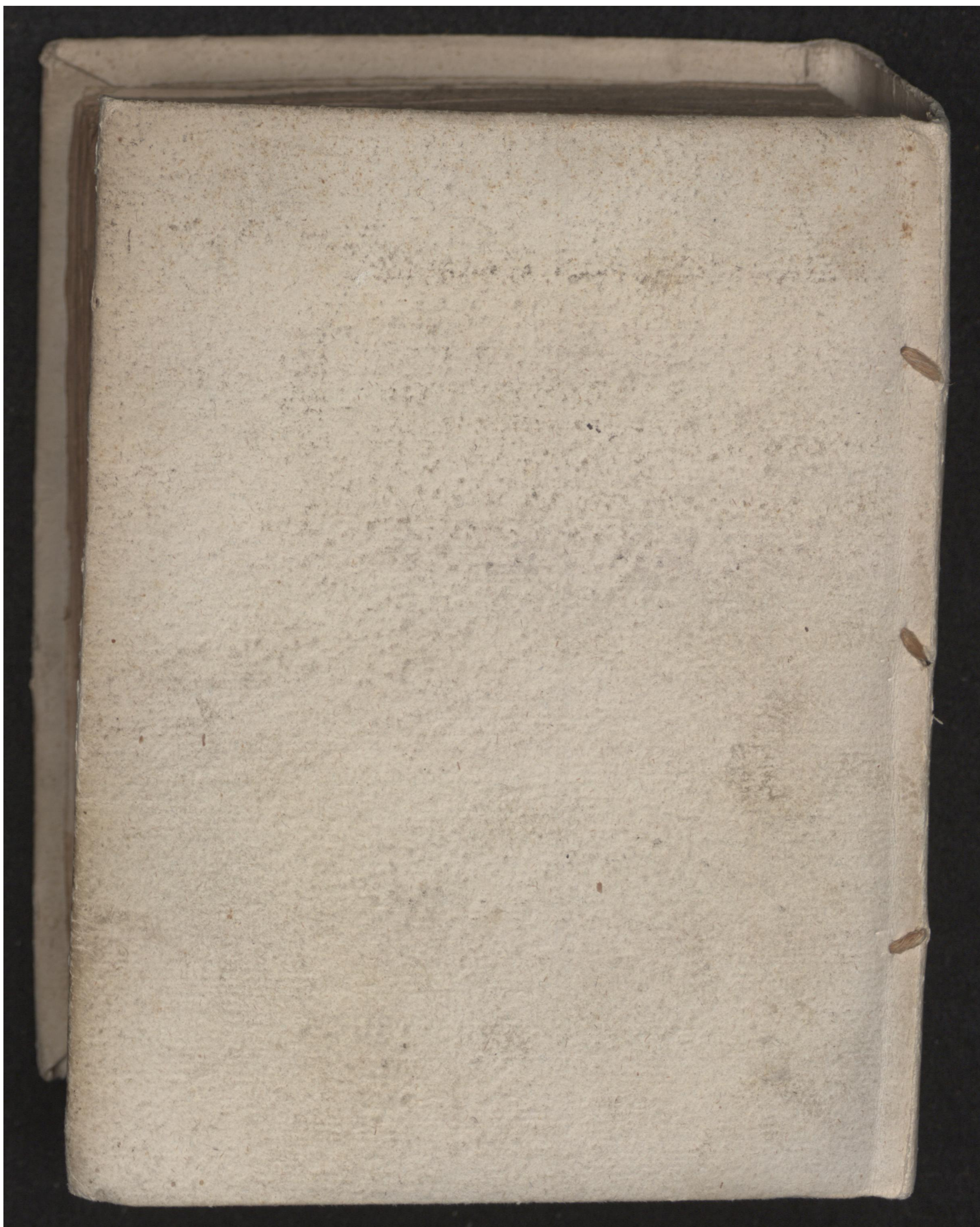


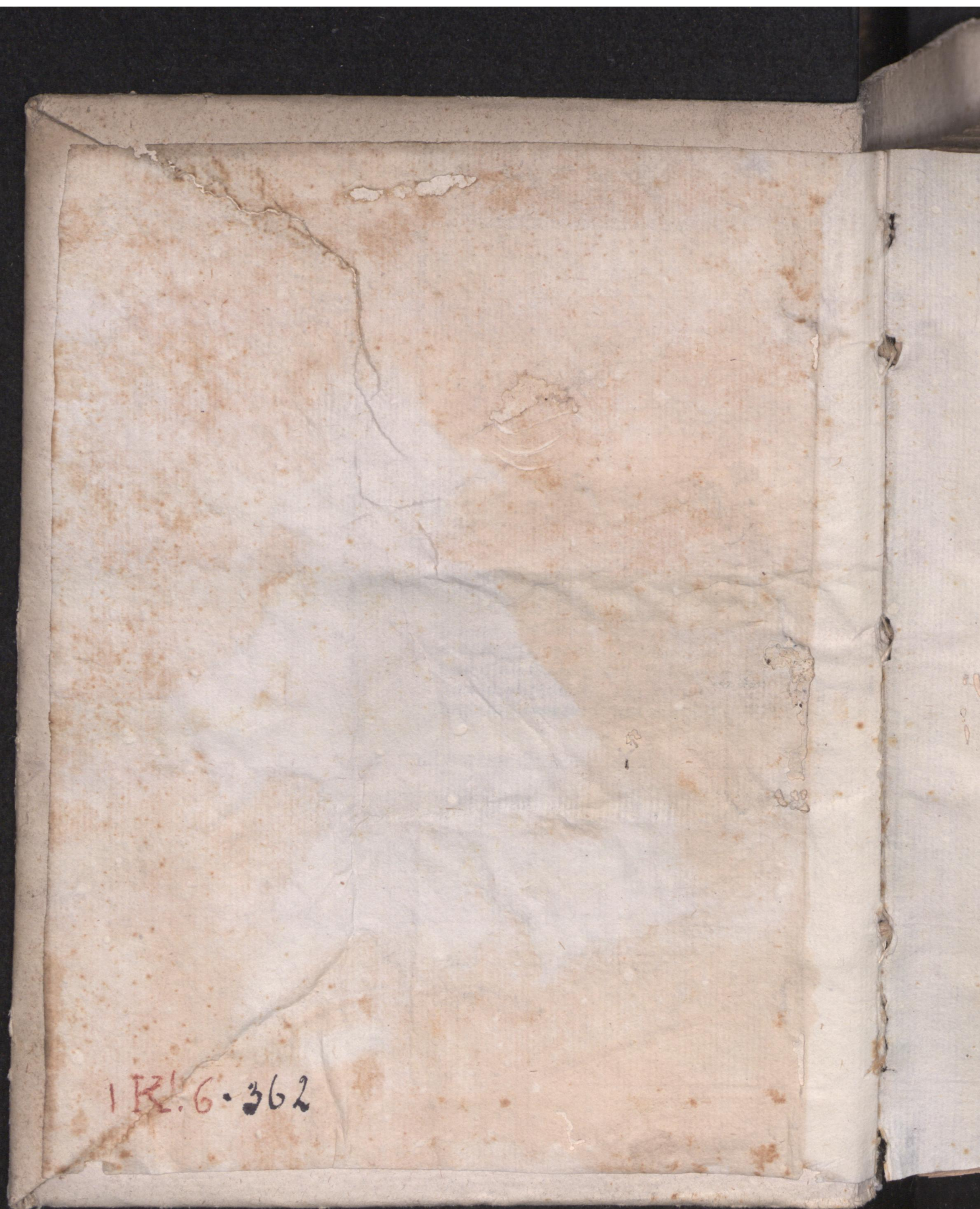

XI
WALL
1
6
362











1 K!. 6 · 362

XI

~~Wal~~

WALL.

MECHANICA:
SIVE,
De MOTU,
TRACTATUS GEOMETRICUS.

Authore *JOHANNE WALLIS*, SS. Th. D.
Geometriæ Professore *Saviliano* in Celeberrima Academia *OXONIENSI*; *Regalis Societatis* LONDINI, *pro Scientia Naturali promovenda*, Sodali; & *REGIÆ Majestati* à Sacris.

PARS PRIMA.

IN QUA,
De Motu Generalia.
De Gravium Descensu, & Motuum Declivitate.
De Libra.

LONDINI,
Typis *Gulielmi Godbid*; Impensis *Mosis Pitt*, ad Insigne *Cervi* in vico vulgo vocato Little-Britain.
M DC LXX.





HONORATISSIMO DOMINO

D. GULIELMO BROUNCKER,

EQUITI AURATO;

Baroni BROUNCKER de *Newcastle*, Vicecomiti BROUNCKER de *Lions*; Serenissimæ REGIÆ Majestatis, pro Re NAUTICA Commissario; Serenissimæ REGINÆ Cancellario: *Regalis Societatis* LONDINI, *pro Scientia Naturali promovenda*, Præsidi Dignissimo.



N habes tandem (Honoratissime Domine,) eorum partem, quæ, Tuis Regiæque Societatis (cui Tu jam à pluribus annis summo cum honore Præsides) mandatis obsequens, anno ab hinc secundo, prælo com-

miseram. Sperâram equidem Opus integrum breviore tempore absolvendum fore: Sed, partim ob eam, quam causantur Typothesæ, rei difficultatem, & insolentiorem typos ponendi modum; partim ob meam (Oxonio agentis) perpetuam ferè à prælo absentiam; partim quod aliis subinde occurrentibus negotiis impediti Typothetæ non huic potuerint semper intenti esse; factum est, ut in longius protractum sit negotium quam speraverim. Hinc est, quòd, quem totum unâ vice proditurum Tractatum destinaveram, jam particulatim prodeat. Cujus jam habes Partem Primam, *quæ totius Fundamenta continet; &, speciatim,* De Libra *doctrinam. Quam propediem sequetur* Secunda, (*quæ* De Centro Gravitatis *erit; ejusque* Calculo, *in figuris quam plurimis curvilineis, atque ex his oriundis solidis, & superficiebus curvis, satis intricato:) Utpote cujus partem maximam jam absolverunt operæ. Et, post illam,* Tertia; *quam primum per Preli difficultates*

tes licebit. Hoc autem, quicquid eſt, Tuo potiſſimum nomini dicandum duxi; non tantùm ob eam quam Tibi debemus obſervantiam, (quæ tamen maxima eſt,) eamque quam à pluribus annis expertus ſum tuam in me propenſam Amicitiam: Sed & ob eam, quam cum ſummâ Nobilitate conjunctam habes, ſummam hujuſmodi rerum Intelligenti*am. Quanquam enim graviſſimis negotiis aliàs occupatus; tum quæ rem* Nauticam *ſpectant, quibus Sereniſſimo* Regi *inſervis; tum quæ Sereniſſimam* Reginam, *cujus tu curas negotia; tum quæ, cui Tu Præſides,* Societatem Regiam: *Eâ tamen in rebus Mathematicis perſpicaciâ, ſummoque ingenij acumine fretus es, quaſi tu huic tantùm negotio intentus eſſes, & nulli ſecundus. Verum quidem eſt, tum ea quæ hic habes, tum eorum quæ mox inſecutura ſunt partem maximam, ante plures annos ſcripta fuiſſe, (quod norunt ſaltem ij in quorum privatos uſus exſcripta fuerunt exemplaria; & quibus*

bus jam urgentibus prodeunt :) Sed eò audacius in lucem jam emitto : quòd Tibi antehac perlustrata non displicuerint, & Te jubente prodeant, Tu porro perge, quod facis, rem literariam & ornare & promovere : Nec aversseris interim,

Novemb. 10. *1669.*

Tui observantissimum

Joh. Wallis.



MECHANICA:
Sive, De MOTU, *Tractatus Geometricus.*

CAP. I.
DE MOTU GENERALIA.

DEFINITIONES.

I. MECHANICEN, *appello, Geometriam de Motu.*



Echanicæ artes, per contemptum dici solent illiberales illæ Cerdonum artes, & his similium, quas rude vulgus exercet: ad quas Labore magis quàm Ingenio videtur opus. Et distingui solent, non à Geometriâ tantùm, sed ab aliis etiam *Ingenuis*, (quæ mente magis quàm manu exerceri solent; atque acumen animi vel postulant vel faciunt;) *Liberalibus* dictis; ut quæ *Liberos* deceant, ut, *Servos*, Serviles illæ & illiberales.

In re Geometricâ; *Mechanicè* quid factum, non Geometricè, dici solet: quando rudi χειρουργίᾳ, vel materialis instrumenti applicatione, aliisve mediis non absimilibus, aliquid metimur: non, ἀποδεικτικῶς. Puta; Si quis, admoto Filo, ad Diametrum primò, deinde ad Perimetrum Circuli, quam hæc ad illam rationem habeat, investigatum iret; eamque, experimento facto, triplâ paulò majorem inveniret, vel triplam sesquiseptimam proximè: *Mechanicè* factum diceretur. Secus autem;

quum *Archimedes*, modo Geometrico, & Demonſtrationibus ab ipsâ Circuli naturâ petitis, eandem in libro περὶ τῆς κύκλου μετρήσεως inquiſivit.

Nos neutro dictorum ſenſu *Mechanicen* dicimus. Sed eam Geometriæ partem intelligimus, quæ *Motum* tractat : atque Geometricis rationibus, & ἀποδεικτικῶς, inquirit, Quâ vi quiſque motus peragatur.

Nomen ἀπὸ τῆς Μηχανῆς ſortitur : quia *Machinis* conſtruendis maximè inſerviat. An autem *Mechanica*, *Mechanicæ*, dicatur, (numero ſingulari,) an (pluraliter) *Mechanica*, *Mechanicorum*; perinde eſt. Id eſt, τὰ περὶ τῶν Μηχανῶν, an Ἡ περὶ τῶν Μηχανῶν, (ſcil. τέχνη vel ἐπιστήμη, vel διδασκαλία.) Nam ad eandem formam dicuntur, *Grammatica*, *Logica*, *Phyſica*, &c. ut intelligatur, vel ἡ γραμματική, λογική, φυσική; vel τὰ γραμματικά, λογικά, φυσικά. Hoc eſt, Ἡ περὶ τῶν γραμμάτων, περὶ τοῦ λόγου, περὶ τῆς φύσεως, (τέχνη, ἐπιστήμη, διδασκαλία,) aut τὰ περὶ τῶν, *&c.* Quâ de re videatur, ſi libet, *H. Stephanus*, *De abuſu Græcæ Linguæ.*

Sed & (ab ἵστημι, *pendo, pondero,*) etiam *Statica*, dici ſolet, vel Mechanice tota, vel ea ſaltem pars quæ de *Ponderibus* agit; quæ, quanta ſint, ad *Libram* (σταθμὸν) ſolent examinari.

II. *Per* Motum *intelligimus*, *Motum localem.*

Quamquam enim de pluribus Motuum generibus agant Logici, aliique; puta Generatione, Augmentatione, Alteratione, *&c.* (quæ omnes an ad Motum Localem reduci poſſint, non libet hic diſquirere:) Nos *Motum* hic in famoſiori ſignificatu intelligimus de Motu Locali; quæ φορὰ, *Latio*, dici ſolet.

Circa Motum autem, multa conſideranda veniunt : ut Vis, Tempus, Reſiſtentia, Longitudo, Momentum, Impedimentum, Celeritas, Gravitas, Pondus, *&c.*

III. Momentum, *appello, id quod motui efficiendo conducit.*

IV. Impedimentum, *id quod motui obſtat, vel eum impedit.*

Momentum, eâdem ratione à verbo *Moveo* deſcendit, atque *Impedimentum* ab *Impedio* : Eâdem ſcilicet Analogiâ, quâ & alia verbalia, in *men* & *mentum* finita, à ſuis verbis. Nam, ut à *Luceo*, *Lumen* : à *Fluo*, *flui*; *Flumen* : à *Nuo*, *Numen* : à *Fulgeo*, *fulſi*; *Fulmen* : à *Fulcio*, *fulcivi*, *fulcitum*; *Fulcimen*, & *fulcimentum* : à *Moneo*, *monui*, *Monumentum*; & à *Monitum*, *Monimentum* : à *Flo*, *flavi*, *flatum*; *Flamen* : à *Fari*, *fatum*; *Famen* : à *Frango*, *fregi*, *fractum*; *Fragmen*

men & *fragmentum* : ab *Ago*, *egi*, *actum* ; *Agmen* : ab *Arceo*, *arcui*, *arctum* ; *Armentum* : à *Rado*, *rasi*, *rasum* ; *Ramentum* : à *Cædo*, *cecidi*, *cæsum* ; *Cæmentum* : à *Nosco*, *novi*, *notum* ; *Nomen*, & *nobile* : Sic, à *Moveo*, *movi*, *motum* ; *Momen*, *Momentum*, & *Mobile*. Sed & *Moles*, *molior*, *molimen* : nisi quis hæc à μοχλεύω, deducta malit.

Ad *Momentum* refero, *Vim motricem*, & *Tempus*. Quæ, quò majora sunt, eò magis efficitur motus.

Ad *Impedimentum*, refero, *Resistentiam*, & *Distantiam*. Quæ, quò majora sunt, eò magis motus *Impeditur*.

V. Vim motricem, *vel etiam* Vim *simpliciter*, *appello Potentiam efficiendi motum.*

VI. *Per* Tempus, *intelligo*, *Temporis spatium id*, *in quo motus transigitur.*

VII. Resistentiam, *sive* Vim resistendi, *Potentiam Motui contrariam* ; *sive quæ motui resistit.*

VIII. *Per* Distantiam *sive* Longitudinem motûs, *intelligo*, *Longitudinis spatium illud quod motu transigitur.*

IX. Celeritas, *est affectio motûs ex comparatione Longitudinis & Temporis resultans* : *Utpote quæ*, *Quo Tempore quanta Longitudo transigitur*, *determinat.*

X. Æqualis Celeritas, *est*, *quæ Æqualem Longitudinem*, *Æquali tempore*, *transigit.*

XI. Major Celeritas, *est*, *quæ Majorem Longitudinem Æquali Tempore transigit* : *vel*, *in Minori Tempore*, *Longitudinem Æqualem*. *Et quidem*, in eâ ratione Major, *quâ*, *vel illa Longitudo*, *Major est* ; *vel Tempus*, *Minus*. Minor ; *quæ contrà.*

XII. Gravitas, *est vis motrix*, *deorsum* ; *sive*, *ad* Centrum *Terræ.*

Quodnam sit, in consideratione Physicâ, Gravitatis principium ; non hic inquirimus. Neque etiam, An Qualitas dici debeat, aut, Corporis Affectio ; aut, quo alio nomine censeri par sit. Sive enim ab innatâ qualitate in ipso gravi corpore ; sive a communi circumstantium vergentiâ ad centrum ; sive ab electricâ vel magneticâ Terræ facultate, quæ gravia ad se alliciat ; & effluviis suis, tamquam catenulis, attrahat ; sive aliàs undecunque proveniat ; (de quo non est ut hic moveamus litem:) sufficit, ut

ut Gravitatis nomine, eam intelligamus, quam ſenſu deprehendimus, Vim deorſum movendi, tum ipſum Corpus grave, tum quæ obſtant minùs efficacia impedimenta.

Et quidem, quamquam de Naturali Gravitate (prout concipi ſolet) ſeu ipſâ corporis affectione, quâ, ſuâ ſponte (ut ſolet dici) deorſum tendit, directè intelligatur: Tamen, quoniam nihil incommodi inde proventurum videtur in ſequente propoſitionum ſerie, etiamſi de externâ vi continuâ deorſum premente rectà ad Centrum Terræ velit quis eas interpretari; non eram ſolicitus vel hanc ex Gravitatis definitione excludere. Quæ enim de Gravitate affirmantur, de quâcunque Vi continuâ, rectà ad Terræ Centrum movente, perinde vera ſunt; ſive ſit ea vis innata, ſive adventitia.

Quæ autem de Gravitate dicta ſunt, reſpectu Centri Terræ; perinde de quâvis alia motrice Vi continuâ poterunt intelligi, reſpectu ſui quò tendit termini. Adeoque ſi vox ea, particulari ſignificatui hactenus accommodata, quatenus Terræ Centrum reſpicit, latiori ſenſu intelligatur, de quâvis vi motrice continuâ, rectà ad ſuum terminum movente: non minùs vera erunt quæ traduntur; ſed & forſan magis accuratè dicta; dum generalia generaliter efferuntur. Sed quoniam de Gravitate ſolent ea ſpeciatim tradi, quæ continuæ Vi Motrici univerſaliter conveniant: Ego etiam communi errori eatenus me accommodavi, ut interim moneam, generaliter eſſe vera, quæ ſpeciatim efferuntur. Ut mox dicetur fuſiùs.

XIII. Per Pondus *intelligo gravitatis menſuram.*

Pendo ſeu *Pendeo*, & *Pondus*, parem habent inter ſe cognationem atque apud nos *Weigh* & *Weight*; (quæ à Latinorum *Veho* videntur deſcendiſſe: ſicut etiam *Wayn* & *Wagon*, quæ Latinis *Vehes* & *Vehiculum* dicuntur.)

An verò *Pondus* à *Pendo*, an hoc ab illo dicatur, non magni intereſt; an, quod ego malim, utrumque.

Eſt utique Verborum *Pendo* & *Pendeo* duplex ſignificatus. Prior eſt *To Hang*: A quo ſignificatu *Pondus* dictum puto; (ſicut a *Tego*, *Toga*; a πέμπω, *Pompa*; a ῥέμβομαι, *Rhombus*, &c.) idemque ſignificare quod Græcis Ὅλκη, & propriè de *Gravi pendente* dictum: Adeoque, ab *Onere* diſtingui, quod Græcis Ὄγκος, (unde & *Onus* deſcendiſſe videtur;) ut *Pondus*, ſit quod *Appendet*; *Onus*, quod *incumbit*, Grave: Βάρος, utrumque. Sed &, ab ἄγω, Ἄχθος etiam adhuc latius videtur; *quod quocunque Adigit*, vel impellit; cùm illa tria Gravium nomina (ὅλκη, ὄγκος, βάρος,) non niſi *deorſum tendentia* deſignent: utut laxiori ſenſu promiſcuè non raró uſurpentur omnia.

Poſterior

Posterior Verborum significatus, qui est *To Weigh*, à Pondere ortum traxisse videtur: quod est, *Appensa ad libram pondera examinare.*

A priori significatu, dicimus, *Appendo, Suspendo, Dependeo, Pendulus,* &c. A posteriori, *Perpendo, Expendo, Impendo, Rependo, Pensum, Pensio,* &c. (ex more veterum, qui *Pendere* solebant Nummos, quos nos *Numeramus.*) Sed & *Perpendo, Expendo,* &c. sensu Metaphorico, ad Animum transferuntur; à posteriori significatu; quando ut ad Libram Pondera, sic Res Animo pensitamus: sicut, à priori, dicitur, *Animi pendere, suspensus animus, Spe pendulus,* &c.

Differunt autem *Pendo,* & *Pendeo*, non aliter quàm Transitivum ab Intransitivo. Quod in ejusmodi formæ Verbis, usu venit. Ut *Pando, Pateo; Mando, Maneo; Tendo, Teneo; (carceri Mando, in carcere Maneo; morem Obtendo, mos Obtinet; Tenet sententia, ad me Attinet, Pertinet,* &c.) *Vendo, Veneo; Venundo, Venum eo; Circundo, Circumeo;* reliquáque fere a *Do* & *Eo* composita; ut *Subdo, Subeo; Prodo, Prodeo; Reddo, Redeo; Trado, Transeo; Edo, Exeo; Condo, Coeo; Abdo, Abeo; Addo, Adeo; Indo, Ineo; Obdo, Obeo; Perdo, pereo*; & siqua sunt similia.

Ego autem, neglecto si quod est inter *Pondus* & *Onus* discrimine, (quo *Libram,* illud; hoc, *Vectem,* magis spectet;) per *Pondus* jam intelligo, illam, in utrovis, Gravitatis mensuram, quam ad Libram solemus examinare.

Pondus sic intellectum, aut Gravitas etiam, prout vel in Movente, vel in Mobili, consideratur; ita vel ad Movendi, vel ad Resistendi vim pertinebit: Adeoque nunc ad Momentum, nunc ad Impedimentum refertur.

Et quidem, cùm ex omnibus Virium generibus, non aliud sit quod accuratius ad examen revocari solet, quàm Pondus; solemus, ad hujus normam, reliquas tum vires tum Resistentias æstimare; eásque tantas reputare, quanto Ponderi æquipollent.

Et quamquam tum Pondus, tum Vis etiam, ex æquo respiciant, vel vim Movendi, vel vim Resistendi: cùm tamen, ut plurimum, quod motum itur Pondus sit, seu Grave; Vis autem, quæ efficiendo motui adhibetur, sit non rarò Vis Humana, aut Animalium, aut Ventus etiam, aut vis Elastica, aliæve plures, non minus quàm Grave Pondus: Ponderis nomine, plerumque, vim Resistentiæ, in sequentibus designabimus; &, Virium nomine, vim Motricem. Ubi secus erit intelligendum; dictorum series satis indicabit.

XIV.

XIV. Directionem Mobilis, *aut etiam* Motûs, *appello, rectam qua tendit Mobile.* (*Motûsque mensuram secundum hanc æstimatam,* Motûs Longitudinem *appello.*) *Sin curvâ feratur Mobile,* (*cujus Directio in singulis punctis immutetur;*) *ea est, pro singulis punctis, motûs Directio, quæ curvam in illis punctis Recta contingit.*

XV. Directionem Virium, *seu* Moventis, *appello, Rectam quâ tendit vis Motrix. Motûsque mensuram secundum hanc æstimatam, appello* Motûs Altitudinem.

Estque hæc Virium directio in Descensu Gravium, Recta deorsum ad Centrum Terræ, quo Gravia sponte suâ tendunt. Quales quidem Rectæ, quamquam in Centro coëant omnes, pro Parallelis tamen haberi solent: Tum quòd sensuum judicio tales sint (non enim valent sensus distinguere inter verè parallelas, & quæ tantillum à parallelismo declinant;) Tum etiam quia si intelligatur, verbi gratiâ, Libræ Jugum adhuc longius à Terra removeri, ad infinitam distantiam; erit ea declinatio quâvis assignabili minor.

XVI. Declivitatem, *seu* Gradum Declivitatis, *appello, Respectum illum, qui ex motûs Altitudine & Longitudine comparatis,* (*ob variam Directionis Motûs ad Directionem Moventis positionem,*) *emergit. Atque* Acclivitatem *similiter; quæ à Declivitate non aliter differt quàm quòd altera Descensum, Ascensum altera respiciat.*

Fig. 1. Puta, F O, declivis; O F, acclivis recta.

XVII. Æqualem Declivitatem, *appello, quæ, æquali peractâ Longitudine, æqualem Altitudinem peragit. Atque* Acclivitatem, *similiter.*

XVIII. Majorem Declivitatem, *vel* Acclivitatem, *dico, quæ, æquali peractâ Longitudine, majorem Altitudinem peragit; vel, minori Longitudine, Altitudinem æqualem. Et quidem,* eâ ratione majorem, *quâ vel Altitudo illa major est, vel Longitudo, minor.* Minorem; *quæ contrà.*

Verbi

VErbi gratiâ. Sit F P, directio moventis, (puta, recta ad Horizontem perpendicularis;) F O, F B, vel F C, directio motûs, (puta, obliqua quælibet, per quam descendat Grave.) Si F O, F C, longitudine æquales, sint Æque-altæ: *Æqualiter declives*, dico: sin verò, Longitudine æqualium altera, ut F O, sit Altior; eandem & *Magis declivem* dico. Similiter; si Æquè-altæ F O, F B, (quarum altitudo sit ipsi F P, æqualis,) sint & Longitudine æquales; *Æqualiter declives* dico: Sin altera, ut F O, sit brevior; eandem & *Magis declivem* dico. Et utrobique, *eâdem ratione magis declivem*, quâ vel F O est Altior quàm F C, vel Brevior quàm F B. Fig. 1.

XIX. Obliquitatem *verò*, *hujusve mensuram*, *appello*, *Angulum quem facit cum* Perpendiculo, (*vel Directione Moventis*,) *Directio Motûs*, *seu Linea quâ fertur Mobile*.

Puta, O F P.

X X. Inclinationem *verò ad* Horizontem, *appello*, *obliquitatis complementum*, *sive quem facit Angulum ad Horizontem*, *aut ad rectam Directioni moventis perpendicularem*.

Ut F O P.

DEclivitatem autem ab *Obliquitate*, & *Inclinatione*, (quamquam ex unâ reliquæ dependeant,) distinguere necesse duxi; quoniam *Obliquitas* & *Inclinatio* Angulis mensurari solent; Ea vero *Declivitatis* ratio mihi tractanda videbatur, quæ rectarum inter se rationes respiciat. Quippe quæ inde dependent, non quidem vel Obliquitatis vel Inclinationis Angulo, sed Altitudini rectarum longitudine æqualium proportionalia, vel in reciprocâ ratione Rectarum Altitudine æqualium, in sequentibus deprehendentur.

Porro; Cùm ea quæ de Gravitate disertè dicta sunt in sequentibus, non ita Gravitati sint peculiaria, quin ut plurimum alii cuivis continuæ vi motrici accommodanda veniant; adeoque & universaliter tradi debere videantur, (ut modò dictum est:) Cur illud nominatim de Gravitate protulerim, causa est, quod, cùm Gravium motus frequentiùs considerationi hominum exponi soleat, adeoque vocabula huic accommoda, menti familiariùs se offerant, citiùs animo percipienda duxerim quæ de hoc motu (qui ex multis unus est, sed præ cæteris magis notabilis,) traderentur, atque ad hujus deinde normam intelligerentur reliqui.

Ea verò fient generalia (nec minùs interim demonstrata) interpositâ laxiori hac Gravitatis (cum connexis) definitione.

XXI. *Per* Gravitatem, *laxiùs acceptam, intellige, Vim quamvis continuam in quamcunque plagam motricem : per* Terræ Centrum, *intellige, Terminum quò tendit vis illa motrix ; Per* Perpendiculum, *vel* Rectam ad Terræ Centrum, *vel etiam* Rectam Horizonti perpendicularem, *intellige, Lineam Directionis Vis motricis : Per* Descensum & Ascensum ; *Appropinquationem & Elongationem à Termino Vis Motricis : Per* Rectam Horizontalem, , *vel* Horizontale Planum ; *Rectam, seu planum, lineæ directionis moventis ad angulos rectos : Per Descensum, vel Ascensum* Obliquum ; *Lationem secundum Lineam quæ Lineam Directionis moventis obliquè secat, ad moventis Terminum Accedendo, vel inde Recedendo. Cæteraque similiter accommodanda sunt.*

XXII. Machinas, *appello, Instrumenta motibus examinandis, vel etiam facilitandis, forinsecus adhibita.*

QUalia sunt *Libra, Vectis, Trochlea, Cochlea, Axis in Peritrochio, Cuneus*, & similia. Quorum Definitiones suis locis sequentur.

Priusquam autem ad Machinas illas separatim considerandas accedamus, quas Mechanicorum scriptores tractare solent : Præmittenda erunt communia quædam, quæ omnes ex æquo spectant. Quæ sint Principiorum loco, & à quibus reliqua dependent, quæ de singulis postea tradenda erunt.

Idque eò magis mihi faciendum incumbere videatur : Quia qui antehac tractandum hoc suscepere negotium, videntur citra Principia constitisse : nec ab imis eruta fundamentis, etiam ea quæ sana sunt, tradidisse : Sed postulâsse potiùs, quæ, utut vera sint, Demonstratione tamen aliquâ videntur indigere : Unde, tum, in iis quæ consequuntur, minùs acquiescat animus ἀποδείξεως avidus, tum & ea minùs valeat, in novâ materiâ, ampliare.

PRO-

PROPOSITIONES.

PROP. I.

Quæ ad æqualia eandem habent rationem, ſunt inter ſe æqualia. Et contra.

$A = E. \quad 2A = 2E. \quad 3A = 3E. \quad rA = rE.$ Fig. 2.

PUta; Si A, E, ſint inter ſe æqualia; erunt & inter ſe æqualia 2 A, 2 E; item 3 A, 3 E; Et, univerſaliter, *r* A, *r* E; cujuſcunque rationis Index ſit *r*. Per 7, 9, 11. *Prop.* 5 El. *Euclidis.*

PROP. II.

Ubi ratio ex duabus pluribuſve componitur; Datis componentibus, datur compoſita. Nempe, Multiplicatis invicem exponentibus componentium, ut habeatur Exponens Compoſitæ.

$a \times e = ae = æ. \qquad 2 \times 3 = 6.$ Fig. 3.

$\frac{l}{r} \times \frac{m}{s} \times \frac{n}{t} = \frac{lmn}{rst}. \qquad \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{1} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}.$

SUnto, datarum Rationum componentium, dati Indices ſeu Exponentes (rationum πηλικότητας appellat *Euclides*; quòd *Quantitates* exponunt Interpretes; malim *Quotientes*; id enim vult quod ex termini Antecedentis per conſequentem diviſione emergit,) *a*, *e*. Datur, inquam, Ratio ex his compoſita; Ea nempe cujus Exponens eſt $æ = a \times e$. (per 5. *Def.* 6. Elem.) Quod erat demonſtrandum. Similiter oſtendetur ſi plures eſſent rationes componentes, puta *l* ad *n*, *m* ad *s*, *n* ad *t*; quæ ex his componitur, eſt ratio *l m n* ad *r s t*. Propter $\frac{l}{r} \times \frac{m}{s} \times \frac{n}{t} = \frac{lmn}{rst}$

SCHOLIUM.

QUò hæc rectius intelligantur, notandum erit (quod non pauci perperam accipiunt,) Rationes, puta Dupli, Tripli, *&c.* Indices seu Exponentes habere 2, 3, *&c.* Unde denominationem sumunt: Nempe Quotientes terminorum Antecedentium per suos Consequentes divisorum. Adeóque Rationis 4 ad 2, Exponens est 2; quia 2) 4 (2: quam itaque *Dupli* rationem dicimus. Rationis 6 ad 2, Exponens est 3; quia 2) 6 (3: quæ propterea dicitur *Tripli* ratio. Et universim, Rationis l ad r, Exponens est $\frac{l}{r}$: nempe Quotiens Antecedentis l per Consequentem r divisi

Hos Indices sive Exponentes, appellat *Euclides*, *Rationum* πηλικότητας; quod *Quantitates* exponunt Interpretes; exposuissent tutiùs *Quotientes.* Quippe illud vult *Euclides*, quod ex Antecedentis per consequentem divisione emergit. Dixit autem πηλικότητας potiùs quam ποσότητας, ut illos etiam Quotientes comprehenderet quæ non essent numeri Integri, sed Fracti, aut Surdi, *&c.* Nam *Quotientis* sive ποσότητος vocem, strictè sumptam, non de aliis Quotientibus usurpabant quàm qui essent numeri integri; qui ostenderent *Quotuplus*, ποσαπλάσιος, esset Antecedens Consequentis: At πηλικότης de Quotiente quolibet, utcunque Fracto, vel Irrationali, dicebatur; qui non modo *Quotuplus*, (puta, *Duplus*, *Triplus*, *Quadruplus*, &c.) Sed & πηλικοπλάσιος *Quantuplus* esset Antecedens Consequentis, ostenderet: puta *Duplus cum semisse*, *Triplus cum quadrante*, *Quadruplus cum besse*, &c.

Definit autem *Euclides*, 5 *Def.* 6. *Rationem ex Rationibus compositam*, dici, *quando illius Exponens* (πηλικότης) *ex harum Exponentibus invicem multiplicatis conficitur.* Adeoque, *ex* Rationibus *Dupli & Tripli*, *componi*, *Rationem Sextupli*; (quia scilicet $2 \times 3 = 6$:) nihil aliud est quod vulgò dicimus, *Duplum Tripli*, *esse Sextuplum.* Item, *Ex Dupli & Sesquialteri rationibus*, *componi rationem Tripli* (quia $2 \times \frac{3}{2} = 3$,) idem est atque, *Duplum Sesquialteri*, *Triplum esse.* Quoniam verò hoc in omnibus rationum compositionibus non ita commodè, ad posteriorem hanc formam, proferri possit; priorem itaque adhibere solent. Puta; *Rationem* 9 *ad* 4, *ex rationibus* 3 *ad* 4 *&* 3 *ad* 1, *componi*; potius dicunt, quàm *Duplum Sesquiqnartum*, ($\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$.) *esse*, *Subsesquitertii*, *Triplum*; quia scilicet $\frac{9}{4} = \frac{3}{4} \times 3$. Idipsum tamen utrobique significatur. Quod quidem qui probè advertunt, tum *Euclidis* definitionem rectiùs in elligent, tum & de perplexâ in componendis rationibus difficultate minùs fortasse conquerentur. Saltem quid

nos

nos in hac & ſequentibus propoſitionibus intellectum volumus, ſatis aſſequentur; qui Rationes ſolemus per earum Indices vel Exponentes deſignare. Puta, 2 A, Duplum quantitatis A; 3 A, Triplum A; $\frac{3}{2}$A, Seſquialterum; $2 \times \frac{3}{2}$A, Duplum Seſquialteri; $\frac{l}{r}$ A, quod eſt ad A, in ratione l ad r; $\frac{l}{r} \times \frac{m}{s}$A, quod eſt ad A, in ratione quæ ex l ad r, & m ad s, componitur. Et in reliquis ſimiliter.

PROP. III.

Ubi Ratio ex duabus componitur; Datâ Compoſitâ, & componentium unâ; datur altera. Nempe, Diviſo exponente Compoſitæ, per Datæ componentis Exponentem, ut habeatur Exponens reliquæ. Similiter; ſi ex quotlibet componitur; Datâ compoſitâ, & vel unâ, vel quotlibet componentium, vel ex his compoſitâ; datur compoſita ex reliquis.

$a)\,\alpha(\,e.$ $\quad 2)\,6(\,3$ $\qquad$ Fig. 3.

$\frac{l}{r})\frac{lmn}{rst}(\frac{mn}{st}$ $\quad \frac{lm}{rs})\frac{lmn}{rst}(\frac{n}{t}$

Sit Rationis Compoſitæ Exponens datus α; datúſque unius ex componentibus Exponens a: Datur, inquam, reliquæ Exponens e. Cum enim (per præced.) Sit $a \times e = \alpha$: ſi dividatur α per a; prodibit e, Exponens reliquæ componentis.

Similiter; Si compoſitæ ex pluribus Exponens $\frac{lmn}{rst}$ detur, uniuſque ex componentibus $\frac{l}{r}$; illo per hunc diviſo, prodit exponens compoſitæ ex reliquis $\frac{mn}{st}$. Datiſque tum Exponente compoſitæ $\frac{lmn}{rst}$, tum aliquot componentium, aut ex his compoſitæ, $\frac{l}{r}$ & $\frac{m}{s}$ vel $\frac{lm}{rs}$; datur exponens reliquæ, vel ex reliquis (ſi plures ſint) compoſitæ, $\frac{n}{t}$.

SCHOLIUM.

MOnendum interim est; Intelligendam esse hanc Propositionem (& quæ hinc dependent) de ejusmodi Ratione Componente datâ, cujus Exponens est verè quantitas, & finita: Non o, vel Infinitum.

Quippe, si, quæ supponitur componentium altera data, sit nullius quantitatis (puta, ut o ad 1;) quæcunque sit Componens reliqua, Composita etiam nullius erit quantitatis: Adeóque, ex compositâ, & illâ componente, quæ fuerat Componens reliqua non constabit. Est enim tam $o \times 1 = o$, quam $o \times 2 = o$, aut $o \times 3 = o$. *&c.* *Nullies Unum*, perinde *nullum* est, atque *Nullies Duo*, vel *Nullies Tria*, &c.

Similiter; Si sit Componentium altera, ratio *Infiniti*, (cujus index sit ∞.) Est enim tam $\infty \times 1 = \infty$, quam $\infty \times 2$. vel $\infty \times 3$, *&c.* *Infinities Unum*, pariter sunt *Infinita*, atque *infinities Duo*, vel *infinities Tria*, &c. Non constabit itaque, ex his datis, quænam sit illa Ratio, quæ intelligitur, cum *Infinitâ* composita, etiam *Infinitam* exhibere.

PROP. IV.

Si Ratio quævis cum Æqualitatis ratione componatur; eadem manet quæ priùs ratio. Et contra; Quæ cum aliâ ratione composita, illam non immutat; est Æqualitatis ratio.

Fig. 4. $2 \times 1 = 2.$ $3 \times 1 = 3.$ $r \times 1 = r.$

$$\frac{A}{E} \times \frac{1}{1} = \frac{A}{E}. \quad \frac{A}{E} \times \frac{r}{r} = \frac{rA}{rE} = \frac{A}{E}.$$

PUta; Quæ ex Æqualis & Dupli rationibus componitur, est Dupli ratio: Quæ ex Æqualis & Tripli, est Tripli ratio, *&c.* Sive, Quod est Duplo Æquale, Duplum est: Quod Triplo, Triplum, *&c.*

Sequitur ex 2 hujus. Exponens utique Rationis Æqualium est 1; (Nam Æquale quodvis per suum Æquale divisum, Quotientem exhibet 1:) Qui quemvis alium exponentem multiplicans, eundem restituit; (quippe $r \times 1 = r$.) Adeoque constat Propositum. Con-

Conversa similiter patet. Quippe si $\frac{A}{E} \times r = \frac{A}{E}$; erit $r = 1$.

PROP. V.

Quantitates quælibet, in eâdem ratione vel auctæ vel diminutæ; in eâdem quâ prius ad invicem ratione constituuntur.

A. B. C :: 2 A. 2 B. 2 C :: $\frac{1}{2}$ A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C :: r A. r B. r C. Fig. 5, 6.

Sequitur ex præcedente. Est utique $\frac{rA}{rB} = \frac{A}{B} \times \frac{r}{r} = \frac{A}{B}$. Item $\frac{rA}{rC} = \frac{A}{C} \times \frac{r}{r} = \frac{A}{C}$. Et $\frac{rB}{rC} = \frac{B}{C} \times \frac{r}{r} = \frac{B}{C}$. Adeoque r A. r B. r C. in eâdem ad invicem ratione atque A. B. C.

Idem demonstrabitur ex 16 Element. 5. Cum enim sit, ex hypothesi, ut r A ad A, sic r B ad B; erit (permutando) r A, ad r B, ut A ad B. Et de reliquis similiter.

PROP. VI.

Quæ ex Reciprocis Rationibus componitur Ratio, est ratio Æqualitatis. Et contra; Æqualitatis Ratio, ex Reciprocis componitur.

$\frac{2}{1} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1.$ $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{6}{6}.$ $\frac{A}{E} \times \frac{E}{A} = \frac{AE}{AE} = 1.$ Fig. 7, 8.

Puta; Dupli Dimidium, Triplum Trientis, Quadrantis Quadruplum; Sesquialteri Subsesquialterum, &c. tantundem valent atque Æquale.

Sequitur ex 2 hujus. Quippe si ratio A ad E, cum ejusdem reciprocâ E ad A, componatur: prodibit ratio AE ad AE, quæ æqualitatis est.

SCHOLIUM.

SCHOLIUM.

HÆc quæ præcedunt Lemmata, ex Rationum doctrinâ desumpta, huc transtulimus, ob frequentem eorum in sequentibus usum.

Demonstrationes verò ita comparatæ sunt (tum hic tum in sequentibus passim) ut & Praxin Arithmeticæ quam *Speciosam* vocant, directè respiciant; & ad appositas figuras lineares (si cui id gratiùs videbitur) facile accommodentur.

Exempli gratiâ. Ad propositionem primam; perinde est sive A & E habeantur pro Symbolis sive speciebus Arithmeticis; sive pro linearum adscriptarum, his notis designatarum indiciis. Utrovis enim modo procedit demonstratio, sive de Lineis, sive de Literis.

Sic ad Prop. 2 & 3 perinde succedit demonstratio, sive sint *a*, *e*, Symbola Arithmeticæ speciosæ, adeoque *æ* quod ex harum invicem multiplicatione oritur: sive designet *a* Altitudinem, *e* Basin, Parallelogrammi *æ*. Quippe Parallelogramma in ratione ex Basium & Altitudinum rationibus compositâ constitui notum est. Adeoque, ut Parallelogrammorum similium Lateribus homologis repræsentari solent rationes Componentes; ita Parallelogrammis ipsis, eorumve Areis, rationes Compositæ.

Sic ad Prop. 4. Perinde est, sive intelligamus quantitates A, E, per eandem *r* multiplicatas, ipsas *r* A, *r* E (multiplicatione factas) in eadem ratione exhibere cum ipsis A, E; sive Parallelogramma *r* A, *r* E, (propter æquales Altitudines *r*,) esse ad invicem ut eorum Bases A, E.

Et similiter ad Prop 5. Sive dicamus quantitates A, B, C, per eandem *r* multiplicatas, producere *r* A, *r* B, *r* C, ipsis A, B, C, proportionales; Sive parallelogramma *r* A, *r* B, *r* C, (propter æqualem altitudinem) Basibus proportionalia; Sive etiam, in similibus triangulis latera A, B, C, & *r* A, *r* B, *r* C, in eadem ad invicem esse ratione: perinde est.

Item in Pro. 6. Perinde est sive intelligamus $A \times E = E \times A = Æ$: sive æqualia dicamus Parallelogramma quorum Altitudines sunt ut A ad E, Bases verò his reciprocæ, nempe ut E ad A.

Id saltem interest; Quod demonstrationes, si tanquam Arithmeticæ habeantur; Universaliores sunt, & de quocunque Quantitatum genere pariter concludunt: Si verò ad Lineas vel Parallelogramma speciatim respiciant; de his solùm directè concludunt, (idque ex vi Propositionum particularium de his in Elementis demonstratarum: quales sunt, *Parallelogrammorum rationes componi ex rationibus Laterum Homologorum circa æquales angulos*; *Parallelogramma æquialta, esse ut Bases*;

Bases; *Parallelogramma quorum Bases & Altitudines sunt reciprocè proportionales, esse Æqualia*, &c.) de aliis verò, non nisi accommodando ad alias quantitates (puta, Vires, Pondera, Velocitates, Declivitates, *&c.*) easdem analogias quas in Lineis vel Parallelogrammis, *&c.* demonstratæ fuerant.

Ego interim, utut Demonstrationes hujusmodi, prout Arithmeticæ speciosæ praxin directè respiciunt, (adeoque universaliores existunt,) potiores existimem; adeoque adscriptas figuras, non nisi unum aliquem ex multis casum, qui sub Universali propositione continetur, (cui reliqui tamen, in aliis quantitatibus sunt conformes,) exhibere: Si tamen malint alii (quibus Demonstrationes Lineares magis arrident) ut rationes omnes, in quibuscunque quantitatibus (quamquam Lineis sint Heterogeneæ) Lineis utcunque exhibeantur; atque hinc ad ipsas de quibus agitur quantitates transferantur, His etiam satisfieri vellem. Idque eò magis, ut quàm inter se conjunctæ sint hæ binæ demonstrandi methodi, perspiciatur; & quàm facili negotio, demonstrationes Rationum Lineares, Lineis exutæ, simpliciùs simul & universaliùs exhiberi possint.

PROP. VII.

Effectus sunt, causis suis adæquatis, proportionales.

C.E :: 2 C.2 E :: 3 C.3 E :: *r* C.*r* E. Fig. 9.

NAm, si Causa ut C, efficit ut E; etiam altera C, cæteris paribus, alterum E efficiet; tertia tertium, *&c.* Adeoque 2 C, 2 E; 3 C, 3 E; & quotlibet C, totidem E. Hoc est Dupla C, duplum E; tripla triplum; & similiter in quâvis aliâ *Multiplicium* ratione.

Sin dicatur; Propter circumstantias evenire posse, ut C altera, priori parem, non producat effectum: Jam non erit hæc aut illa C, ut C, adæquata Causa; sed potius, hæc vel illa C, his aut illis circumstantiis adjuta vel impedita; Quod est contra Hypothesin.

Atque idem ostendetur, de quâvis ratione *Submultiplicium*. Verbi gratiâ: Si 2 C efficiat ut 2 E; etiam C efficiet ut E. Si enim C efficiat vel plus vel minus quam E; etiam 2 C similiter efficeret plus vel minus quam 2 E, (per primam partem hujus demonstrationis:) Quod est contra hypothesin. Similiter ostendetur, de quavis aliâ submultiplicium ratione; Puta, Si 3 C efficiat ut 3 E; etiam C efficiet ut E, *&c.*

Idem

Idem de quavis *Commensurabilium* ratione, ſic oſtenditur. Eſto, verbi gratiâ, expoſita Cauſarum ratio 2 ad 3, ſive n ad m: erit eadem & effectuum ratio. Nam ſi cauſa ut 2 C, efficiat ut 2 E; etiam Cauſa ut C, efficiet ut E; (per ſecundam partem hujus;) adeoque (per partem primam) 3 C, ut 3 E. Quod erat propoſitum. Et ſimiliter de quâvis commenſurabilium ratione oſtendetur, aſſumptâ in demonſtrationem communi menſurâ. Puta; Si cauſa ut n C efficiat ut n E; etiam C efficiet ut E; adeoque m C, ut m E.

Quodque de Commenſurabilibus oſtenditur; Cùm nulla cauſa concipi poſſit, cur non de *Incommenſurabilibus* ſimiliter verum ſit; (poſſitque etiam, de his, ſi opus ſit, Demonſtratione Apagogicâ evinci;) de omnibus pariter verum erit, Effectus Cauſis ſuis adæquatis proportionales eſſe. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIUM.

UNiverſalem hanc Propoſitionem præmittendam etiam duxi; quoniam viam aperit, quâ, ex purè Mathematicâ ſpeculatione, ad Phyſicam tranſeatur; ſeu potius hanc & illam connectit.

PROP. VIII.

Contrariorum, quatenus contraria ſunt, Aggregatum; æquipollet Exceſſui præpollentis: Congruentium verò; eorundem Summæ.

Fig. 10.

+ A	+ 3 A	— 3 A	+ A	— A	+ 3 A	— 3 A
— A	— 2 A	+ 2 A	+ A	— A	+ 2 A	— 2 A
+ 0	+ 1 A	— A	+ 2 A	— 2 A	+ 5 A	— 5 A

SUnto Contrariorum Signa + & —. Adeoque; Si illud *Surſum* deſignet; deſignabit hoc *Deorſum*: Si illud, *Addendum*; hoc, *Auferendum*, deſignabit: Et de aliis contrariis ſimiliter. Sintque contrariorum quantitates A, 2 A, 3 A, *&c.* Erit $+A - A = 0$. $+3A - 2A = +A$. $-3A + 2A = -A$, *&c.* (Ut ex Additionum legibus conſtat.) Hoc eſt, Aggregatum æquivalet Exceſſui præpollentis. Quod erat propoſitum.

At

At $+A+A=+2A$. $-A-A=-2A$. $+3A+2A=+5A$. $-3A-2A=-5A$. (ut ex Additionum legibus similiter constat.) Quod item erat propositum.

Exempli gratiâ. A sursum, & A deorsum; se mutuò destruunt: 3 A sursum, & 2 A deorsum; tantundem valent atque 1 A sursum: 3 A deorsum & 2 A sursum; æquivalent atque 1 A deorsum: Adeoque, Qui (verbi gratiâ) unum passum ascendit, & tantundem descendit; nihilo est vel altior vel humilior: Qui ascendit 3 passus, & 2 passus descendit; est uno passu altior: Qui 3 passus descendit iterumque ascendit 2 passus, est uno passu humilior.

Item; Qui unum Addit, & tantundem Aufert; nihilo vel Auget vel Minuit: Qui addit 3, & Aufert 2; uno Auget: Qui 3 Tollit, & 2 Restituit; uno Minuit. Et de Contrariis aliis similiter judicandum.

Contrà verò: Qui 3 passus ascendit, & insuper 2 alios; est 5 passibus altior: Qui 3 passus descendit, & deinde 2 alios; est 5 passibus humilior.

Item: Qui 3 Addit, & insuper 2; quinario auget: Qui tum 3, tum 2 Tollit; quinario minuit. Et de reliquis similiter.

PROP. IX.

Æquipollens si vel Augeatur, vel Contrarium Minuatur; sit Præpollens: Si Minuatur, vel Contrarium Augeatur; sit minus-pollens.

$$A+E>A. \qquad A-E<A.$$ Fig. 11.

Quia Totum est sui Parte majus. Puta: Totum $A+E$, præpollet ipsius parti A. Et Totum A, ipsius parti $A-E$.

SCHOLIUM.

Suntque hæ Propositiones Novem, totidem Lemmata; quæ non magis spectant præsentem Motuum Doctrinam, quàm quamvis aliam; Sed frequentissimi usûs erunt in sequentibus; quare in vestibulo demonstrandas duxi.

PROP. X.

Ubi conjuncta sunt Momentum & Impedimentum : Si Momentum præpollet, pro Momento simul habenda sunt; pro Impedimento verò, si præpollet Impedimentum; Et utrobique Tanto, quantus est præpollentis Excessus; Sin æquipollent, pro Neutro.

Sin plura sint conjuncta vel Momenta, vel Impedimenta : Tanta simul habenda sunt, quanta est eorundem summa.

CUm enim Contraria sint Momentum & Impedimentum; hoc est, Causa ut sit, &c, Causa nè sit : Constat propositum, per 8 hujus.

PROP. XI.

Si Momentum Impedimento præpollet : Motum efficit. Adeoque; Si nullus fuerit, Inchoatur : Si jam fuerit, Augetur.

Si præpollet Impedimentum : Impedit. Adeoque Motum, siquis jam sit, vel Tollit, vel saltem Minuit.

Et quidem in eâ ratione plus minúsve Efficit aut Impedit, quâ major est vel minor Excessus præpollentis.

Si Æquipollent : Neque Ponitur motus, neque Tollitur. Adeoque quæ priùs erat vel Quies vel Motus, perseverat.

SEquitur ex præcedente. Nam prout utriusque Aggregatum pro vel Momento, vel Impedimento, vel Neutro habendum est; ita vel motum Efficit, vel Impedit, (& quidem in eâ ratione,) vel Neutrum, per 7 hujus.

SCHOLIUM.

SCHOLIUM.

POstremam hujus Propositionis partem; Nempe, Inceptum Motum, (nisi obstaculum ponatur,) suapte sponte (sine continuo motore,) non minus quàm jam existentem Quietem (nisi accedat Motor) perseverare; *Galilæus*, *Cartesius*, *Gassendus*, aliíque, videntur Postulare; atque hinc non levis momenti multa inferunt: Qui autem Demonstret, non memini me vidisse quempiam. Erátque hoc nobis, in sequentibus, asserendum, ubi de Motuum Acceleratione dicetur: tam propere tamen, in ipso statim vestibulo, asserendo abstinuissem, nisi consequentiæ necessitate viderem me coactum jam statim affirmare; non parvi postea momenti futurum.

PROP. XII.

Vis vì contraria, si æquipollet, sustinebit: Si minùs pollet; nè hoc quidem: Si præpollet, (neque aliud adsit impedimentum;) movebit. Et contrà: Si movet; præpollet: Si non movet; tum vel minus pollet, vel saltem æquipollet, vel aliud quid impedit.

$+A - A = o. \quad +2A - 3A = -A. \quad +3A - 2A = +A.$
$+S - D = o. \quad + \; S - D = - . \quad + \; S - D = + .$

SIt, verbi gratiâ, S, vis sursum; D, deorsum. Si invicem æquipollent; nullis æquivalent, (per 8 hujus;) Adeoque motum non efficiant; (per 7 hujus.) Si S præpollet; fit motus sursum: Si D, deorsum. Æquivalent utique Excessui præpollentis, per 8 hujus; Eritque motus consonus; per 7 hujus. Et similiter de quibusvis aliis Viribus contrariis ostendetur.

Dico tamen, *Nisi aliud adsit Impedimentum.* Quoniam fieri potest, ut vel Medii densitas, vel durities, vel Obex aliquis obstet, quò minùs à præpollente moveatur vis inferior; utut Obex ille, vim in contrarium Motricem non habeat, sed simpliciter Impediat. Ut, quum grave pavimento incumbit: quod vim habeat Impediendi ne descendat; non autem Motivam sursum; quia nec ipsum sursum nititur.

SCHOLIUM.

PRocedit hæc tum Propositio, tum Demonstratio, potissimum de Mobili jam in Quiete constituto. Si verò jam sit in Motu; Hoc ipsum, esse in motu, accensendum erit causis ejusdem motûs continuativis, vel impeditivis contrarii. Quippe sublatio motûs, tam causam efficientem postulat, quàm motûs Positio; uti ex Prop. præced. constat. Unde est, quod Motus Penduli, verbi gratiâ, à gravitate inchoatus, non quidem à gravitate solâ continuatur, sed ab ipso impetu seu motu jam existente continuatur, etiam ultra perpendiculum, adeoque ascendendo; non obstante ipsius gravitatis in contrarium nisu, aliisque forsan non contemnendis obstaculis, quod & in aliis motibus ab impetu inchoato continuatis passim obtinet. Quodque ad hanc Propositionem monemus; etiam in sequentibus, prout res tulerit, intelligendum erit.

Hoc autem fundamento nititur, de contra-ponderantibus, seu contra-moventibus judicium: Adeoque vel Quietis, ob æquilibrium seu contra-moventium æquipollentiam; vel Motûs, ob præponderantiam, seu præpollentiam.

PROP. XIII.

Quæ ex Mobilium pondere resultant motûs Impedimenta, (cæteris paribus,) sunt Ponderibus proportionalia.
Quodque de Pondere dicitur, de quavis aliâ contrariâ vi, similiter intelligendum, quæ ponderis instar erit. Et similiter in sequentibus.

Fig. 12. P . I :: 2 P . 2 I :: 3 P . 3 I :: *n* P . *n* I.

NAm si pondus ut P, impedit ut I; etiam alterum P, cæteris paribus, ut alterum I impediet; tertium, ut tertium; *&c.* Adeoque 2 P, ut 2 I; 3 P, ut 3 I; & quotlibet P, ut totidem I. Quare & tantundem Ponderis, tantundem impedit; duplum, duplo; triplum, triplo, *&c.* Et in reliquis similiter proportionibus: per 7 hujus.

SCHOLIUM.

SCHOLIUM.

Dico autem, *Cæteribus paribus*; Quoniam idem Pondus, pro vario situ, aliisve circumstantiis, potest variè impedire. Ubi autem cætera sunt paria; tota quæ oritur diversitas, à solâ Ponderis diversitate, ut ab adæquatâ causâ, profluit. Cæteráque, quæ Æqualium rationem subeunt, proportionem non immutant. Per 4 hujus.

Quodque hic dictum est, etiam in aliis propositionibus pariter intelligendum erit, licèt non disertè dicatur. Quod semel monuisse sufficiat.

PROP. XIV.

Quæ ex Longitudine transigendâ, resultant motûs Impedimenta; sunt Longitudinibus proportionalia.

Quodque de Longitudinibus, dicitur; de Medii densitate, tenacitate, aut simili quovis Impedimento, pariter dicendum erit. Et similiter in sequentibus.

$$L . I :: 2L . 2I :: 3L . 3I :: mL . mI.$$ Fig. 13.

Puta; Æqualis Longitudo transigenda, æqualiter Impedit; dupla, duplò; tripla, triplò, *&c.* Nam si Longitudo ut L, impedit ut I; Etiam altera L, ut alterum I impediet; & tertia, ut tertium, *&c.* Adeoque; Dupla, duplò; Tripla, triplo; & in reliquis similiter proportionibus. Per 7 hujus.

PROP. XV.

Quæ ex Pondere simul, & Longitudine transigendâ, resultant motûs Impedimenta; sunt in ratione ex Ponderum & Longitudinum rationibus compositâ.

$$\frac{\begin{matrix}P.\\L.\end{matrix}}{PL.}\ I :: \frac{\begin{matrix}2P.\\2L.\end{matrix}}{4PL.}\ 4I :: \frac{\begin{matrix}2P.\\3L.\end{matrix}}{6PL.}\ 6I :: \frac{\begin{matrix}nP.\\mL.\end{matrix}}{mnPL.}\ mnI.$$ Fig. 14.

Puta;

PUta; Duplum Pondus, per Duplam Longitudinem ferendum, est Impedimentum Quadruplum; per Triplam, Sextuplum: Triplum Pondus, per Longitudinem Triplam, est Impedimentum Noncuplum; per Quadruplam, Duodecuplum, *&c.* Nam, si Pondus P, per Longitudinem L ferendum, impedit ut I; etiam alterum P, per eandem Longitudinem ferendum, impediet ut I alterum; tertium, ut tertium, *&c.* Adeoque; Duplum, duplò; Triplum, triplo, *&c.* per eandem Longitudinem ferendum. Per 13 hujus. Cùm itaque Pondus ut 2 P, per Longitudinem L ferendum, impediat ut 2 I: Pondus idem per Longitudinem 2 L ferendum, impediet ut 4 I; per 3 L, ut 6 I, *&c.* per præced. Item; Cùm Pondus 3 P, per Longitudinem L ferendum, impediat ut 3 I: idem per 3 L ferendum, impediet ut 9 I; per 4 L, ut 12 I, *&c.* per præced. Et, universaliter, Si Pondus P, per Longitudinem L ferendum, impediat ut I: Pondus *n* P, per eandem L ferendum, impediet ut *n* I (per 13 hujus;) Adeoque, per *m* L, ut *mn* I; (per præced.) Hoc est, in ratione ex Ponderum & Longitudinum rationibus composita, (per 2 hujus.) Quod erat propositum.

PROP. XVI.

Si, in duobus motibus, Pondera & Longitudines, vel utraque sint Æqualia, vel sint Reciprocè proportionalia; Quæ hinc resultant Impedimenta, sunt Æqualia. Et contrà: Si quæ inde resultant Impedimenta sunt æqualia; Pondera & Longitudines sunt vel utraque Æqualia, vel saltem Reciprocè proportionalia.

Fig. 14, 15.

$$\begin{array}{c}P.\\2L.\\\hline 2PL.\end{array} I :: \begin{array}{c}2P.\\L.\\\hline 2PL.\end{array} I. \qquad \begin{array}{c}2P.\\3L.\\\hline 6PL.\end{array} I :: \begin{array}{c}3P.\\2L.\\\hline 6PL.\end{array} I. \qquad \begin{array}{c}nP.\\mL.\\\hline mnPL.\end{array} I :: \begin{array}{c}mP.\\nL.\\\hline mnPL.\end{array} I.$$

PUta: Æquale Pondus, per Æqualem Longitudinem ferendum, Æqualiter Impedit. Item, Pondus Duplum per Æqualem Longitudinem, &, Æquale Pondus per Longitudinem Duplam ferendum, Æqualiter impediunt. Sic, Pondus Triplum per Longitudinem Æqualem, &, Æquale Pondus per Longitudinem Triplam. Item,

Pondus

Pondus Duplum per Longitudinem Triplam, Et, Triplum Pondus per Longitudinem Duplam, *&c.*

Sunt enim Impedimenta, in ratione ex Ponderum & Longitudinum rationibus compositâ; (per præced.) Adeoque, (cùm hæ sunt reciprocæ,) æqualia sunt: (per 6 hujus.) Unde & conversa patet.

SCHOLIUM.

POsset quidem ea clausula, *Vel utraque æqualia*, tutò omitti, utpote quæ in sequenti, *Reciprocè proportionalia*, continetur. Nam, ut Dimidio Duplum, sic &, Æquale Æquali, reciprocum est. Mallem tamen, perspicuitatis gratiâ, tum in hac Propositione, tum in sequentibus aliquoties, illud etiam disertè inserere. Quod quidem non tantum ex 6 hujus, sed & 4 hujus, perinde patet.

Ex his autem quatuor Propositionibus proximè præcedentibus, æstimatur *Motuum* perficiendorum *Magnitudo*. Ea scilicet quæ ex mobilium Pondere, & motûs Longitudine, simul consideratis emergit.

PROP. XVII.

Quæ respectivis Impedimentis æquipollent Momenta, sunt Impedimentis proportionalia.

(Adeoque Ponderibus, si reliqua sint paria; vel Longitudinibus, si reliqua sint paria; vel quæ ex Pondere & Longitudine resultant Impedimentis, si reliqua sint paria.)

Eáque Momenta, si augeantur; vel minuantur Impedimenta; movebunt. Fig. 16, 17, 19.

$$M . I :: 2M . 2I :: 3M . 3I :: rM . rI.$$

PUta; Æquale Momentum, Æquali Impedimento æquipollet; Duplum, Duplo; Triplum, Triplo, *&c.* Nam si Momentum ut M, æquipollet Impedimento ut I; etiam alterum M, alteri I æquipollebit; & Tertium, Tertio, *&c.* Adeoque, Duplum Duplo, Triplum, Triplo, *&c.* per 7 hujus.

Adeoque; vel Ponderibus, vel Longitudinibus, vel quæ ex utrisque simul resultant Impedimentis, (cæteris paribus,) sunt proportionalia. Nam

Nam his proportionalia sunt, quæ ex his resultant Impedimenta. per 13, 14, 15. hujus.

Sin augeatur Momentum Æquipollens, vel Impedimentum minuatur; Momentum præpollebit; adeoque, movebit. per 9, 10. hujus.

SCHOLIUM.

ATque hinc dependet de Æquilibrio, seu contra-nitentium Æquipollentiâ, judicium; &, quæ hinc sequitur, Quiete: quíque ex Præpollentiâ procedit, Motu.

PROP. XVIII.

Virium momenta, cæteris paribus, sunt Virium gradibus proportionalia.

Fig. 18. V.M :: 2V.2M :: 3V.3M :: *n*V.*n*M.

PUta; Vis æqualis, tantundem movendo pollet; Dupla, duplo; Tripla, triplo, *&c.* Nam, si vis ut V, moveat ut M: etiam vis ut 2 V, movebit ut 2 M; 3 V, ut 3 M; *n* V, ut *n* M, *&c.* per 7 hujus.

PROP. XIX.

Virium, gradu æqualium, Momenta; sunt, cæ taribus, Temporibus proportionalia.

Fig. 17. 19. T.M :: 2T.2M :: 3T.3M :: *m*T.*m*M.

NAm, si Vis exposita, Tempore T, moveat ut M: etiam altero T, tantundem efficiet; tertio, tantundem, *&c.* Adeoque, in 2 T, ut 2 M; in 3 T, ut 3 M; in *m* T, ut *m* M, *&c.* Hoc est, Duplo tempore, duplum efficiet; Triplo, triplum, *&c.* per 7 hujus.

PROP.

PROP. XX.

Quæ ex Virium gradu, ſimul & applicationum Tempore reſultant Momenta; ſunt in ratione ex Virium & Temporum rationibus compoſitâ.

$$\frac{\begin{matrix}V.\\T.\end{matrix}}{VT.}\ M :: \frac{\begin{matrix}2V.\\2T.\end{matrix}}{4VT.}\ 4M :: \frac{\begin{matrix}2V.\\3T.\end{matrix}}{6VT.}\ 6M :: \frac{\begin{matrix}nV.\\mT.\end{matrix}}{mnVT.}\ mnM.$$

Fig. 21.

PUta; Vis Dupla, duplo Tempore, Quadruplum poteſt; triplo, Sextuplum: Tripla, triplo tempore, poteſt Noncuplum; quadruplo, Duodecuplum, *&c.* Nam, ſi Vis ut V, Tempore T, moveat ut M: Vis ut 2 V, eodem Tempore, movebit ut 2 M; & 3 V, ut 3 M, *&c.* per 18 hujus. Cùm itaque Vis ut 2 V, Tempore T, moveat ut 2 M; Vis eadem, Tempore 2 T, movebit ut 4 M; & tempore 3 T, ut 6 M, *&c.* Per 19 hujus. Item, Cùm Vis ut 3 V, Tempore T, moveat ut 3 M; Vis eadem, Tempore 3 T, movebit ut 9 M; Tempore 4 T, ut 12 M, *&c.* Et, univerſaliter, Si Vis V, Tempore T, moveat ut M; Vis n V, eodem Tempore T, movebit ut n M, (per 18 hujus:) Adeoque, Tempore m T, ut mn M, (per 19 hujus.) Hoc eſt, in ratione ex Virium & Temporum rationibus compoſitâ, (per 2 hujus.) Quod erat propoſitum.

PROP. XXI.

Si Vires & Tempora, ſint vel utraque Æqualia, vel ſint Reciprocè proportionalia; quæ hinc reſultant Momenta ſunt Æqualia. Et contrà: Si Momenta illa ſint Æqualia; Vires & Tempora, ſunt, vel utraque æqualia, vel ſaltem Reciprocè proportionalia.

$$\frac{\begin{matrix}V.\\2T.\end{matrix}}{2VT.}M :: \frac{\begin{matrix}2V.\\T.\end{matrix}}{2VT.}M.\quad \frac{\begin{matrix}2V.\\3T.\end{matrix}}{6VT.}M :: \frac{\begin{matrix}3V.\\2T.\end{matrix}}{6VT.}M.\quad \frac{\begin{matrix}nV.\\mT.\end{matrix}}{mnVT.}M :: \frac{\begin{matrix}mV.\\nT.\end{matrix}}{mnVT.}M.$$

Fig. 20, 21.

PUta; Vis æqualis, æquali Tempore, tantundem efficit. Item, Vis dupla æquali tempore, &, Vis æqualis duplo Tempore, tantundem efficiunt. Sic, Vis dupla triplo Tempore, &, Vis tripla duplo Tempore, *&c.* Sunt enim Momenta in ratione ex Virium & Temporum rationibus composita; (per præced.) Adeoque (cùm hæ sint Reciprocæ) Æqualia sunt. (per 6 hujus.) Unde & conversa patet.

SCHOLIUM.

EX his quatuor Propositionibus proximè præcedentibus, æstimantur, quæ ex Viribus & Temporibus simul consideratis emergunt, *Momentorum Magnitudines.*

PROP. XXII.

In quibusvis Motibus invicem comparatis; Momenta sunt Impedimentis proportionalia.

Fig. 23, 25. $VT=M \,.\, PL=I :: 2VT=2M \,.\, 2PL=2I :: nVT=nM \,.\, nPL=nI.$

Fig. 22, 24. $M=VT \,.\, \mu=\upsilon\tau :: I=PL \,.\, \iota=\pi\lambda.$

PUta; si Vis V, Tempore T; sive, quod ex his resultat, Momentum M; movet Pondus P, per Longitudinem L; sive tollit, quod ex his resultat, Impedimentum I: Duplum Momentum, tollet Duplum Impedimentum; Triplum, Triplum, *&c.* Nam, si Momentum M, tollit Impedimentum I; etiam alterum M, alterum I tollet; tertium, tertium, *&c.* Adeoque Duplum Momentum, tollet, Duplum Impedimentum; Triplum, Triplum; & in reliquis similiter proportionibus. Per 7 hujus. Quod erat propositum.

Sive, (ut in *Aureâ Regulâ compositâ* dici solet,) Ut, Factum ex Pondere & Longitudine, in uno Motu; ad, Factum ex Pondere & Longitudine, in alio Motu: sic, Factum ex Vi & Tempore, in priori motu; ad, Factum ex Vi & Tempore, in posteriori motu; cæteris paribus.

SCHOLIUM.

EX hac Propositione potissimùm dependet Motuum inter se comparatio, quoad Vires, Tempora, Pondera, & Longitudines.

PROP.

PROP. XXIII.

In Comparatis Motibus; Si Lationum Tempora ſint æqualia; Celeritatum gradus ſunt tranſactis Longitudinibus proportionales.

$$L . \lambda :: C . \kappa .$$

$$L . C :: 2L . 2C :: nL . nC .$$ Fig. 26.

HOc eſt: Ut Longitudo prima, ad ſecundam, eodem tempore tranſactam; ſic Celeritas prima ad ſecundam.

Puta; Duplâ Celeritate, (eodem Tempore,) Dupla Longitudo tranſigitur; Dimidiâ Celeritate, Subdupla Longitudo. Et ſimiliter in aliis proportionibus. Per Celeritatum definitiones.

PROP. XXIV.

In comparatis Motibus; Si tranſactæ Longitudines ſint æquales; Celeritatum gradus ſunt Temporibus reciprocè proportionales.

$$\tau . T :: C . \kappa .$$

$$\frac{L}{T} . C :: \frac{L}{2T} . \frac{1}{2} C :: \frac{L}{nT} . \frac{1}{n} C .$$ Fig. 27.

HOc eſt; Ut Tempus ſecundum, ad tempus primum; ſic (reciprocè) Celeritas prima ad ſecundam.

Puta; Dimidio Tempore, duplâ Celeritate, tranſigitur æqualis Longitudo: Duplo Tempore, dimidiâ Celeritate. Et ſimiliter in aliis proportionibus, Per Celeritatum definitiones.

PROP. XXV.

Comparatorum Motuum Celeritates, ſunt in ratione ex directâ Longitudinum & reciprocâ Temporum rationibus compoſitâ.

Fig. 28.

$$\begin{array}{cc} L. & \lambda \\ \tau. & T \\ \hline L\tau. & \lambda T \end{array} :: C . \kappa\tfrac{n}{o} \qquad \begin{array}{c} T. \\ L. \\ \hline 2TL, \end{array} \times \begin{array}{c} 2T \\ 3L \\ \hline 3TL. \end{array} C :: \tfrac{3}{2} C. \qquad \begin{array}{c} mT. \\ L. \\ \hline TL. \end{array} \times \begin{array}{c} T \\ nL \\ \hline mnTL \end{array} :: C . mnC.$$

$$\frac{L}{T} . C :: \frac{3L}{2T} . \frac{3}{2} C :: \frac{nL}{mT} . \frac{n}{m} C.$$

PUta : Longitudo dupla, dimidio Tempore tranſigitur, Celeritate Quadruplâ : Tripla Longitudo dimidio Tempore, Celeritate Sextuplâ : Tripla Longitudo duplo Tempore, Celeritate Seſquialterâ, *&c.*

Nam, ſi Longitudo L, Tempore T, abſolvatur Celeritate ut C: Longitudo 2 L, eodem Tempore T, abſolvetur Celeritate ut 2 C; (per 23 hujus:) Adeoque dimidio Tempore ſeu $\frac{1}{2}$T, duplo adhuc celeriùs, ſive Celeritate ut 4 C. (per præced.) Similiter, Longitudo 3 L tempore T, celeritate ut 3 C; (per 23 hujus:) Adeoque Tempore $\frac{1}{2}$T, Celeritate ut 6 C; & Tempore 2 T, Celeritate $\frac{3}{2}$ C: per præced. Et, uniuerſaliter; Si Longitudo L, tempore T, tranſigatur Celeritate C: Longitudo nL eodem tempore tranſigetur Celeritate nC, (per 23 hujus:) adeoque Tempore mT, celeritate $\frac{n}{m}$ C; (per præced.) Hoc eſt, in ratione quæ ex directâ Longitudinum & reciprocâ Temporum rationibus componitur. Quod erat propoſitum.

PROP. XXVI.

In comparatis Motibus; Si tranſactæ Longitudines, ſint Temporibus proportionales : Celeritates ſunt æquales. Et contrà.

$$L . T :: 2L . 2T :: 3L . 3T :: nL . nT.$$

Fig. 29.

SEquitur ex præcedente. Quoniam, hoc casu, Reciproca Temporum (quæ eadem est cum reciprocâ Longitudinum) cum directâ Longitudinum, composita; æqualitatis ratio est. per *6* hujus.

Vel ex definitionibus Celeritatum. Cum enim Æqualis Celeritas, æquali Tempore, æqualem Longitudinem absolvit (per Def. 10.) Etiam Duplo tempore, duplam Longitudinem; Triplo, triplam, *&c.* absolvet. Et contrà. per 7 hujus.

PROP. XXVII.

In comparatis motibus, Virium gradus (cæteris paribus) sunt in ratione quæ ex Ponderum & Celeritatum rationibus componitur.

$$VT . v\tau :: PL . \pi\lambda.$$

$$V . v :: \frac{PL}{T} . \frac{\pi\lambda}{\tau} :: PL\tau . \pi\lambda T :: PC . \pi\kappa.$$

$$\frac{T}{\tau}\Big)\frac{VT}{v\tau} = \frac{PL}{\pi\lambda}\Big(\frac{V}{v} = \frac{PL\tau}{\pi\lambda T} = \frac{PC}{\pi\kappa}.$$

CUm enim (per 22 hujus) Momentorum ratio, quæ ex Virium & Temporum rationibus componitur; eadem sit cum eâ, quæ ex Ponderum & Longitudinum rationibus componitur, ratione Impedimentorum: Si eximatur utrinque ratio Temporum, vel (quod eodem recidit) illius Reciproca accedat; Relinquetur Virium ratio, ea quæ componitur ex rationibus Ponderum, & Longitudinum, & reciprocâ Temporum; Hoc est, (per 25 hujus) ea quæ ex Ponderum & Celeritatum rationibus componitur. Quod erat propositum.

SCHOLIUM.

EX hac Propositione dependet Problematum aliquot, in Mechanicis maximè celebrium, generalis solutio. Nempe,

PROP. XXVIII.

Datum Pondus, datâ Vi movere.

$$P . V :: nP . \qquad P . V :: 2P .$$
$$\frac{C.}{PC.} \quad \frac{\frac{1}{n}C.}{PC.} \quad V. \qquad \frac{C.}{PC.} \quad \frac{\frac{1}{2}C.}{PC.} \quad V.$$

SIt expoſita Vis V, quæ movere potis ſit Pondus P, celeritate C: & requiratur, ut eâdem vel æquali Vi, moveatur Pondus n P.

Dico; Si, cæteris paribus, res ita comparetur (interpoſitâ Machinâ) ut, quâ ratione Pondus n P majus ſit minúſve quàm Pondus P; eâdem, contra, minor fiat majórve celeritas, puta $\frac{1}{n}$ C: eadem Vis V, expoſitum Pondus n P, movebit celeritate $\frac{1}{n}$ C.

Cùm enim rationes n P ad P, & $\frac{1}{n}$ C ad C, ſint reciprocæ; quæ ex his componitur eſt Æqualitas; (per 6 hujus:) Adeoque (per præced.) æqualis Vis requiritur ad movendum Pondus P celeritate C, atque Pondus n P celeritate $\frac{1}{n}$ C. Quod erat propoſitum.

SCHOLIUM.

HUic igitur potiſſimùm negotio ſe applicet Mechanicus, ut iſtiuſmodi machinas excogitet, eaſque in uſum redigat, quibus Vi & Ponderi interpoſitis, motuum celeritatem ita moderetur, ut Ponderum Magnitudinem Tarditate motûs compenſet; ſeu, Temporis Longitudine, Defectum Virium.

PROP. XXIX.

Datum Pondus, datâ Celeritate movere.

$$P . V :: P .$$
$$\frac{C.}{PC.} \qquad \frac{nC.}{nPC.} \qquad nV.$$

Sit

SIt expositum Pondus P, quod, celeritate C, movere potis sit Vis V: & requiratur, ut Celeritate nC, moveatur.

Dico: Si, cæteris paribus, quâ ratione augenda sit aut minuendâ celeritas, eâdem similiter augeatur vel minuatur Vis adhibita: expositum Pondus datâ celeritate movebitur.

Cùm enim (propter idem utrobique Pondus) eadem sit Celeritatum ratio, cum illâ quæ ex hac & Ponderum rationibus componitur, (per 4 hujus;) eadem erit & Virium requisitarum ratio; (per 27 hujus.) Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

NOtandum interim: Cùm non ita in promptu sit, Vires pro arbitrio augere, atque Celeritatem motûs minuere; non ita facile erit præsens Problema, atque illud quod proximè antecedit, magnis Ponderibus actu applicare.

PROP. XXX.

Datâ Vi, datâ Celeritate, motum efficere.

$$\begin{array}{lll} P . V :: & \frac{1}{n} P. & \\ \underline{C.} & \underline{nC.} & \\ PC. & PC. & V. \end{array}$$

SIt exposita Vis V, quæ Pondus P, celeritate C movere potis sit: requiratur autem, ut Celeritate n C fiat motus.

Dico: Si, cæteris paribus, quâ ratione augenda sit aut minuenda Celeritas; eâdem, vice versâ, minuatur vel augeatur Pondus: Eâdem Vi, datâ celeritate, movebitur. Puta, Pondus $\frac{1}{n}$P, eâdem Vi, celeritate n C movebitur.

Cùm enim Ponderum $\frac{1}{n}$P ad P, & Celeritatum nC ad C, rationes sint reciprocæ: Quæ ex his componitur ratio, Æqualitatis est; (per 6 hujus;) Adeoque & Virium requisitarum. per 27 hujus,

SCHOLIUM.

SCHOLIUM.

NOtandum denique; Ita calculum his Propositionibus institui, ac si in Medio Vacuo peragendus sit motus: Quare nec Resistentiæ in medio, vel Magnitudinis aut Figuræ rei Mobilis, habita est consideratio: Sed conditione hac, *Cæteris paribus*, tum hæ tum aliæ circumstantiæ sic excludi intelliguntur, ut vel nullæ sint, vel ita saltem comparatæ ut non immutent aut turbent rationes. Adeoque, ubi adsunt, opus erit (quò calculi Mathematici ἀκρίβεια conservetur, vel ab eâ quàm minimum recedatur,) ut earum vel accurata consideratio etiam habeatur, & calculo æstimetur; vel saltem, ut eo modo comparentur quo minimum turbentur reliquæ rationes.

CAP.

CAP II.

De Gravium Descensu, & Motuum Declivitate.

PROP. I.

Gravia, cæteris paribus, gravitant in ratione Ponderum. Et, universaliter, Vires Motrices quælibet, agunt pro Virium ratione.

P. G :: 2 P. 2 G :: 3 P. 3 G :: *r* P. *r* G.

PUta; Si Pondus ut P, Gravitat ut G: Etiam alterum P, ut alterum G gravitabit: tertium, ut tertium, *&c.* Adeoque 2 P, ut 2 G; 3 P, ut 3 G; & quotlibet P, ut totidem G, *&c.*

Est enim Gravitas, Vis Motrix; ejusque mensura, Pondus: (per 12, 13. Def. Cap. 1.) Movet igitur Gravitas, pro Ponderum ratione; per 18. Cap 1. Et similiter in Motibus aliis ostendetur.

PROP. II.

Grave, quatenus non impeditur, Descendit; seu propius ad Terræ Centrum appropinquat.
Et, universaliter, Vis quævis Motrix, secundum Directionem suam, quatenus non impeditur, procedit.

NAm (per Def. Gravitatis) Gravitas est Vis deorsum movens, seu versus Terræ Centrum. Hac igitur, quatenus non impeditur, feretur Grave, gravitate suâ. per 11 cap. 1.
Et similiter in aliis motibus ostendetur.

PROP. III.

Grave tantundem Descendit, quantò fit Terræ Centro propius: Tantum Ascendit, quantò remotius.

Et, universaliter, Cujusvis Vis Motricis Progressus tantus est, quantum secundum Directionem suam movetur; Regressus, contrà.

Fig. 30. CD=CB. CA−CD=CA−CB. CD−CE=CB−CE.

SIt C, Terræ Centrum: unde ducantur æquales rectæ CB, CD. Continuetur CB ad A; & jungatur AD. Item, sumpto ubivis in CB, puncto E; jungatur ED. Dico; Grave ab A, puncto altiore, ad B vel D motum; tantundem Descendisse, quantò B vel D, minus quàm A, distat à Centro C: Motum verò ab E, puncto quovis humiliore, ad B vel D; tantum Ascendisse, quantò B vel D, magis quàm E, à Centro distat.

Est enim (per Def. Gravitatis) Descensus gravium, (seu Motus secundum Directionem suam,) Motus versus Centrum Terræ. Tantò igitur Descendisse dicetur Grave, quantò ad Terræ Centrum propius accesserit. Putà, quantò Brevior est CB vel CD, quàm CA. Adeoque tantò Ascendisse, quantò fuerit contrario motu latum; hoc est, quantò à Terræ centro remotiùs abscesserit; putà, quantò Longior est CB, vel CD, quàm CE. Quod erat propositum.

Adeoque: Quamquàm AD vel ED recta, Longior sit quàm AB vel EB; non tamen Altior seu major Descensus est vel Ascensus, Gravis per illam, quàm per hanc lati.

Quodque de Gravitate ostensum est, similiter de aliâ Vi Motrice intelligendum erit. Quod enim est, respectu Gravitatis, Descensio: idem est, respectu cujusvis Vis Motricis, Latio secundum Directionem suam: Et contrà. per Def. 21. Cap. 1.

SCHOLIUM

SCHOLIUM.

NOtandum interim; pro Peripheriâ BD, indifferenter ut plurimùm sumi Rectam Horizontalem BH; quæ, propter immensam Centri distantiam, & planorum quibus maximè versamur parvitatem, cum illâ quasi coincidens haberi solet. Si quando tamen vel immensa plana tractanda veniant, vel accuratiùs philosophandum sit; secernenda erunt.

Necui interim mirum videatur; quòd de Gravi, tanquam in uno Puncto, verba faciamus; cùm interim Grave non sit nisi Corpus solidum: Monendum erit, considerare nos hìc loci, *Grave* ut abstractum à *Magno*, (abstractione, ut loquuntur, Mathematicâ.) Consideramus utique, non quàm Grande Corpus, nedum quâ Figurâ sit, sed quanta Ponderis Vis hoc in puncto applicatur: Perinde habentes, mole magnâ sit, an parvâ, aut etiam nullâ sed Punctulo vis illa insit; Item, planum sit, an rotundum; plenum, an excavatum; quod ita ponderat. Quamquam enim, in *Hydrostaticis*, aut alias etiam ubi de Medii resistentiâ agatur, aut alibi aliis de causis; magni intersit, quâ mole quáve figurâ, sit Grave ponderans: ea tamen omnia hic secludimus, (eâdem libertate quâ, post *Archimedem*, alii, de Planorum, Linearum, aut etiam Puncti gravitate philosophantur; quod & nos inferiùs facturi sumus.) Atque hoc ipsum ne à veritate Physicâ nimis abhorrere videatur; ostendetur, in sequentibus, (ubi de Centro Gravitatis agetur,) Gravis quantumvis magni vim totam ita distribui ut perinde omnino ponderando valeat atque si in unico illius puncto esset. Verùm eâ consideratione posthabitâ, quæ hujus loci non est; (quippe quum nondum definivimus Centrum gravitatis, nedum esse demonstravimus, aut quanta vis huic insit; (adeoque, utut in Scholio, ubi laxiùs agimus, illius mentionem faciamus; in Demonstrationibus tamen non eâ libertate utimur;) sufficit hìc loci monuisse, nos id saltem hìc inquirere, quid futurum sit, si hoc aut illo puncto tanta vis Ponderis (aut etiam quæ ponderis instar erit,) adhibeatur, undecunque demum fuerit. Quod & subinde sæpiùs, in sequentibus, intelligendum erit.

PROP. IV.

Eà, cæteris paribus, propendet Grave, vel ex pluribus
Fig. 31. gravibus Aggregatum; (Hoc est, eà potiùs fertur:) quà plus Descenditur: idque in eâdem ratione quâ plus Descenditur. Eáque magis repugnat, & in eadem ratione, quà plus Ascenditur. Et contrà.

Quà verò æqualiter vel Descenditur vel Ascenditur; æqualiter vel Propendet vel Repugnat. Et contrà.

Cæterisque motibus idem similiter accommodabitur. Eà potiùs feretur Mobile, (& in eâ ratione potius,) quà magis secundum virium Directionem proceditur.

Cum enim tendat Grave (per def. Gravitatis) simpliciter *Deorsum*; adeoque, quàm potest maximè; (Naturaliter siquidem agentia, non agunt ex delectu, sed cæco impetu pro summâ virium:) Eà potiùs feretur, cæteris paribus, quà magis erit Deorsum, seu minus Sursum; (adeoque contrario motui magis repugnat:) Hoc est, quà plus Descenditur, quáque Ascenditur minùs, (& contrà; Quà minùs Descenditur, quáque Ascenditur magis, ægriùs feretur.) Et quidem (per 7 cap. 1.) in eadem ratione. Quod erat propositum.

Quà verò æqualiter vel Descenditur vel Ascenditur: Æqualiter vel Propendet vel Repugnat. A Gravitate siquidem (per def. Gravitatis) non nisi Descensûs ergô, vel omnino fertur, vel hac magis quàm illac fertur.

Contrà verò; Quà, cæteris paribus, æqualiter vel Propendet vel Repugnat; æqualiter vel Descenditur vel Ascenditur. (Nam siquâ vel magis Descenderet, vel minùs Ascenderet; eà magis propenderet, minúsve repugnaret; per jam Demonstrata.) Quod itidem erat propositum.

Et eâdem ratione ostendetur conversa primæ partis; Nempè, quà plus propendet Grave, eà magis Descenditur; & quà plus repugnat, eà magis Ascenditur, *&c.* Cæteris paribus.

Et similiter in aliis motibus ostendetur.

PROP. V.

Gravium Deſcenſus, invicem comparati, in eâ ratione pollent, quæ ex Ponderum ratione & ratione Altitudinum Deſcenſuum componitur. Atque Aſcenſus ſimiliter.

Adeoque; Si Pondera ſint æqualia; in ratione Altitudinum: Si Altitudines ſint æquales; in ratione Ponderum: Si Pondera & Altitudines, vel utraque ſint æqualia, vel ſint Reciprocè proportionalia; Æquipollent.

Et, univerſaliter, Virium Motricium quarumcunque Progreſſus Regreſſuſve, pollent in ratione, quæ, ex ratione Virium, & Progreſſuum Regreſſuúmve ſecundum lineam Directionis Virium æſtimatorum, componitur.

P. G :: *n*P. — P. G :: P.
D. — D. — D. — *m*D.
PD. — *n*PD. *n*G. — PD. — *m*PD. *m*G. Fig. 32, 33.

P. G :: *n*P. — P. G :: *n*P.
D. — *m*D. — *n*D. — D.
PD. — *mn*PD. *mn*G. — *n*PD. — *n*PD. G. Fig. 34, 35.

P. — *n*P. — P. — *n*P. — *n*P.
D. — D. — *m*D. — *m*D. — $\frac{1}{n}$D.
PD. G :: *n*PD. *n*G :: *m*PD. *m*G :: *mn*PD. *mn*G :: PD. G.

Puta; Si Grave ut P, per D deſcendens, valet ut G; etiam alterum P (cæteris paribus) tantundem deſcendens, valebit ut G alterum; tertium, ut tertium, *&c.* Adeóque *n*P, ut *n*G; in ratione Ponderum. per 7 cap. 1.

Item; Si Ponderis ut P, deſcenſus per D, valet ut G: ejuſdem Ponderis (cæteris paribus) per D alterum deſcenſus, tantundem valebit; adeoque ut alterum G: per tertium, ut tertium, *&c.* Adeoque per *m*D, ut *m*G; in ratione Altitudinum. per 7 cap. 1.

Si itaque Pondus P, per D descendens, valet ut G: etiam *n* P, per D descendens, valebit ut *n* G; Adeoque, per *m* D descendens, ut *m n* G; (ut ostensum est:) Hoc est; in ratione ex Ponderum & Altitudinum rationibus compositâ, (per 2 cap. 1.) Quod erat probandum.

Quæ quidem rationes si sint Reciprocæ; quæ ex his componitur, Æqualitas est, *&c.* per 4, 6, cap. 1.

Similiter de Ascensu judicandum.

Et, in aliâ quâuis Vi Motrice, similiter ostendetur.

SCHOLIUM.

POsset quidem hæc, & subsequentium Propositionum aliquot, in plures distrahi, & similiter demonstrari, atque in capite præcedente factum est, in Prop. 13, 14, 15, 16. item, 17, 18, 19, 20. item 22, 23, 24, 25. Quum autem illud semel iterúmque, perspicuitatis gratiâ, factum fuerit; malebam tum hic tum in sequentibus succinctius agere, ne videam vel nauseam creare, vel propositionum numerum præter necessitatem in immensum augere velle. Ob quam rationem etiam Corollaria Propositioni principali toties subnectere visum est.

Ex hac autem Propositione (quæ Descensuum Ascensuúmque *Magnitudinem*, ex Gravium Pondere simul & Motuum Altitudine, æstimat,) potissimum dependet, de Machinarum quarumvis Potentiâ, judicium.

PROP. VI.

Conjunctis invicem Descensu & Ascensu; Si præpollet Descensus, pro Descensu simpliciter habendi sunt: Pro Ascensu verò, si Ascensus præpollet: (Et quidem utrobique tanto, quanta est Præpollentia:) Sin æquipollent, pro Neutro.

Si verò vel plures Ascensus conjuncti sint, vel plures Descensus: tantundem simul pollent atque eorundem summa.

Idemque motis ab aliâ Vi Motrice, mutatis mutandis, accommodabitur.

Patet ex Prop. 8. cap. 1.

PROP. VII.

Comparata Gravia, cæteris paribus, eâ ratione Ponderant (Descensum moliendo, aversando Ascensum,) quâ pollent eorum si moveantur Descensus Ascensúsve; sive, quæ ex Ponderum & Altitudinum rationibus componitur.

Idémque aliis motibus, mutatis mutandis, accommodabitur.

PUta; Tantundem ponderant Unum Pondo per Duo Spacia, atque Duo Pondo per Unum Spacium, sursum deorsúmve (eodem tempore) ferenda. (Quippe utrobique Duplum Unius Pondo per Unum Spacium.) Adeoque Duo Pondo per Duo spacia, quadruplum ponderabunt, Unius Pondo per Unum Spacium eodem tempore ferendi. Et in reliquis proportionibus similiter.

Cùm enim eâ ratione plus ponderant Gravia, cæteris paribus, quâ sunt majoris Ponderis, (per 1 hujus;) quâque plus Descenditur, (per 4 hujus;) Eâ ratione ponderabunt (utriusque ratione habitâ) quâ pollent eorum (secundum utramque considerationem) Descensus Ascensúsve: Hoc est, (per 5 hujus,) eâ quæ ex Ponderum & Altitudinum rationibus componitur. Quod erat demonstrandum.

Exempli gratiâ: Si duo Gravia (seu Vires Motrices) V, P, sint, vel Pondere æqualia & (pro situ quo ponuntur) æqualiter (dum moventur) aut Descensura aut Ascensura; vel, quod Gravius est, in eâdem ratione (eodem tempore) minus sit Descensurum; Æquiponderabunt: (propter Descensus Ascensúsve æquipollentes, per 5 hujus.) Sin alterius præpolleat, quæ ex Pondere & Altitudine oritur, Descensûs magnitudo: præponderabit illud; atque in eâdem ratione cum illâ præpollentiâ. Puta; Descensus Ponderis 2 P per Altitudinem 3 D, cum Descensu Ponderis 3 P per Altitudinem 2 D comparatus; Æquipollebit,) propter $2 \times 3 = 3 \times 2$;) adeóque quæ sic movenda sunt, Æquiponderabunt. At, Descensus Ponderis 2 P per Altitudinem 4 D, Descensui Ponderis 3 P per Altitudinem 2 D, præpollebit, (propter $2 \times 4 > 3 \times 2$;) Adeóque, quod sic movendum erit, præponderabit. Et in aliis similiter. Fig. 37, 38, 39, 40.

PROP.

PROP. VIII.

Si (cæteris paribus) ad duos (pluresve) motus æqualiter propendeat Grave (vel ex pluribus conjunctis Gravibus Fig. 36. Aggregatum,) neque ad alium ullum magis propendeat: Nullo feretur.

Sin ad unum aliquem, præ cæteris, maximè propendeat: illo (nisi aliàs impeditum) feretur.

Idem intellige, mutatis mutandis, de quâcunque Vi Motrice.

PUtà: Si ad A, B, æqualiter propendeat Grave G: neutrà feretur. Nam (per 12 Cap. 1.) propensiones contrariæ (siquidem utrinque simul ferri non possit) cùm sint Æquales, se mutuò perimunt. (Et similiter si ad plures adhuc motus æqualiter propenderet.) Sed nec alio feretur motu (siquis sit) cui minus propendeat; putà ad C. Nam (per eandem) huic præpolleret utravis duarum ad A, B, Propensio; & grave præriperet. Adeóque, si ad nullum magis propendeat, nullo feretur. Quod erat primò probandum.

Sin ad unum aliquem motum, puta ad D, quàm ad cæterorum ullum, magis propendeat: singulis hæc præpollebit; Adeóque (nisi aliàs impeditum) hàc feretur Grave: (per eandem 12 Cap. 1.) Quod itidem probandum erat.

SCHOLIUM.

AT interim, nequis metuat, imperfectam esse hanc Demonstrationem, eò quod, utut conatus seu Propensio ad D uni cuivis ex reliquis præpolleat, non inde tamen sequatur, quod præpolleret itaque & simul omnibus, cùm tamen omnes huic adversentur: Monendum hîc erit; non cum simul omnibus reliquorum comparandum esse conatum hunc ad D, sed cum singulis sigillatim; eò quòd non simul omnibus illis ferri possit, sed nec pluribus simul, sed uno saltem ex omnibus: Adeóque, conatus ad D, si sigillatim singulis præpolleat, omnibus præripiet grave.

Secus

Secus autem omnino eſt, ubi plures conſentientes conatus, uni alicui adverſantur. Putà, ſi plura Minora gravia, uni alicui (ſingulis quidem, ſed non omnibus) Majori, in oppoſitâ Libræ lance, contra-ponderarent. Quamquam enim Majus illud in unâ lance, reliquorum ſingulis in alterâ, præpolleat; Minora tamen hæc ſimul ſumpta, Libram in ſuas partes trahent; Quia, cùm ſimul omnes illi conatus minores in eundem motum conſpirant, pro Conjunctis habendi ſunt conatibus, non Diſparatis. Contrà quàm hìc obtinet.

Quódque hìc monemus, alibi (ſiqui ſimiles occurrunt caſus) intelligendum erit.

PROP. IX.

Gravis in ſuperficie Sphæricâ, Terræ concentricâ, utcunque moti, nullus eſt vel Deſcenſus vel Aſcenſus.

Idem dicendum eſt, de Plano Horizontali; dummodo, propter Parvitatem plani & immenſam à Centro diſtantiam, quaſi cum illâ Sphæricâ ſuperficie coincidens habeatur.

Idem intellige, mutatis mutandis, in aliâ Vi motrice.

Fig. 30.

$CB = CD.$ $CB - CD = 0.$

PUta; Si à B ad D, in ſuperficie Sphæricâ, Terræ concentricâ, moveatur grave: (vel etiam in Horizontali Plano, quouſque hoc cum illâ coincidens habeatur;) Nihilo fit vel Propius vel Remotius à Centro Terræ; (propter æquales CB, CD, Sphæræ radios:)

Adeoque (per 3 hujus) non vel Deſcendit quicquam vel Aſcendit ſic latum Grave. Quod erat propoſitum.

Idem in motis ab aliâ Vi Motrice, mutatis mutandis, ſimiliter oſtendetur. Nempe nihil vel profeciſſe, vel contrà, Vim illam; dummodo ſecundum Vis Motricis Directionem nihil vel proceſſerit vel receſſerit, utcunque aliàs moveatur.

PROP. X.

Gravis per rectam Horizonti perpendicularem Descendentis, Descensus tantus est quanta est ea recta per quam fertur. Et similiter Ascendentis Ascensus.
Adeóque Obliquè vel Descendentis vel Ascendentis; tantus quanta est perpendicularis æquè alta.
Idem intellige, mutatis mutandis, de aliâ Vi motrice.

Fig. 30.

$$ABC - BC = AB = ABC - DC.$$
$$DC - EC = BEC - EC = BE.$$

PVtà: Si in ABE rectâ, quæ ad Horizontalem rectam HB perpendicularis sit, (adeoque ad C centrum Terræ rectà tendit, per 19 Elemen. 3.) feratur Mobile, ab A vel E, ad B: Manifestum est, tantò vel propius vel remotius à Centro fieri, quanta est ipsa AB, vel EB, recta quâ fertur, (per 3 Elemen. 1.) Adeóque (per 3 hujus) tantundem vel Descendere vel Ascendere. Quod erat propositum.

Adeóque; Si utcunque Obliquè, ab A vel E, feratur ad D punctum, quod tantundem atque ipsum B à Centro distet: tantundem utrobique vel Descendisse vel Ascendisse censendum erit; per 3 hujus: Hoc est (per modò demonstrata) quanta est AB, vel EB, perpendicularis æquè alta. Quod item probandum erat.

Idem, mutatis mutandis, de motis ab aliâ Vi, similiter ostendetur.

PROP. XI.

Gravis, per rectam utcunque declivem descendentis, Descensuum Altitudines sunt emensis Longitudinibus proportionales. Atque Ascensuum similiter.
(Intellige; Dummodo planum Horizontale, cum superficie Sphæricâ, Terræ concentricâ, coincidens habeatur. Et similiter in sequentibus aliquot, quæ hinc dependent.)
Idem de alia Vi, mutatis mutandis, intelligendum.

FO.

FO. FL :: FP. FD.

SIt P O, Horizontalis recta; F P, ad Horizontem perpendicularis; F O, inclinata recta, per quam vel Descendit vel Ascendit Grave; Et, rectæ P O, parallela D L, (trianguli crura secans proportionaliter, per 2 Elem. 6.) Ergo: ut F O, ad F L, Longitudo ad Longitudinem; sic F P, ad F D: Hoc est, (per 3 & 10 hujus,) Descensus ad Descensum (si Deorsum,) vel (si sursum moveatur) Ascensus ad Ascensum. Quod erat propositum. Fig. 41.

Idem, mutatis mutandis, de motis ab aliâ Vi quâvis, similiter ostendetur.

SCHOLIUM.

SUpponit hæc Demonstratio: Horizontalis rectæ PO, puncta omnia, ut P, O, æquè-alta: adeoque P O rectam, quasi in superficie Sphæricâ, Terræ concentricâ, jacere. Sin ἀκριβῶς loquamur, pro rectis P O, D L, substituendi sunt arcus circulares, Terræ concentrici; (& quidem pro singulis in F O punctis, mutabitur Perpendiculi positio, & inclinatio declivis rectæ:) Sed tantillum à Rectis differunt Arcus illi, ut pro Rectis tutò usurpari soleant, ob causas ad Def. 15. Cap. 1. memoratas.

PROP. XII.

Rectis, sive ad Horizontem perpendicularibus, sive utcunque inclinatis; Si per Æquales Longitudines feratur Grave: Descensuum Ascensuúmve Altitudines, sunt Longitudinibus portionum æquè-altarum reciprocè proportionales.

Si, per Inæquales Longitudines ferantur: Descensuum Ascensuúmve Altitudines, sunt in eâ ratione quæ componitur ex ratione Longitudinum per quas fit motus, & reciprocâ Longitudinum portionum æque-altarum.

Adeóque; Si emensæ Longitudines, sint Longitudinibus æquè-altis proportionales: Descensus Ascensúsve sunt æquales.

Idem intellige, mutatis mutandis, de aliâ Vi motrice.

$$FO . FP :: FL = FP . FD :: FK . FM.$$

Fig. 41.

$$mL . L :: M = D . \frac{1}{m}D :: nM . \frac{n}{m}D.$$

SIt FP, ad Horizontem recta; FO, inclinata: per FP, descendat P Grave: in FO, grave L; per Longitudinem FL, rectæ FP æqualem. Jungatur PO Horizontalis recta, (abscindens portiones FP, FO, æquè-altas:) &, huic parallela, LD. Descensus itaque gravis P, tantus est quanta recta FP; gravis L, quanta est recta FD; (per 10 hujus.) Estque (per 2 Elem. 6.) ut FO (longitudo portionis obliquæ,) ad FL, vel huic æqualem FP, (longitudinem perpendiculi æque-alti:) Sic, vice versâ, FP (altitudo Descensûs, in perpendiculo descendentis, P,) ad FD (altitudinem descensûs, obliquè descendentis L, per longitudinem æqualem.) Idemque de Ascendentium per easdem LF, PF, Ascensibus, similiter ostendetur. Quod erat probandum.

Adeóque; Si per Inæquales Longitudines ferantur; (putà, per FP; & $FK = \frac{1}{2}FP$;) erunt Descensus Ascensúsve, in ratione quæ ex illâ, & longitudinum per quas feruntur, compositâ; (nempe $FM = \frac{1}{2}FD$.) per præced. Quod porro probandum erat.

Ideóque; (per 6 Cap. 1.) Si rationes illæ, (nempe, reciproca portionum æque-altarum, & directa longitudinum emensarum,) sint invicem reciprocæ; Hoc est, si longitudines emensæ, sint longitudinibus æque-altis proportionales; (Putà, FL, FD, longitudines emensæ, ipsis FO, FP, longitudinibus æque altis, proportionales:) Descensuum Ascensuúmve Altitudines, æquales erunt. Quod erat ultimò probandum.

Idem viribus aliis motricibus facilè accommodabitur.

PROP. XIII.

Gravium, per rectas utcunque ad Horizontem inclinatas, Descensus, in eâ ratione pollent, quæ componitur ex rationibus & ponderum, & Longitudinum emensarum, & Reciprocâ Longitudinum æque-altarum. Atque Ascensus similiter.

Idémque motis ab aliâ Vi motrice facilè accommodabitur.

Valent

VAlent enim (per 5 hujus) in ratione ex Ponderum & Altitudinum rationibus composità: Hoc est, (per præcedentem,) ex rationibus Ponderum, & Longitudinum emensarum, & Reciproca Longitudinum æque-altarum. Quod erat probandum.

PROP. XIV.

Rectarum Declivitas Longitudine æqualium, est Altitudinibus proportionalis.

Rectarum Declivitas æque-altarum, est Longitudinibus Reciprocè proportionalis.

Adeóque; Rectarum quarumvis Declivitas, est in ea ratione, quæ ex ratione Altitudinum & Reciprocâ Longitudinum componitur.

Atque; Si Rectarum Longitudines sint Altitudinibus proportionales; earum Declivitas æqualis est.

Quod & aliis perinde ac gravium motibus accommodabitur.

$$\frac{A}{L}, D. \quad \frac{A\ A}{L}, \frac{2}{1}D. \quad \frac{A}{L\ \ L}, \frac{1}{2}D. \quad \frac{A\ \ A\ \ A}{L\ L}, \frac{3}{2}D. \quad \frac{A\ \ A}{L\ \ L}, \frac{2}{2}D = D.$$

$$\frac{A}{L}.D :: \frac{mA}{L}.mD :: \frac{A}{nL}.\frac{1}{n}D :: \frac{mA}{nL}.\frac{m}{n}D :: \frac{mA}{mL}.\frac{m}{m}D = D.$$

Fig. 42.

A Puncto F, ducantur æquales rectæ quotlibet F P, F O, F B, quæ continuatæ occurrant Horizontali Rectæ (vel Plano saltem) in punctis P, S, T.

Rectarum F P, F O, F B, longitudine æqualium, Declivitates, sunt earum Altitudinibus, putà, F P, F Q, F R, proportionales. per Def. 17, 18. Cap. 1.

Rectarum F P, F O S, F B V T, æque-altarum, Declivitates, sunt earum Longitudinibus, hoc est, ipsis F P, F S, F T, Reciprocè proportionales. per easdem Def. 17, 18. Cap. 1. Quæ erant demonstranda.

(Quas

(Quas quidem rationes easdem esse; adeóque geminam quæ habetur Def. 18. Cap. 1. *Majoris Declivitatis* definitionem tantundem valere, (& *Minoris* similiter;) hinc constat: Quoniam; Sive sumantur rectarum F P, F O S, portiones longitudine æquales F P, F O, quarum Altitudines sint F P, F Q; Sive portiones æque-altæ F P, F S, quarum longitudines reciprocæ sunt F S, F P, hoc est F S, F O; Eadem utrobique provenit Declivitatum ratio: Nam, ut F P, ad F Q; sic est F S ad F O: per 2 Elem. 6. Similiter, in rectis F P, F B T; portionum æqualium F P, F B, altitudines F P, F R; & portionum æque-altarum F P, F T, longitudines reciprocæ F T, F P, hoc est F T, F B; proportionales sunt: per 2 Elem. 6. Item; rectarum F O, F B V, portionum æqualium F O, F B, altitudines F Q, F R; & portionum æque-altarum F O, F V, longitudines reciprocæ F V, F O, hoc est F V, F B; proportionales sunt: per 2 Elem. 6.)

Ideóque; rectarum, putà F P, F V, Declivitates; sunt in ratione F P ad F R; nempe in ratione quæ componitur, ex Altitudinum ratione, putà F P ad F Q; atque F Q ad F R, sive F V ad F B, hoc est F V ad F P, reciprocâ Longitudinum. Quod itidem demonstrandum erat.

Adeóque (per 6. Cap. 1.) Si rationes illæ (directa altitudinum, & reciproca Longitudinum) sint invicem reciprocæ; hoc est, si Altitudines sint Longitudinibus directè proportionales; Declivitates sunt æquales. Quod erat ultimò demonstrandum.

SCHOLIUM.

NOtandum hìc; Dummodo Terræ Centrum intelligatur tamquam infinitè distans; eadem est ubique ejusdem rectæ, putà F B T, Declivitas; propter parallelam Perpendiculorum positionem: Si verò intelligatur ut in certâ distantiâ finitâ; varia est in singulis punctis Declivitas: Quippe cùm Perpendicula omnia in Centro coëant; quamquam eadem sit directio Motûs, Motricis tamen vis directio subinde mutatur: adeóque alia erit illius ad hanc Positio, aliúsque ad perpendiculum Angulus, puta in B quàm in F puncto: Quæque ex præsenti Figurâ & demonstratione colligitur Declivitas, soli F puncto convenit; aliáque pro aliis, ut B, V, T, punctis, similiter colligenda erit; demissis inde ad Terræ Centrum Perpendiculis.

PROP. XV.

Lineæ curvæ Declivitas, in ſingulis reſpectivè punctis; eadem eſt atque rectæ ibidem contingentis. Et ſuperficiëi curvæ; eadem atque ibidem contingentis Plani.

Quod aliis perinde atque Gravium motibus accommodabitur.

SIt FP, perpendiculum; FC, curva; FT, recta contingens. Cùm eandem curvam in variis ſui partibus variè declivem eſſe conſtet, (decliviorem alibi, alibi minùs declivem:) Eandem dico, in F puncto, declivitatem FC curvæ, atque contingentis rectæ FT, cenſendam eſſe. Cùm enim CFT angulus contactûs (ſive Circulorum, per 16 Elem. 3. ſive Conicarum ſectionum, per 32 Lib. 1. *Apollonii*; ſive, quod ſimiliter oſtendetur, curvarum quarumvis;) ſit vel nullius magnitudinis, (quod nos, peculiari Tractatu, *De Angulo Contactûs*, multis oſtendimus;) vel ſaltem, infinitè exiguæ, (utpote qui ſit vel minimo poſſibili rectilineo minor; quod apud omnes in confeſſo eſt:) eadem erit, in puncto F, Directio, ſive FC curvæ, ſive FT contingentis rectæ; (ſaltem, differentia quávis aſſignabili minor erit:) Adeóque, & eadem utriuſque in illo puncto Declivitas. Quod erat propoſitum. Fig. 43.

Idémque de ſuperficiëi curvæ punctis ſingulis, ſimiliter oſtendetur.

PROP. XVI.

Si ad duos motus ita ſit comparatum Grave, cæteris paribus; ut, altero ſi feratur, Deſcenſurum ſit; Aſcenſurum, ſi altero: Eà præponderat, quà Deſcenſurum eſt.

Si, altero latum, plus Deſcendet; altero, minùs: Eà præponderat, quà plus deſcendet.

Si, altero, plus Aſcendet; altero, minùs: eà minùs Repugnat, quà minùs Aſcendet.

Sin

Sin æqualiter, utrovis feratur, vel Descendet, vel Ascendet: Æquiponderat utrinque.

Contrà verò: Quà, cæteris paribus, præponderat, vel minùs Repugnat; Eà vel plùs Descensurum est, vel Ascensurum minùs: Sin neutrà; Æqualis utrinque futurus est vel Descensus vel Ascensus.

Fig. 31. *Puta; Si in puncto G sit constitutum Grave; vel per G A, vel per G B ferendum: sitque G A, cæteris paribus, vel magis deorsum, vel minùs sursum, quàm G B: Per illam potiùs quam per hanc feretur. Sin æqualiter; neutrà propendet magis. Et contrà.*

Sequitur ex 4 hujus.

PROP. XVII.

Eà præponderat Grave, cæteris paribus, & in eâ ratione, quâ motus est Declivior: Quâque est Acclivior, magis repugnat.

Adeóque, omnium maximè in perpendiculo.

(Quâre & Ponderis simpliciter tanta Vis censeri solet, quantam in Perpendiculo habet.)

Quáque æqualiter vel Declivis est vel Acclivis, æqualiter vel propendet vel Repugnat.

Súntque hæc perinde vel Gravium motibus, vel aliis, accommodanda.

Fig. 42. *Puta; In rectis FP, FOS, FBT; eâ ratione ponderat Grave, quâ sunt Declives illæ rectæ. Est enim Declivitas in Reciprocâ ratione Longitudinum æque-altarum; sive, quod eodem recidit, in Directâ Altitudinum æque-longarum; (per 14 hujus.) Hoc est, in ratione Descensuum (Ascensuúmve) cæteris paribus; (per 10, 12, hujus:) Adeóque, in ea ratione ponderant; per 4 hujus. Quod erat propositum.*

Quare &, in perpendiculo, omnium maximè: ut quæ ex æque-altis Brevissima est; & ex æque-longis Altissima.

Et

Et propterea (quod Definitionis instar esto) tantam Ponderis cujusvis Vim censemus, quantam in Perpendiculo habet.

Quodque de F T rectâ ostensum est; idem de curvæ F C puncto F, intelligendum est. Utpote cujus Declivitas, adeóque Tendentia deorsum, eadem est atque Contingentis rectæ F T: (per 15 hujus:) Adeóque & gravitatio, per 4 hujus. Fig. 43.

SCHOLIUM.

MOnendum tamen est: In rectarum, ut F T, punctis singulis, eandem intelligendam esse gravis Ponderationem, dummodo intelligatur Centrum Terræ tamquam infinitè distans; adeóque, propter Perpendiculorum quasi parallelismum, eandem ubique Declivitatem. Si tamen (quod ad Prop. 14 monuimus) Centrum intelligatur in certâ distantiâ finitâ; mutabitur, in singulis punctis, rectæ Declivitas; adeóque & Gravis, in eo puncto, ponderatio. Quo casu; quod de Curvâ modò dictum est, idem de rectâ pariter dicendum; Nempe eam esse Gravis, *in recta* F T *puncto* F, Ponderationem, quæ ex rectarum F T, F P, reciprocâ ratione colligitur: Atque in aliis punctis similiter judicandum. Quippe, ut in curvis, sic Rectis, pro mutata in singulis punctis Declivitate, mutabitur & Ponderatio.

Verùm cùm Centrum soleat, tanquam infinitè distans, reputari; & Perpendicula parallela: tutò solent (quoad sensum) & Rectæ in singulis sui punctis pariter Declives æstimari. Quamquam (quod & sub'nde antea monuimus,) si tantæ longitudinis Rectæ, Planáve tantæ amplitudinis, consideranda veniant; ut notabile hinc discrimen emergat; etiam hujus mutatæ Declivitatis, adeóque & Ponderationis, habenda erit ratio.

PROP. XVIII.

Si Grave, ubivis in eodem Perpendiculo, vel Incumbat, vel Dependeat, vel in ipso sustentationis puncto intelligatur, (vel cum ipso ita utcunque connexum, ut vel simul quiescant, vel simul æqualiter moveantur contrariæ vires; altera secundum, altera contra directionem suam:) Quò sustineatur, requiritur, æqualis Ponderi, vis Impediens; atque hæc sufficit.

Idémque intellige, mutatis mutandis; de quacunque Vi motrice.

Fig. 44. INtelligatur Pondus (seu Vis quælibet Motrix) in P; atque ibidem vis Impeditiva motûs V. Si Vis Ponderis (seu Motiva) Major sit; præpollebit: adeóque descendet (sive secundum Directionem suam feretur,) non sustinebitur. Si Æqualis, æquipollebit: adeóque sustinebitur Pondus. (per 11. Cap. 1.) Unde constat propositum. (Si Vis Impediens sit major; eò fortiùs impediet: Non requiritur tamen; quia æqualis sufficit.)

Idem ostendetur; Si ubivis in eodem perpendiculo (sive Directionis Lineâ) constituatur P; dummodo quantum Descendit (sive secundum directionem suam movetur) P, tantum deprimatur (seu contra directionem suam revellatur) contraria Vis V. Nam (per 5 hujus) æqualium virium æquales progressus æquipollent: Adeóque, cùm sint contrariæ, (putà, secundum directionem suam altera, altera contra suam,) propter Impedimentum Momento æquipollens, non fit motus; (nedum si Impedimentum majus sit:) Fit autem; si minùs valet impedimentum, per 11 Cap. 1.

Idem ostendetur; Si utcunque cum Pondere, seu Vi Motrice, ita Fig. 45. connectatur Vis Impediens, ut contrarii motus (alter secundum, alter contra Virium Directionem,) sint æquales. Putà; Si intelligatur P Pondus, ex funiculo P F (brevi an longo perindè est) liberè dependens, qui orbiculo circumpositus ex adversa parte pertingat ad V; ibíque æquale Pondus seu Vis æqualis applicetur; ita quidem ut, descendente P pondere, tantundem ascenderet, vel contra directionem suam revelleretur, pondus seu Vis V; (sive contrà; ascendente P, tantundem descenderet V, *&c.*) Nam (per 5 hujus) æqualium Virium, æquales progressus, æquipollent: Adeóque, contrariæ cùm sint, non fiet motus; fiet autem, si Vis Impediens minor sit. Per 11 Cap. 1.

SCHOLIUM.

HInc sequitur; Gravia ex filo longiori an breviori dependentia, tantundem ponderare: Item, propius an remotius distent quæ incumbunt pondera, aut dependent; dummodo in eodem perpendiculo.

Hinc etiam sequitur; In construendis Machinis; Vectes, Juga, Fulcra, Funes, cæteráque Machinarum armamenta, tantæ firmitudinis intelligenda esse singula, ut oneri quod respectivè sustinent sint ferendo paria. Alioqui citiùs rumpetur Machina, vel incurvabitur, quàm perficietur expectatus motus.

PROP.

PROP. XIX.

Gravia, cæteris paribus, in ea ratione gravitant, quæ componitur ex rationibus Ponderum & Declivitatum; (ſive Ponderum & Altitudinum rectarum longitudine æqualium; vel Ponderum & reciprocâ Longitudinum rectarum æque-altarum.)

Adeóque; Si Pondera ſint Æqualia; in ratione Declivitatum: Si Declivitates ſint Æquales; in ratione Ponderum: Si Pondera ſint Declivitatibus reciprocè proportionalia, (ſive proportionalia Longitudinibus æque-altis;) æqualiter gravitant.

Idémque aliis Viribus Motricibus accommodabitur.

P. G ::	nP. nG ::	P. mG ::	nP. mnG ::	nP. G.
D.	D.	mD.	mD.	$\frac{1}{n}$D.
PD.	nPD.	mPD.	mnPD.	PD.

PUta: Si Pondus P, in Declivitate D, gravitet ut G: Pondus nP, in eadem declivitate, gravitabit ut nG, (per 1 hujus:) Adeóque in Declivitate mD, gravitabit ut mnG, (per 17 hujus:) Hoc eſt, in ratione ex Ponderum & Declivitatum rationibus compoſitâ, (per 2 Cap. 1.) Hoc eſt, (per 14 hujus,) ex Ponderum & Altitudinum rectarum Longitudine æqualium, vel ex Ponderum & reciprocâ Longitudinum æque-altarum. Quod erat probandum.

Corollaria conſtant, ex 4 & 6 Cap. 1.

Alia Demonſtratio.

Idem ſic aliàs demonſtrabitur. In F P ad Horizontem rectâ; ſit Pondus D; & huic æquale L, in inclinatâ F O æque-altâ. Et connecti intelligantur Pondera D, L, filo flexili D F L, punctum F immobile ambiente: ut moto D, verſus P, tantundem moveatur L verſus F; & contrà. Erit, ut F P ad F O; puta ut m ad 1; ſic vice verſâ, Deſcenſus Aſcenſúſve ponderis L in hac, ad Deſcenſum Aſcensúmve ponderis æqualis D in illa; (per 12 hujus:) adeóque & (quæ huic proportionalis eſt, per 5 & 17 hujus,) Gravitatio Ponderis in L, ad æqualis ponderis D gravitationem. Hoc eſt, ſi D gravitat ut G; æquale pondus L, gravitabit ut mG; hoc eſt, in reciproca Longitudinum æque-altarum; ſive in Declivitatum ratione. Fig. 41.

Adeóque; Si Inæqualia sint L, D, pondera; Puta L = *n* D: gravitabit illud L, ut *m n* G: (per 1 hujus:) Hoc est, in ratione quæ ex Ponderum & Declivitatum rationibus componitur; sive ex ratione Ponderum & reciprocâ Longitudinum æque-altarum.

Quapropter; Si Pondera sint Declivitatibus reciprocè proportionalia, sive Proportionalia Longitudinibus æque-altis; æquè gravitant, per 6 Cap. 1. Quæ erant demonstranda.

PROP. XX.

Si, circa Punctum quodvis (extra Terræ Centrum) in Horizontali rectâ, ut Centrum, Recta linea, manente uno extremo, altero describat Circuli peripheriam, in plano ad Horizontem sive recto, sive utcunque inclinato: Altissimum peripheriæ punctum, illud est, quod supra Horizontalem rectam est in rectâ ad illam perpendiculari; Humillimum, illud quod est in eâdem perpendiculari infra Horizontalem rectam: Punctorum verò in peripheriâ intermediorum; illud Altius est, quod est supremo propius; Inferius, illud quod est propius infimo, seu à supremo remotius: Quæ autem æqualiter utrinque vel à summo vel ab imo distant; sunt æque-alta. Idem, mutatis mutandis, aliis motibus accommodabitur.

Fig. 46. Circa Punctum F (quod Terræ Centrum non sit) in Horizontali rectâ AB, (cui ad rectos angulos insistit SFP recta,) conversa recta FA intelligatur peripheriam ASBP describere, in plano ad Horizontem vel recto vel utcunque inclinato. Erit, inquam, peripheriæ punctum Altissimum, S; Infimum, P: Intermediorum verò, ut G, H; quod propius ab S distat, ut G, Superius; quod propius à P, ut H, inferius; Quæque æqualiter vel ab S, vel à P distant; puta G, G; vel H, H; æque-alta.

Sit primum ASBP peripheria, in plano ad Horizontem recto: Adeóque Centrum Terræ in eodem plano, (per 19 Elem. 3.) putà, in C, extra Circulum. Ductis, ab assignatis punctis, lineis rectis, in C Terræ Centro coëuntibus: constabit propositum; per 8. Elem. 3.

Sin

Sin tantæ magnitudinis intelligatur Circulus A S B P, ut ad ipsum Terræ Centrum, vel ultra, pertingat; sitque C, verbi gratiâ, vel intra Circulum, vel in ipsa peripheria. Constabit propositum, per 7 Elem. 3.

Sit deinde, Circuli planum A S B C non ad Horizontem rectum, sed utcunque inclinatum: Adeóque nec Centrum Terræ in eodem Circuli plano, puta in C; sed extra planum, ut in K: Unde, ad obliquum Circuli planum, duci intelligatur K C perpendicularis, (punctum C, omnium in obliquo Circuli plano punctorum, proximum ad Terræ Centrum, adeóque omnium infimum designans.) Et jungantur tum S C, G C, H C, P C; tum S K, G K, H K, P K. Ostendetur, ut prius, (sive contingat C intra vel extra Circulum,) omnium ad C ductarum, longissimam esse S C; brevissimam, P C; item G C, longiorem quam H C; æquales autem tum G C, G C; tum H C, H C. Adeóque, sumptis quadratis; Quadratum S C, maximum; P C, minimum; G C, majus quàm H C; Quadrata G C, G C, item H C, H C, invicem æqualia. Ideóque, addito communi augmento, quadrato C K; erunt quadratorum S C, C K, aggregatum, hoc est (per 47 Elem. 1.) quadratum S K, omnium maximum; quadratorum P C, C K, hoc est quadratum P K, minimum; quadratorum G C, C K, hoc est quadratum G K, majus quàm quadratorum H C, C K, hoc est quadratum H K; quadratorum G C, C K, & G C, C K, hoc est quadrata G K, G K, invicem æqualia; & similiter, quadratorum H C, C K, & H C, C K, hoc est quadrata H K, H K, invicem æqualia. Ergo &c, sumptis lateribus; Recta S K, omnium ad K ductarum, maxima; P K, minima; G K, longior quàm H K; & G K, G K, item H K, H K, invicem æquales. Adeóque, punctum S, omnium à Terræ Centro Altissimum; P, Infimum; G, altius quàm H; & G, G, vel H, H, æquè alta. Quod erat propositum.

Alia Demonstratio.

Idem ostendetur, Si intelligatur Centrum Terræ tanquam infinitè distans. Nam, ductis à punctis S, P, G, H, ad subjectam rectam Horizontalem quamvis perpendicularibus: Si planum Circuli sit, ad Horizontem Rectum; constabit propositum, ex Prop. 15. Elem. 3. Fig. 47.

Si verò planum Circuli ad Horizontem sit Obliquum. Intelligantur ab assignatis punctis S, P, G, H, demitti ad planum Horizontale quodvis subjectum perpendiculares $S\sigma$, $P\pi$, $G\gamma$, $H\eta$; & ab iisdem punctis, ad communem planorum Horizontalis & Inclinati Sectionem, totidem ad angulos rectos, Ss, Pp, Gg, Hh: (& compleantur Triangula.)

Ostendetur

Ostendetur, (ex 10 Elem. 11.) has illis (propter similia triangula Sσ s, Pπ p, Gγ g, Hη h.) proportionales esse. Adeóque; quæ à communi Sectione *g s p h* longius distant puncta in obliquo plano posita, eadem ab illo Horizontali plano longius distabunt, eruntque (secundum perpendiculum) altiora. Ostenso igitur ut priùs (ex 15 Elem. 3.) à communi sectione *g s p h* (quæ ipsa est Horizontalis recta;) ostendetur etiam, ab ipso subjecto plano Horizontali *g s h γ σ*; punctum S, maximè; P, minimè; G, G, & H, H, æqualiter; & G, magis quàm H, distare. Unde constat propositum.

SCHOLIUM.

Quoniam (ut suprà monitum est aliquoties) consideratur Terræ Centrum nunc quasi infinitè distans, nunc autem tanquam in distantia finita; adeóque perpendicula, nunc ut parallela, nunc ut in puncto concurrentia. Visum est propositionem hanc secundum utramque suppositionem demonstrare.

Notandum interim in propositione disertè dici, *In plano ad Horizontem vel Recto, vel utcunque Inclinato*: Quoniam in Horizontali plano, hoc est, in plano Horizonti parallelo, nullum erit peripheriæ vel Altius vel Humilius punctum, sed æque-alta omnia.

PROP. XXI.

Descendens Grave, cæteris paribus, rectâ ad Horizontem Perpendiculari feretur: Ex obliquis verò, eâ potiùs quæ minùs est obliqua.

Ascendens; contrà.

Ponderat autem (pro variâ Ascensuum Descensuúmve obliquitate) in ratione Rectorum Sinuum, Inclinationis ad Horizontem, sive Complementi Obliquitatis.

Idémque aliis motibus accommodabitur.

Ostendetur enim (ex præcedente) rectarum longitudine æqualium, perpendicularem (ut FP) esse omnium altissimam; adeóque, & maximè declivem (per 14 hujus.) Hac igitur, præ cæteris feretur Descendens grave; contrà verò, Ascendens, per 17 hujus.

Ex

Ex obliquis verò, ut F O, F B; similiter ostendetur (ex præced.) illam quæ minùs est obliqua, Puta F O, altiorem esse; adeóque (per 14 hujus) & magis declivem. Ideóque (per 17 hujus) per hanc potiùs latum iri Descendens Grave; Ascendens, contrà. Fig. 42.

Utrobíque verò ponderat Grave (Descensum promovendo, adeóque Ascensum impediendo) in ratione F P, F Q, F R, altitudinum rectarum Longitudine æqualium F P, F O, F B, (per 14 & 17 hujus:) Hoc est (quod ex Trigonometricis constat) in ratione Sinuum rectorum, angulorum Inclinationis F P S, F O Q, F B R; qui sunt angulorum Obliquitatis P F P, P F O, P F B, complementa. Quod erat propositum.

PROP. XXII.

Grave, quatenus non impeditur; per rectam Horizonti perpendicularem descendet.

Idem intellige, mutatis mutandis, in aliis motibus.

DEscendet enim, quatenus non impeditur; per 2 hujus. Et, hac præ cæteris; per præcedentem.

PROP. XXIII.

Super impenetrabili Plano Horizontali constitutum Grave, vel superficie Sphæricâ, Terræ concentricâ; Gravitate suâ non movebitur.

Idem intellige, mutatis mutandis, quæcunque sit Vis motrix. Nempe quum planum est Directioni virium ad angulos rectos.

SIt, in B, Grave; impenetrabili Plano Horizontali H B O incumbens; vel superficiei Sphæricæ, quæ sit Terræ concentrica, D D B. Fig. 30. Manifestum est (propter æquales Sphæræ radios) nullum in ipsâ DDB Sphæricâ superficie punctum, (nedum quod supra ipsam est, aut etiam supra planum Horizontale,) propiùs à Terræ Centro distare, quàm ipsum B punctum. Adeóque; si nec superficiem illam (sive Sphæri-

cam, sive Horizontalem,) penetrare possit, (quod supponitur;) in nullas movendo partes, descendet, (per 3 hujus.) Cùm itaque (per Def. Gravitatis) non nisi Descensûs ergo, gravitate suâ moveatur grave, nec possit (per jam demonstrata) descendere: Non movebitur, gravitate suâ, sic constitutum Grave. Quod erat Demonstrandum.

SCHOLIUM.

IDem ostenderetur de Gravi, in B, superficiei concavæ incumbenti quæ in B tangat Horizontale planum; seu cujus punctum infimum sit ipsum B. Item, de convexâ Sphæricâ cujus Centrum sit ultra Centrum Terræ, quam tamen in B continget planum Horizontale; utpote cujus punctum infimum sit ipsum B. Idem verum est de superficie minoris Sphæræ quam sic contingat B: non autem ob hanc causam, quia punctum illud non sit reliquis altius, (est enim;) sed propter Prop. 8 hujus: quippe non est una aliqua declivitas, reliquis omnibus major.

Per *Impenetrabile planum*, &c. illud intelligimus, quod, eâ saltem quæ adhibetur Vi, non penetrabitur; utut Vi majore penetrari possit.

Notandum est hic porro; Dummodo, ob immensam Centri Terræ distantiam, & expositi plani parvitatem, intelligatur Horizontale planum, cum superficie Sphæricâ, terræ concentricâ, coincidere; adeóque ipsius puncta singula, quasi-æqualiter à Terræ Centro distare: perinde est, sive in B, sive in H, alióve Horizontalis plani HBO puncto, intelligatur Grave constitutum. Sin ἀκριβῶς consideretur; non erit illud, nisi unius B puncti respectu, planum Horizontale. Quare & in H constitutum grave, poterit ad B moveri gravitate suâ; utpote punctum inferius.

PROP. XXIV.

Super impenetrabili plano ad Horizontem sive recto, sive utcunque inclinato, constitutum Grave; nec aliàs impeditum; per illam Plani rectam descendet quæ est rectæ Horizontali ad angulos rectos, deorsum. Quæ quidem recta, in erecto plano, est ipsum *Perpendiculum*; in obliquo plano, *Perpendiculi succedaneum*, appello.

(Adeoque

(Adeoque; eadem est, Descensûs Gravis in Declivi plano, ipsiúsque Declivis plani, tum Declivitas, tum Obliquitas, & Inclinatio.)

Et, universaliter; in quâcunque superficie Declivi, illo præ cæteris ductu feretur (siquis sit) qui est reliquis omnibus Declivior.

Idem intellige, mutatis mutandis, de motis ab aliâ quâvis Vi motrice; Nempe secundum illam plani rectam feretur Mobile, (nisi aliàs impeditum,) quæ est ad angulos rectos illi rectæ quæ Lineam Directionis Virium ad angulos rectos secat.

Sit, in Declivis Plani puncto F, constitutum Grave; rectæque Horizontali AFB ad angulos rectos FP recta, in eodem Plano, deorsum. Ostendetur (ex 20 & 14 hujus) omnium quæ in illo plano sunt (nedum quæ supra planum) longitudine æqualium, ad F ductarum, Unicam FP rectam, maxime declivem esse. Adeóque (cùm, propter impenetrabile planum, ad illas infra Planum ne transeat, impediri intelligatur) per ipsam FP (per 17 & 5 hujus,) nisi aliàs impediatur, descendet Grave. Quod erat demonstrandum. Fig. 46, 47.

Idem aliis superficiebus accommodandum erit, pro re natâ; Nempe, cæteris paribus, illo semper ductu (siquis sit) latum iri Grave, qui est cæteris omnibus declivior: per 17 & 5 hujus. Sin talis nullus sit (reliquis omnibus declivior) ductus; non movebitur. per 8 hujus.

Alia Demonstratio.

Potest hoc idem demonstrari, ex Prop. 21. propter Obliquiorem alibi Descensum: hoc modo. Fig. 48.

In Declivis Plani PGOH puncto G, constitutum intelligatur Grave: Atque, in eodem plano, tum Horizontalis recta PG (nempe ea recta secundum quam Horizontale planum, per G transiens secat Declive planum,) tum huic ad angulos rectos GO: Indéque ad subjectum Planum Horizontale HOR, demissa perpendicularis GR: (Per quam itaque, nisi impedietur, descendet Grave; per 22 hujus.) Intelligatur autem, ob duritiem Declivi Plano subjectam, impediri nè penetret. Dico per GO descensurum Grave.

Cùm enim duo Plana Horizontalia, adeóque Parallela, alterum in HO, alterum in PG, secet idem declive planum PGOH (per constructionem:) erunt HO, PG, parallelæ rectæ. per 16 Elem. 11.

Item, propter PG rectam, rectis GO, GR, ad angulos rectos,

(per constructionem,) erit ad planum O G R recta, (per 4 Elem. 11.) Adeóque & (huic parallela) H O, eidem O G R plano recta erit, (per 8 Elem. 11.) rectísque O G, O R, ad angulos rectos; per 3 Def. Elem. 11.

Et, si Centro R S in plano H O R, ducatur per O, peripheria O S; eam contingens H O, extra peripheriam jacebit; per 16 Elem. 3.

Si itaque ad rectæ H O, aliud quam O, punctum quodvis T, ducatur G T recta, & R T jungatur; secabit hæc peripheriam; Putà in S. Et, junctâ G S, erit (propter G R ad planum Horizontale rectam; adeóque angulos G R O, G R S, æquales rectos; & R O, R S, æquales radios; rectámque G R communem) S G recta, æqualis rectæ O G; & angulus S G R æqualis angulo O G R; per 4 Elem. 1.

Est autem angulus T G R, major angulo S G R (parte sui,) ergo & (huic æquali) angulo O G R major est. Adeóque Descensus obliquior est per G T, quàm per G O.

Cùm igitur Grave, quàm potest rectà ad Centrum descendat, (per 21 hujus;) per G O potius quam G T feretur.

Atque similiter de aliis ejusdem Plani rectis ostendetur. Adeóque à fortiori, de rectis ultra planum, aut etiam curvis.

Ideóque (cùm nec Planum penetrare possit) per rectam G O (nisi alias impeditum) descendet Grave in G, (ut qui reliquis rectior est Descensus:) Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

HAnc Demonstrationem præcedenti subjungere visum est, propter ea quæ apud Mechanicorum Scriptores de Obliquitate Descensuum occurrunt, Angulíque Obliquitatis magnitudine. At priorem ego prætulerim, quæ ex Declivitate, hoc est, ex Altitudine rectarum longitudine æqualium, vel Longitudine æque altarum, dependet: tum ut simpliciorem; tum, præcipuè, quoniam quod ex Obliquitate hac oritur Gravitationis impedimentum, Augmento longitudinis Descensuum æque-altorum proportionale est; & non Obliquitatis Angulo; (quod ex jam dictis & post dicendis manifestum erit:) Adeóque illi potiùs, quàm huic, ut veræ causæ referendum.

Hinc autem sequitur; Eandem esse Descensûs Gravis in Declivi Plano, ipsiúsque Declivis Plani, ad Horizontem Inclinationem; (Nam, per Def 5 & 6, Elem. 11. Angulus G O R est Inclinationis Mensura, tum rectæ G O, tum plani P G O, ad Horizontem H O R:) Adeóque eandem utriusque tam Obliquitatem, tam Declivitatem. Nempe idem Obliquitatis Angulus O G R; eadémque Declivitas sive rectæ G O ad G R, ratio.

PROP.

PROP. XXV.

Obliquitas motûs, eâ ratione minuit Gravitationem, (adeóque Descensum impedit, adjuvat Ascensum;) quâ Longior est obliqua recta, illam determinans, quàm perpendicularis æque-alta; sive Secans Anguli Obliquitatis, quàm Radius.
Idémque aliis motibus accommodabitur.

Nam (per 17 hujus) Grave, pro variâ Declivitate, gravitat in ipsâ Declivitatis ratione; hoc est (per 14 hujus) in reciprocâ ratione rectarum æquè-altarum. Puta, quâ ratione longior est F S vel F T obliqua, quàm perpendicularis æque-alta; sive (quod in Trigonometricis dicitur) F S vel F T Secans Anguli Obliquitatis P F S vel P F T, quam Radius; Eâ minùs gravitat in F S vel F T ferendum grave, quam in F P. Quod erat probandum. Fig. 42.

Adeóque (per 17 Cap. 1.) in eâdem ratione minùs Descensum promovet, vel Ascensui repugnat; sive (quod eodem recidit) in eâ ratione Descensus Obliquitate impeditur, & facilitatur Ascensus. Quod itidem probandum erat.

PROP. XXVI.

Obliquatio Plani in quo fit Motus; in eâdem ratione minuit omnium in illo ferendorum Gravitationem: eâ nempe quam ipsa Plani Obliquitas postulat.
Et in aliis motibus similitèr.

Sit in Obliquo Plano G O T, recta quævis G T. Atque à puncto G, demittatur, ad Horizontale Planum T O R, perpendicularis G R. Atque, ad communem Planorum intersectionem T O normalis G O, (ut sit G O R Inclinatio Plani, per Def. 6. El. 11. & O G R Obliquitas.) Si igitur intelligatur G O T planum, super Horizontalem rectam O T erectum esse; erit utriusque rectæ G O, G T, communis Fig. 48.

Altitudo G O: In eodem verò Plano Obliquato, Communis Altitudo est G R. Ideóque; quâ ratione G R brevior est quàm G O, (hoc est, Radius quàm Secans Anguli Obliquitatis,) Eâdem ob Plani Obliquationem minuitur Altitudo (adeóque Declivitas, & Gravitatio, per 14 & 17 hujus) sive per G O, sive per G T, ferendi Gravis. Quod erat probandum.

PROP. XXVII.

Grave, situ Declivi ferendum; sponte suâ movebitur: Situ Horizontali (sive secundum Superficiem Sphæricam Terræ concentricam;) Vi quantumvis exiguâ: Situ Acclivi; eâ Vi movebitur quæ Impedimento ex Acclivitate (cum Pondere comparatâ) orto præpollet.

Idem aliis motibus accommodabitur.

Fig. 49. PEr Declivem ductum, ut F P, F S, (adeóque Descendentem, per Def. 16. Cap. 1.) sponte suâ (nisi aliàs impeditum,) feretur grave; per 2 hujus. Per Horizontale Planum, vel superficiem Sphæricam, Terræ concentricam, ut P H, (cùm nullus sit vel Descensus vel Ascensus; per 9 hujus;) nec sponte suâ movebitur, (per 23 hujus:) nec tamen motui adversatur, (per 4 hujus;) adeóque Vi quantumvis exiguâ movebitur, per 11 Cap. 1. Per Acclivem ductum, ut P F, P O, (adeóque Ascendentem, per Def. 16. Cap. 1.) motui adversatur Gravitas, (per 4 hujus,) impeditque, (per 8 vel 10 Cap. 1.) Huic tamen Impedimento Vis præpollens, movebit; per 11 Cap. 1. Quæ erant demonstranda.

SCHOLIUM.

NOtandum verò, tum hic, tum toto hoc Capite, (aut etiam alibi,) ubi variam planorum motuúmve, sive Declivitatem, sive Acclivitatem; quódque hinc oritur motûs vel Adjumentum vel Impedimentum; consideramus: Nullam omnino habitam esse rationem vel Resistentiæ medii, vel Asperitatis aut scabritiëi planorum aut superficierum super quibus movetur, & siqua sunt ejusmodi Impedimenta alia: Sed solius, quod ex Obliquitate Descensuum Ascensuúmve oritur, Impedimenti vel Adju-

Adjumenti: tanquam si in medio vacuo peragendus esse motus, nulláque aliunde remora adveniret. Quippe illa omnia sunt huic considerationi planè extrinseca; & seorsum, si opus est, perpendenda. Quamquam igitur, verbi gratiâ, super Horizontali Plano, aut etiam aliquantum Declivi, nonnisi magnâ Boum aut Equorum Vi trahatur Plaustrum: Non tamen illud ex plani Positione oriri censendum est; sed ex aliis insuper superandis motûs impedimentis, quorum hîc rationem non habemus.

PROP. XXVIII.

Datum Pondus, datâ Vi, movere; pro variâ motuum Acclivitate.

Idem intellige, de quâvis aliâ Vi Impediente, per aliam quam Directionis suæ lineam revellendâ.

V. G:: *n*V. *n*G.

SInt PH, FG, rectæ Horizontales; FP, GH, perpendiculares. Fig 50. Atque intelligatur elevandum Pondus, in P: & huic affixum Filum flexile, seu Funiculus, PFGV; puncta fixa F, G, ambiens: & in V, Vis Motrix applicata. Adeò ut, quantum trahatur funiculi extremum, secundum Vis applicatæ directionem GV; tantundem elevetur, contra directionem suam, pondus P, in PF perpendiculari. Atque intelligatur Vis V, Vi ponderis P æqualis. Æquipollebit igitur, (per 7 hujus;) Adeóque sustinebit; &, si vel augeatur, vel Ponderis Vis minuatur (rectâ PF vel tantillum reclinatâ, putà in situm PO, per 25 hujus;) movebit. per 9, 11. Cap. 1.

Requiratur autem, ut idem vel Æquale Pondus, Vi minore moveatur, (Nam de Æquali, vel Majore, jam constat:) Puta Vi *n*V; quæ nempe sit ad V, in ratione datâ *n* ad 1.

Dico; Si aptetur angulo PFG, recta PO, quæ sit ad PF, ut 1 ad *n*, (nempe, in reciprocâ ratione virium,) & movendum Pondus, super Acclive Planum, in PO rectâ, per POGV Filum flexile trahatur: Vis data *n*V, ponderi P, in hoc situ Æquipollebit; &, si tantillum adhuc augeatur Obliquitas, movebit.

Nam, propter PO ad PF, in ratione 1 ad *n*: Si P in PF Graviter ut G; idem in PO gravitabit ut *n*G, (per 14 & 17 hujus:) Ideóque, cùm illi æquipolleat Vis V, huic æquipollebit Vis *n*V, (per 17 Cap. 1.) Adeóque (per 25 hujus) si fiat PO adhuc vel tantillum longior, Vis præpollebit, adeóque movebit; per 9, 11, Cap 1. *PROP.*

PROP. XXIX.

Datum Pondus, per Datam Acclivitatem movere.
Idem intellige, de quâvis aliâ Vi impediente.

V . G :: *m*V . *m*G .

Fig. 50. Reliquis, ut priùs, constructis: Intelligatur Vis V, æquipollens Ponderi P, per Acclivitatem P O movendo. Et requiratur, ut per Acclivitatem Majorem (nam de Minore satis constat) puta P F, moveatur.

Dico; Si, quâ ratione Brevior est P F quàm æqui-alta P O, eâdem augeatur Vis V; æquipollebit; Adeóque, si ulterius augeatur; movebit.

Nam, ut P O ad P F; puta ut *m* ad 1; Sic, vice versâ, Gravitatio ponderis P in P F, ad ejusdem gravitationem in P O: (per 14 & 17 huius.) Adeóque, cùm Vis ut V, æquipolleat huic; Vis ut *m*V, æquipollebit illi; (per 17 Cap. 1.) &, aucta, movebit. per 9, 11. Cap. 1.

PROP. XXX.

Datâ Vi, in Acclivitate datâ, motum efficere.
Idem intellige, mutatis mutandis, quæcunque sit Vis impediens.

V . P :: *n*V . *n*P .

Fig. 50. Cæteris, ut priùs, constructis: Intelligatur Vis V, Ponderi P, per Acclivitatem datam P O movendo, æquipollens. Et requiratur, ut datâ Vi, *n*V, (puta quæ sit ad V, ut *n* ad 1,) fiat motus.

Dico; Si pro P pondere, substituatur *n*P, (quæ nempe sit ad P pondus, in eâdem ratione quâ data Vis *n*V ad V;) huic æquipollebit data Vis (per 17 Cap. 1.) Adeóque, Si tantillum adhuc minuatur Pondus; Vis præpollebit, adeóque movebit. per 9, 11. Cap. 1.

SCHOLIUM

SCHOLIUM.

SI porro in tribus proximè præcedentibus Problematis, Celeritatis ratio habenda erit; ut non tantum motus utcunque fiat, sed & datâ celeritate fiat. Huic satisfactum erit ex Prop. 29, 30. Cap. 1. Nempe invento (per tres Propositiones præcedentes, respectivè,) quo pacto motus fieri possit aliquâ saltem celeritate: Quâ ratione augenda erit celeritas; eâdem augenda erit, in Prop. 28 hujus, inventa longitudo rectæ PO; &, in Prop. 29, inventa Vis; &, in Prop. 30, eâdem minuendum erit inventum Pondus.

PROP. XXXI.

Grave, ex puncto fixo liberè dependens; Si in Perpendiculo constituatur; manebit: Si extra Perpendiculum, ad Perpendiculum feretur. (Et quidem per arcum circuli in plano ad Horizontem recto.)

In plano autem ad Horizontem obliquo; ad eam rectam feretur quæ est Horizontali rectæ ad angulos rectos; (quam *Perpendiculi Succedaneum* appello:) & in eâ si ponatur, consistet.

Idem intellige, mutatis mutandis, in aliâ Vi Motrice.

SIt FG, Horizontalis recta; FP, perpendicularis. Atque ex F puncto fixo, dependeat, per FP filum, pondus P. Adeóque; Si extra perpendiculum quocunque moveatur, putà ad S; describet (propter eandem fili longitudinem) arcum circuli P S, (saltem aliquod in superficie Sphæricâ, centro F descriptâ, punctum S designabit, quod P S circuli arcum terminabit:) Est autem (per 20 hujus.) Punctum P (utpote omnium in illa peripheriâ, aut etiam Sphærâ, infimum) ipso S humilius. Non igitur ad S feretur; per 2 hujus. Quod demonstrandum erat. Fig. 49.

Si verò extra P constituatur: Propter punctum P omnium infimum, ductúmque SP continuè descendentem, (per 20 hujus;) omniúmque maximè (utpote per circuli peripheriam in Sphæra maximi, in perpendiculari-

culari plano positi,) per 24, 25, 26. hujus; eò feretur; per 4 & 8 hujus. Quod itidem erat demonstrandum.

Idem similiter ostendetur: Si in F P G plano ad Horizontem obliquo ferendum intelligatur Grave; propter punctum P omnium in illo plano infimum, per 20 hujus: ductúmque circuli, maximè Declivem, per 24, 25, 26. hujus. Quod erat ultimo demonstrandum.

SCHOLIUM.

Supponit hæc Propositio, Filum *non-Extensile*, sed non & *Inflexile*; adeóque disertè procedit de Gravi Pendulo; quod itaque humilius intelligitur, saltem non altius, quàm F punctum fixum. Verum quidem est; si esset in eâdem P G peripheriâ, supra Horizontalem rectam F G continuatâ; descenderet hoc ad Perpendiculum; at non statim hac de causâ, neque statim secundum peripheriam; sed secundum Perpendiculum, ut Grave adhuc absolutè liberum, (non tantùm liberè Pendulum,) per 21 hujus: donec, extenso ad suam longitudinem filo coërceretur ne diutius rectâ descenderet, sed secundum Peripheriam, Vi Propositionis hujus.

Sin Filum illud etiam Inflexile intelligatur; ubicunque in eâ peripheriâ (extra perpendiculum) ponatur; (sive supra sive infra Horizontalem lineam;) secundum peripheriam descendet, circa Centrum motûs rotando. Verùm illud hujus loci non est; sed ad Libram spectat, & infra demonstrabitur.

PROP. XXXII.

Grave pendulum, in Perpendiculo constitutum, Vis quantumvis exigua, à Perpendiculo dimovebit.

Idem de Perpendiculi Succedaneo, in Obliquo plano, intelligendum. Déque aliis motibus, mutatis mutandis.

Fig. 49. Ex puncto F, in Perpendiculo F P, dependeat ex Filo Pondus P: Quod, ex perpendiculo motum, describat P S G Circuli quadrantem; Cui circumscribatur F H quadratum. Et exponatur, secundum directionis lineam P H Horizontalem, Vis quantumvis exigua: puta, quæ sit ad Vim Ponderis P, ut n ad 1 (hoc est, si intelligatur Vis V, Ponderi P in perpendiculo æquipollens, sit exposita Vis n V.) Et ponatur

ponatur (ex præſcripto Prop. 28 hujus.) P O recta, ita declivis, ut Ponderi P in P O movendo æquipolleat Vis *n* V. Nempe, ſumatur, in H G rectâ, recta H O quæ ſit ad P H in ratione virium expoſitâ *n* ad 1; & jungatur P O. Cùm enim ſit, ut Vis ad Pondus, ſic Altitudo H O in perpendiculo (quæ eſt Directio Ponderis) ad H P lineam directionis Vis Moventis: Expoſito Ponderi per P O movendo, æquipollebit Vis expoſita; adeóque auctâ vel tantillum Obliquitate, Movebit. per 28 hujus. Eſt autem (propter S P H angulum contactûs, minorem angulo rectilineo O P H, per 16 Elem. 3.) Obliquior Aſcenſus per P S quàm per P O. Movebit igitur datum Pondus, Vis Expoſita, in P S peripheriâ. Quod erat probandum.

Alia Demonſtratio.

Idem demonſtrabitur ex 15 hujus: Propter eandem P S peripheriæ in puncto P declivitatem, atque Contingentis rectæ P H; quæ cum Horizontalis ſit, conſtabit propoſitum, per 27 hujus.

PROP. XXXIII.

Grave Pendulum datum, quouſque extra perpendiculum, datâ Vi, movebitur; determinare.

Fig. 49.

COnſtructis ut prius: Dico; Per arcûs P A (quem abſcindit P O recta) Semiſſem P S, nec ultrà, Expoſitâ Vi motum iri Pondus P. Nam, quæ P A arcum (adeóque & ſubtenſam, per 30 Elem. 3.) biſecat è Centro recta F S, ſecat ſubtenſam P A ad angulos rectos; per 3 Elem. 3. Huic igitur ſubtenſæ, hoc eſt P O rectæ, parallela eſt quæ Circulum in S tangit S T recta (per 16 Elem. 3.) Adeóque & pariter Obliqua, (per [illegible]9 Elem. [illegible].) Cùm itaque magis adhuc ſit ad Horizontem Obliqua, arcûs P S pars quælibet (ipſo S puncto excepto:) minus autem, pars quælibet arcûs S A; (quod ex 15 hujus demonſtrabitur:) ad S, nec ultrà, movebitur Pondus P, ab eâ Vi quæ illi, per Acclivitatem P O movendo, æquipollet; per 28 hujus. Quod erat determinandum.

PROP. XXXIV.

Grave Pendulum datum, ad datam altitudinem movere, quanta Vis requiritur, determinare.

Fig. 49. IN eadem Figura; si velim ad S punctum usque moveri grave Pendulum P; sumatur arcûs P A, duplus expositi A S; junctaque P A continuetur donec occurrat, in O, perpendiculari rectæ G H. Cùmque arcûs P S particulæ minus acclives sint quàm T S vel P A, accliviores autem particulæ omnes ultra S; Si sumatur (per 29 hujus) Vis ea quæ sufficiat movendo Ponderi P dato in acclivitate P A, seu P O, sufficiet eidem movendo per arcum P S. per demonstrata ad Prop. præced.

CAP. III.

De Libra.

DEFINITIONES.

DEF. I.

Libra (*quæ & Bilanx dicitur*) *notiſſimum eſt in Officinis Inſtrumentum, quo Pondera explorantur.*

BIlanx, à *binis lancibus*, nomen habet. Græcis σταθμὸς dicitur, ab ἵστημι *pendeo.*

Libræ nomen, an à Græco λίτρα deſcendat, an hoc ab illo à poſterioribus Græcis deformatum ſit; non convenit inter Criticos.

Qui originem Græcam eſſe volunt; à λίτρα, quæ exigua vel Ponderis vel Monetæ ſpecies erat, (ſic enim Siculi *Obolum* dixerunt,) poſteriores Græcos ejus alteram ſignificationem deduxiſſe ſentiunt, (quâ vel *Pondo* ſignificet, ſeu duodecim Unciarum Pondus; vel ipſum etiam Ponderationis Inſtrumentum:) atque hinc fluxiſſe Latinorum Libram: ut à τέρετρον, *Terebrum*, (niſi quis hoc à *Tero* malit) T in B mutato.

Qui Latinam malunt originem; *Libram* quaſi *Liberam* dici volunt, (quod ipſum à *Libet* videatur deſcendiſſe, niſi repugnaret primæ ſyllabæ quantitas; fortaſſis igitur, ab ἐλεύθερος, *Liber*; ut, ab ἐρυθρὸς, *ruber*; mutato θ in B; ſic à πλῆθος, *plebs*; &, ab οὖθαρ, *uber*; unde & noſtrum *udder*, mutato θ in *d*; ſicut, à θυγάτηρ, *daughter*:) propter Æquilibrii in utramque partem indifferentiam: Inde autem Græcorum poſteriorum λίτραν, hoc ſenſu, deformatum; ſicut à multis aliis vocabulis Latinis, Græca deſcendiſſe, certum eſt.

Multas habet partes; putà *Jugum, Axem, Trutinam, Examen, Lances*, &c.

II.

Libræ Jugum, *Vectis est seu Trabs oblonga, cujus ab extremis dependent* Lances. *Quod & tantæ firmitatis esse intelligitur, ut appensis ponderibus sustinendis par sit, nec eorum pondere vel rumpatur vel incurvetur.*

I*ugum*, à *Jungo*, dicitur, (ſicut, eodem ſenſu, à ζεύγω, ζυγὸς,) quod Lancium appenſiones interjungat. Niſi quis immediatè à ζυγὸς, *Jugum* dici malit; ſicut, à ζεύγω, ζευγνύω, *Jungo*.

III.

Axis, *est Jugi medio transversim infixus, qui jugum sustinet, & circa quem rotatur: Jugum in duo Brachia dirimens.*

IV.

Jugi Brachia, *utrinque ab Axe ad Appensionum puncta porriguntur.*

V.

Lances, *à Brachiorum extremis liberè dependent, quibus immitti solent Pondera; alteri quidem, Notum; alteri, explorandum.*

VI.

Trutinam *appellant Manubrium sive Scapum, quo Axis extrema utrinque sustinentur, &, cum Axe, Jugum ipsum.*

Trutinam verò ipſam ſuſtinet vel tenentis Manus, vel Uncus aliquis fixus, aliúdve ſuſtentaculum.

Dicitur autem à Græco τρυτάνη, quod idem ſignificat; & hæc, à τρύω, *tero*, *attero*; quod pondere ſuſtinendo Teratur. Uſurpatur etiam συνεκδοχικῶς pro Bilance totâ.

Solet autem (nec incommodè) Axis, Jugo transfixus, utplurimum Jugo firmetur conjungi, tanquam ipſius pars; ejúſque extrema, intra duo in infimâ parte Trutinæ foramina, liberè moveri. Quamquam & poſſit Axis ipſius Trutinæ pars fieri, ita ut, circa ipſum immotum, liberè rotetur Jugum.

VII.

VII.

Examen *dico Lingulam, quæ medio Jugo insistens ad angulos rectos, indicium est vel Æquilibrii, dum intra fissuram perpendicularis Trutinæ continetur; vel Præponderantiæ, prout ad hanc aut illam partem extrà vagatur.*

HUc, credo, respicit illud *Persii* Sat. 1.

——— Examenve improbum in illâ
Castiges Trutinâ. ———

Dici videtur (ab *Exigo, Exegi, Exactum,*) *Examen* quasi *Exagmen*: Atque hinc *Examino*. Alii tamen, ab ἅμμα *vinculum, ligamen* (quod ab ἅπτω *ligo,*) deducunt *Amen* sive *Amentum*, quod *Lorum* significat, (illud speciatim quod mediis Jaculis annectebatur, quò melius in hostes jacerentur:) Atque hinc *Examen*; tum ubi *Examen Libræ* significat, (quod Filum esse volunt seu Funiculum, quo Trutina regitur;) tum ubi significat *Examen Apum*; quæ quasi vinculo societatis connectuntur: Sicut & ipsum *Apum* nomen ab antiquo *Apio*, atque hoc ab ἅπτω deducunt, *quod se invicem pedibus alligent*: Quasi huc respiciat *Virgilianum* illud, *Georg*. 4. Fig. 51.

Atque illæ pedibus connexæ ad limina pendent.

VIII.

Æquilibrium *verò dicimus, quum ad Libram contraponderantia, æquiponderant.*

QUódque in Libra speciatim *Æquilibrium* dicimus, idem est in aliis Machinis, sive contrariarum virium quibuscunque complicationibus, virium *Æquipollentia*: quæ tamen & Æquilibrium, (translatione, à Librâ, factâ) non raro dicitur; quum æquipollent contrariæ vires in aliis non minùs Machinis, quàm in ipsa Libra: Pariter atque *Propensus, Propensio*, aliáque cognata Vocabula, quamquam primâ significatione, Libram spectent, Metaphoricè tamen de quibuscunque ad motum Inclinationibus usurpari solent.

In adjuncto Schemate: A B, est *Jugum Libræ*; per cujus medium C, transit *Axis* X S, dirimens Jugum in duo Brachia C A, C B; unde, ex punctis A, B, dependent duæ *Lances* L, L. Axis autem extrema X, S, sustinet X T S *Trutina*; quæ ipsa, in T, sustinetur; per Fig. 51.
cujus

cujus fissuram mediam, *Examen* C E huc illuc transit (dum A B Jugum circa Axem X S rotatur,) vel *Æquilibrium* indicans, vel in hanc aut illum partem Præponderantiam.

Estque hæc vulgaris Officinarum *Libra.*

PROP. I.

Dum Axe fixo sustinetur Libra; duo utrinque Brachia (cum suis Ponderibus) contra-ponderant.

NAm, fixo Axe XS, non potest (propter inflexile Jugum A B, per Def. 2 hujus) Brachium A (Onúsque suum) Descendere, quin Ascendat (cum suo) Brachium B; neque hoc Descendere, quin Ascende: illud.

PROP. II.

Si utrinque porrecta duo Libræ Brachia, (unà cum Lancibus, reliquâque siqua est armaturâ,) invicem æquiponderant: tantundem est, Librationem quod spectat, acsi nullius essent Ponderis: Axis verò reliquæque Libræ firmitatem quod attinet, tantundem valent, quantum est simul utriusque (cum armaturâ suâ) Pondus.

PUtà; Si Brachium C A tantundem ponderando valeat, ad sui Depressionem, adeóque (propter inflexile Jugum) Elevationem contrarii C B; quantum in contrarium valet brachium C B, (nempe ad sui Depressionem, cum elevatione contrarii C A:) tantundem simul valent atque si nullius essent Ponderis.

Nam (per Prop. 8 Cap. 1) contrarii conatus, cùm invicem æquentur, se mutuo destruunt, seu nullis æquipollent. Nempe, *Librationem quod spectat*; quatenus scilicet contra-ponderant duo Brachia.

Ad *Axis* verò (nè ruat) *Jugique* (ne rumpatur aut incurvetur) firmitatem requisitam; ipsiusque *Trutinæ*, *Fulcrive* quo sustinetur, Vim: non modo non nullis æquivalent Brachiorum pondera; sed tantundem valent, quantum est utriusque simul Brachii Pondus, & siquid ultra est oneris.

Quippe,

Quippe, hoc reſpectu, non ſunt conatus contrarii; ſed utriuſque deorſum: cui quidem communi Conatui, cùm obſtet tum Axis permanentia, Fulcrique quo ſuſtinetur, tum Jugi vis inflexilis, *&c.* & quidem ſigillatim Singula: illi par eſſe debet ſingulorum firmitas. per 18 Cap. 2.

DEF. IX.

Libram *igitur* Mathematicam *conſideramus, ad inſtar unius inflexilis Lineæ Rectæ, utrinque quantum opus eſt porrectæ, librandis Ponderibus adhibitæ.*

Dummodo enim, poſitis in Æquilibrio Libræ Brachiis, eorum Pondera nullius inſtar habeantur; poterit ſimiliter tum Libræ Magnitudo, tum Figura ipſa tutò negligi, ut ſolius Longitudinis habeatur ratio, ob ea quæ inde dependentia poſt tradentur.

X.

Centrum Libræ, *dicimus, Punctum illud quod eam dirimit in Brachia invicem Æquiponderantia.*

Æ*quiponderantia*, dico, potius quàm *Æque-gravia*; quoniam fieri poteſt, ut, quæ ſunt (abſolutè conſiderata) æque-Gravia, poſſint, ratione ſitûs ſeu Poſitionis, inæqualiter Gravitare vel Ponderare; quod tum ex ſequentibus patebit, tum ſuprà oſtenſum eſt, Prop. 10, 11. Cap. 2.

XI.

Adeóque Brachia *ſunt, quæ utrinque à Centro Libræ porriguntur; quæ vel Longitudine, vel ſaltem Ponderatione, Æqualia intelliguntur.*

XII.

Appenſionum, *vel* Applicationum Puncta, *dicimus, ea Libræ Puncta, in quibus vel actu ſunt, vel inde liberè dependent appenſa Pondera; vel ſaltem (in eodem ad Centrum Terræ Perpendiculo) directè vel incumbunt, vel ſubjiciuntur.*

Notandum

Notandum igitur; siquando inæqualiter utrinque à Centro Libræ distant Applicationum Puncta; adeóque quæ inter Centrum & illa puncta interjacent Rectæ, sint inæquales: intelligendæ erunt illæ rectæ, (si ullius omnino censeantur ponderis,) vel æqualiter utrinque à Centro porrigi quantumlibet, etiam ultra ipsa Appensionum seu Applicationum puncta; vel ea saltem quæ brevior est recta, in eâdem ratione ponderosior censenda erit; ut una tota toti reliquæ æquiponderet: quo possint tum Brachia invicem æquiponderare (secundum Def. 11:) tum tota Libra quasi nullius Ponderis censeri, (vi Prop. 2 hujus:) ut applicatorum solummodo Ponderum comparandorum habeatur ratio. Siquid autem Inæqualitatis reverâ fuerit in Brachiorum Ponderatione; id appensis Ponderibus accensendum erit.

XIII.

Centrum Æquilibrii, *appellamus, illud Libræ punctum, quo si intelligatur suspendi Libra; quæ utrinque ponderant, invicem Æquiponderant.*

XIV.

Perpendiculum Æquilibrii, *appello, quod per Centrum Æquilibrii transit Perpendiculum, seu recta ad Terræ Centrum.*

XV.

Centrum Motûs, *appello, Punctum circa quod immotum, rotatur Mobile.*

XVI.

Axem Motûs, *appello, Rectam, circa quam immotam rotatur mobile.*

XVII.

Rotari *verò dicimus mobile circa Punctum fixum, vel quiescentem Rectam; quando ita movetur, ut ipsius puncta singula tum inter se, tum ab illo seu puncto fixo, seu Rectâ quiescente & singulis in eâ punctis, eandem perpetuò distantiam conservet.*

Fig. 52. Puta; Circa punctum M rotari dicetur A B M triangulum modò ita utcunque moveatur (retentâ magnitudine & specie Trianguli, adeóque eâdem inter se punctórum omnium positione,) ut ipsius unumquodque Punctum, ut A, eandem ab M distantiam conservet. Adeóque circa

circa M punctum, vel dextrorsum aut sinistrorsum, vel prorsum aut retrorsum, vel in quamvis plagam rotari potest; putà, in situm $\alpha\,\beta$ M. At circa Rectam X S, nonnisi prorsum vel retrorsum rotabitur. Si enim ipsius puncta singula, ut A, aliter moveantur quàm Peripherias describendo, quorum omnium planis X S Axis, rectus sit; non eandem ab ipsius punctis singulis distantiam conservabit.

Sive autem intra ipsam Figuram (planam solidámve) sive extra, sive in ambitu, intelligantur punctum M aut Axis X S circa quæ Figura rotetur; perinde est.

XVIII.

Planum Æquilibrii, *dicimus, quod ita per Grave incedit planum, ut, quæ utrinque sunt segmenta Gravis, æquiponderent.*

Quum *quæ utrinque sunt Segmenta* dico; id etiam comprehensum volo, si utrinque nihil ponderet; puta, Si punctum vel linea tota sit in ipso plano.

XIX.

Axem Æquilibrii, *appello, Rectam per quam quodcunque incedit planum, est Planum Æquilibrii.*

XX.

Centrum Gravitatis, *appello, Punctum, per quod quæcunque incedit recta, est Axis Æquilibrii: Adeóque & quodcunque incedit Planum, est planum Æquilibrii.*

Hoc utique posterius, ex priori sequitur. Nam quodcunque Planum per illud transit, ejus aliqua recta per illud transit; quæ quidem si sit Axis Æquilibrii, etiam & Planum illud erit Æquilibrii planum; per Def. præced.

PROP. III.

Manente Libræ Centro; sibi permissa Libra non movebitur.

Intellige; de Librâ jam Quiescente, (& similiter in sequentibus:) contra verò, si jam sit in motu.

Fig. 53. SIt Libræ AB, Centrum C. Hoc, inquam manente; ſibi permiſſa Libra, (hoc eſt, nullo Pondere, Vi, aut Impulſu quovis alio quàm Gravitate ſuâ, in has aut illas partes adacta,) non movebitur.

Cum enim CA, CB, Brachia (Æquiponderantia, per Def. 11 hujus,) invicem contra-ponderent (per 1 hujus:) propter contrarios Conatus æquales, non fiet motus: per 12 Cap. 1. Nempe, ſi Libra jam Quieſcat. Et ſimiliter inde oſtendetur, quòd non ſiſtetur, ſi jam ſit in motu.

SCHOLIUM.

VAlet hæc demonſtratio, in quocunque Libræ ad Horizontem ſitu, (puta; vel Horizontali, vel utcunque inclinato:) Siquo enim ſitu CB, CA, non æquiponderant; non erit, in eo ſitu, punctum C, Libræ Centrum; Sed aliud aliquod; de quo procedet demonſtratio.

Et quidem, ſecundum Mathematicum rigorem, in certâ à Terræ Centro diſtantiâ finitâ, non erit ejuſdem AB Libræ, idem in omni ſitu Centrum C. Sed, in ſitu Declivi, à puncto medio (quod in ſitu Horizontali eſt ipſum Libræ Centrum) pro varia Declivitate variè removebitur Centrum, verſus declivius extremum. Adeóque, declivior ſemiſſis, ſi ex puncto medio ſuſtineri intelligatur Libra, reliquo præponderabit; totáque Libra, hoc ſitu, poſita, ſuapte ſponte ad ſitum Horizonti perpendicularem ferri debet: (Contrà quàm aliquibus viſum eſt, Nempe, ad ſitum Horizonti parallelum ferri debere; contra quos fusè diſputat *Guid-Ubaldus*, in Mechanicis, Capite *De Libra*, Prop. 4.) Quod ſeorſim, ſi opus videbitur, demonſtratu non eſt difficile. Et fiet, poſt Propoſitionem 14.

Verùm ſi intelligatur Libra tamquam à Terræ Centro infinitè diſtans; adeóque & Perpendicula invicem Parallela: omnino idem cenſendum eſt in quocunque ſitu Centrum; nempe punctum C, libræ AB medium. Quo modo in Mechanicis aſſumi ſolet.

PROP.

PROP. IV.

A puncto quovis liberè dependens Grave, aut eidem directè vel subjectum vel incumbens; tantundem gravat illud quo ita sustinetur punctum, atque si in illo ipso puncto intelligeretur. Tantundem scilicet quantum est ipsius Pondus.

Idem intellige de Vi quâvis aliâ, mutatis mutandis.

NAm, verbi gratiâ, ex puncto B, liberè dependens P pondus, ad perpendiculum feretur gravitate suâ, (per 30 Cap 2.) De quo sic posito, sive aliàs directè vel subjecto vel incumbente pondere P, (sive propiùs sive remotiùs absit, modò in eodem perpendiculo,) constabit propositum; per 18 Cap. 2. Fig. 54.

SCHOLIUM.

EStque hæc Propositio non exiguæ utilitatis: ut quæ ad certam æstimationem reducit Pondera, sive non in eâdem rectâ, sive non ad Jugum rectum applicata. Putà, si intelligatur planum aliquod ADB; atque in eo Libra ACB recta: Ex variis autem hujus plani punctis (sive in ipsa Librâ, sive supra, sive infra Libram) appensa Pondera. Quæ ex A vel B Libræ punctis liberè dependent Pondera, tantundem gravant ea puncta atque si in illis essent. Quod, ex D puncto supra Libram; tantundem gravat huic subjectum libræ punctum δ, atque si in illo esset. Quódque, ex E puncto infra Libram; tantundem gravat punctum ε, cui directè subest, atque si ibidem esset. (Intellige semper, ita conjuncta esse puncta D, δ, vel E, ε; ut non possit D deprimi nisi depresso δ; aut E deprimi, nisi depresso ε.) Súntque ipsa A ε δ B, quæ *Applicationum Puncta* dicimus; Def. 12 hujus. Fig. 55.

Similiter; Si libræ Jugum inflexum intelligatur, aut incurvatum, ut $\alpha C \beta$. Quum nos *Libram Mathematicam* definivimus *Lineam Rectam*, &c. Def. 9 hujus: Pro Jugo illo inflexo, substituere licet quamlibet in eodem plano rectam; (eam potissimùm, quæ, per Centrum motûs transiens, est Horizonti parallela;) atque ad hanc, ut Libram, exigere singulorum appensorum Ponderum momenta: Puta, quæ ex α δ β punctis dependent perinde ac si ex A D B punctis dependerent. Fig. 56.

PROP. V.

Si Æqualiter Gravetur utrumque Libræ Brachium; Æquiponderabunt ſic gravata Brachia: Et ſibi permiſſa Libra ſic gravata, manente Centro, non movebitur.

Sin altero alterum magis Gravetur; hoc præponderabit, atque deorſum (niſi alias impeditum) feretur: Et ſimul utraque Ponderando æquipollebunt exceſſui præpollentis.

Fig. 57. NAm, ſi æquiponderantibus utrinque Brachiis, ut CA, CB, (per 11 Def. hujus;) accedant adhuc æqualia gravamina, ut P,P; (ſive ex appenſis Ponderibus, ſive adhibitâ Vi, vel Impulſu quovis, aliáſve;) Æquales etiamnum manebunt Ponderationes; (quippe Æqualia æqualibus addita, Aggregata faciunt Æqualia.) Ideóque contrariæ cum ſint, (per 1 hujus;) nullis æquipollent; & Motum propterea non efficiunt, per 8, 12 Cap. 1.

Sin magis gravetur alterutrum; Præponderabit, (per 9 Cap. 1.) Adeóque deorſum feretur, per 12 Cap. 1. Æquipollent autem Ponderando, ſimul ſumpta, exceſſui præpollentis, per 8 Cap. 1.

SCHOLIUM.

POnderando, inquam; nempe quatenus invicem contra-ponderant, Libram in hanc aut illam partem trahendo. At quantum ad Axem ipſum, & quodcunque quo Libra ſuſtinetur fulcrum; pro contrariis habenda non ſunt, ſed pro conjunctis oneribus: ſicut ad Prop. 2. oſtenſum eſt. Quod in ſequentibus item Propoſitionibus intelligendum erit; niſi ſiquando contrarium inſinuetur.

PROP. VI.

Si Ponderibus utcunque gravata Libra, Centro Æquilibrii ſuſtineatur: Neutrum prægravatur Brachium.

Et

Et contrà; Punctum illud Libræ, quo si sustineatur sic gravata libra, neutrum prægravatur Brachium; est Centrum Æquilibrii.

Patet, ex Definitione Centri Æquilibrii.

PROP. VII.

Manente Centro Æquilibrii, utcunque gravatis Brachiis, Libra non movebitur.

SIt A B, Libra. Atque intelligatur Centrum Æquilibrii, vel idem cum C centro libræ, (nempe si æqualiter vel graventur, vel nou graventur Brachia;) adeóque constabit propositum, ex 4 & 5 hujus: Vel ab ipso aliud, ut E. Hoc, inquam, manente; Libra non movebitur. Fig. 58.

Cum enim (per Def. Centri Æquilibrii) E A, E B, prout jam gravantur, invicem æquiponderant; Nec possit (propter inflexilem libram) alterutrum descendere, manente E, quin alterum Ascendat: contrarii conatus invicem æquales, motum non efficient. per 12 Cap. 1.

SCHOLIUM.

QUod autem de Gravitate dicimus, (sive in hac sive in aliis Propositionibus,) deorsum movente; idem de quâvis aliâ Vi movente secundum Directionem suam, intelligendum erit; juxta Def. 21. Cap. 1

PROP.

PROP. VIII.

Manente in eâdem à Centro Terræ Altitudine, Centro Æquilibrii; neque Deſcendere cenſenda eſt gravata Libra, neque Aſcendere, utcunque moveatur. Et contrà; dum neque Deſcendere, neque Aſcendere cenſenda eſt gravata Libra; Centrum Æquilibrii manet æquè-altum.

Et ſimiliter de aliis motibus à Vi motrice quavis, mutatis mutandis, intelligendum erit.

Fig. 60. Intelligatur A B Librâ, utcunque gravata, in ſitum $\alpha\beta$ moveri: Manente (primùm) Centro Æquilibrii in eodem E puncto.

Cùm igitur, (propter E Centrum Æquilibrii,) partes E A, E B, in quocunque ſitu, adeóque in toto progreſſu, invicem Æquiponderant: Sitque, propter inflexilem Libram, unius Aſcenſus cum Deſcenſu alterius perpetuò conjunctus: Erit Aſcenſus Deſcenſui Æquipollens, (nam ſicubi præpollet alter, eà præponderabitur; per 7 Cap. 2.) Nulli igitur vel Deſcenſui vel Aſcenſui, ſimul æquipollent. per 8 Cap. 1. Quod erat demonſtrandum.

Idem deinde oſtendetur; etiamſi non in eodem E puncto maneat Centrum Æquilibrii; ſed in aliud quodvis æque-altum transferatur, ut ϵ.

Libræ ſiquidem in ſitu $\alpha\,\epsilon\,\beta$, intelligatur parallela in α E β; nempe dum intelligatur Terræ Centrum infinitè diſtans: Si verò in diſtantiâ finitâ, intelligatur circa Centrum Terræ rotari Libra $\alpha\,\epsilon\,\beta$, in ſitum α E β; ut ſit ϵ E arcus circuli, terræ concentrici; & ſimiliter $\alpha\alpha$, $\beta\beta$, *&c.* Probabitur utcunque (vel ex 33 Elem. 1. Vel ex Def. Rotationis) ſingula ipſius $\alpha\,\epsilon\,\beta$ puncta, punctis ſingulis in α E β reſpectivè ſumptis, æquè-alta, (& ſimiliter de Ponderibus appenſis ſiqua ſint, *&c.*) Adeóque totam $\alpha\,\epsilon\,\beta$, toti α E β, hoc eſt (per jam demonſtrata) ipſi A E B, æque altam. Quod porro demonſtrandum erat.

Atque hinc converſa facilè conſtabit.

Et ſimiliter de quavis aliâ Vi motrice, mutatis mutandis, idem oſtendetur.

PROP. IX.

Tantundem vel Aſcendere vel Deſcendere cenſenda erit, utcunque gravata Libra; quantum vel Aſcendit, ve Deſcendit Centrum Æquilibrii.

Quæque

Quæque de Gravium Aſcenſu & Deſcenſu dicta ſunt; pariter de motis ab aliâ quâvis Vi motrice, mutatis mutandis, intelligenda erunt.

Sit A B Libra utcunque gravata: E, Centrum Æquilibrii; quod intelligatur ad ε moveri; Deſcenſu ſive recto ſive utcunque obliquo: Dico, tantundem cenſendam eſſe deſcendiſſe Libram cum ſuo quantocunque gravamine; & quidem, ſive eodem manente, ſive utcunque mutato, ad Horizontem ſitu. Fig. 61, 62, 63.

Primò; Deſcendat E ad ε deſcenſu recto; retinente Librâ eandem ad Horizontem inclinationem, adeóque manente ſibi ut priùs poſitæ Parallelâ; puta in αβ. Manifeſtum eſt, tantundem deſcendiſſe libram totam. Junctis enim tum Eε, tum aliis quibuſvis punctis reſpectivis, ut Aα: Propter æquales parallelas rectas EA, εα; ſunt & (per 33 Elem. 1.) æquales item & parallelæ Eε, Aα; punctorum E, A, deſcenſus menſurantes (per 10. Cap. 2.) qui itaque æquales ſunt. Et ſimiliter oſtendetur de quovis alio Libræ puncto: adeóque de ipsâ Librâ.

Secundò; Manente, ut priùs, eâdem Libræ ad Horizontem inclinatione, deſcendat E ad ε, deſcenſu utcunque Obliquo. Reliquiſque ut prius conſtructis; demittantur ab E, A, ad Horizontales rectas εe, αa, perpendiculares Ee, Aa, (deſcenſus punctorum E A menſurantes, per 10 Cap. 2.) Et, demonſtrato, ut prius, æquales eſſe & parallelas, Eε, Aα; æquales item erunt (propter ſimilia Triangula) Ee, Aa; adeóque punctorum E, A, deſcenſus æquales. Et ſimiliter de quovis alio Libræ puncto oſtendetur, adeóque de Librâ ipsâ.

Tertiò; Deſcendat E ad ε, deſcenſu quovis ſive recto ſive obliquo; & ſimul utcunque mutetur Libræ ad Horizontem Inclinatio: Puta non ut in αεβ ſitu parallelo, ſed ut in aεb alio utcunque ſitu. Etiam ſic tantundem deſcendiſſe Libram, quantum Æquilibrii Centrum, ſic oſtenditur. Si intelligatur Libra in αεβ ſitu parallelo; tantundem deſcendiſſe, jam oſtenſum eſt, (in primo & ſecundo Membro hujus:) Sed (per præcedentem) æquè-alta cenſenda eſt Libra in ſitu aεb, atque in αεβ: Ergo & ſic tantundem deſcendiſſe Libra, atque ipſum E Centrum Æquilibrii, cenſenda erit. Quod erat demonſtrandum.

Quódque de Deſcenſu ab E ad ε, oſtenſum eſt; ſimiliter oſtendetur de Aſcenſu ab ε ad E. Nempe tantundem Aſcendere cenſendam eſſe Libram, atque Centrum Æquilibrii. Quod porro demonſtrandum erat.

Idem alii cuivis Vi Motrici, mutatis mutandis, facilè accommodabitur.

PROP.

PROP. X.

Si Centrum Æquilibrii sit in eodem ad **Terræ Centrum** perpendiculo cum Centro Motûs; in neutram partem præponderabit; sibíque sic permissa Libra non movebitur. Sin extra perpendiculum constituatur; ad perpendiculum, infra Centrum Motûs, feretur Centrum Æquilibrii, (nisi aliàs impeditum,) in plano ad Horizontem recto; saltem quàm potest omnium maximè Declivi.

Idem aliis motibus, mutatis mutandis, accommodabitur.

SIt M Centrum Motûs; circa quod rotanda sit A B Libra: E, Centrum Æquilibrii, in eodem Perpendiculo cum M; sive infrà, sive supra, sive in ipso M puncto. Quiescet, inquam, sic constituta Libra, in neutram partem præponderans.

Primò; sit E Centrum Æquilibrii, idem atque M Centrum Motûs. Fig. 64. Manifestum est (manente Centro Motûs M immoto, per Def.) immotum manere Centrum Æquilibrii E, (quippe idem.) Non igitur in utramvis partem præponderat; neque movebitur in eo situ sibi permissa Libra; per 5 hujus.

Fig. 65. Secundò; Sit E, in M E perpendiculo, infra M. Adeóque (per Def. 15, 16 hujus) motâ Librâ, feretur E in peripheriâ (saltem superficie sphæricâ) ut D E F Centro M descriptâ. Cujus cùm punctum infimum sit ipsum E, (per 20 Cap. 2.) quâcunque moveatur, Ascendet E Centrum Æquilibrii; &, cum eo, Libra, (per præcedent.) non igitur suâ sponte movebitur.

Tertiò; Sit E, in M E perpendiculo, supra M. Adeóque (ut prius) Fig. 66. motâ Librâ, feretur E in D E F peripheriâ (vel superficie sphæricâ,) cujus punctum E (per 20 Cap. 2.) est omnium altissimum; arcúsque E D, E F, pariter declives; per 15 Cap. 2. & 16 Elem. 3.) In utramvis igitur partem æqualiter propendet E (per 17 Cap. 2.) ipsáque Libra, (per præced.) Neutrà igitur feretur. per 8 Cap. 2.

Fig. 67. Denique; Sit E extra perpendiculum S M P. Cum sit M Centrum Motûs, circa quod Rotando E describet peripheriam (saltem in Sphæricâ superficie lineam) puta S E P: Propter arcum E P descendentem, ascendentem

ascendentem verò ES (per 20 Cap. 2) E centrum Æquilibrii (librâ tantundem descendente, per præced.) ad P feretur (nisi alias impeditum) in plano MEP ad horizontem recto (utpote quod est omnium maxime declive, per 25, 26, Cap. 2.) Saltem (si illic impediatur) descensu quam potest omnium maxime declivi, per 2 & 8, Cap. 2. Quæ demonstranda erant.

SCHOLIUM.

Adeóque si, in P constitutum centrum Æquilibrii, inde vi amoveatur; se restituet, sibi permissa Libra, gravitate suâ: Si constitutum in S, amoveatur; non eò restituetur, sed deorsum ad P feretur.

Quod autem de Librâ, strictè sumptâ, ponderibusque liberè appensis (adeóque in plano ad horizontem perpendiculari) ostensum est: Pariter ostendetur, mutatis mutandis, in quâvis aliâ vi. Puta; si planum SEP non Erectum sit, sed utcunque obliquum, in quo AB libra intelligatur, tum super illud moveri appensa pondera: Similiter enim (ex 20. Cap 2.) omnia procedent de SP ad horizontalem rectam in eo plano normaliter positam (quod *Perpendiculi succedaneum* diximus) atque SP perpendiculo ad Centrum Terræ. Aut etiam; si in Horizontali, alióve quocunque Plano intelligatur Libra (sive quod Libræ instar est) eíque in A & B applicatæ vires quæcunque secundum Directionem ipsi SP parallelam: Eodem planè modo procedet demonstratio.

PROP. XI.

Si circa Centrum suum rotetur Libra; in eâ ratione moventur, vel Ascendendo vel Descendendo, tum ipsius puncta singula, tum quæ ex ipsis liberè dependent gravia; quâ distant ea puncta à Centro Libræ.

Circa C Centrum, rotetur Libra AB. Dico ipsius puncta singula, ut A, B, D, in eâ ratione, Ascendere vel Descendere (eodem scilicet quæ in eodem Brachio; quæ in contrario, contrario motu;) quâ distant à C Centro. Fig. 68.

Fig. 68. Describunt enim A, B, D, puncta (propter eundem vel æquales angulos ad C) similes arcus (puta A a, B b, D d,) qui itaque tum ipsi, tam & ipsorum altitudines perpendiculo mensuratæ (puta A α, B β, D δ,) sunt (propter figuras similes & similiter sitas, saltem situ contrario positas, quod hic tantundem facit) radiis suis, hoc est, à Centro distantiis C A, C B, C D, proportionales: adeóque & (per 10. Cap. 2.) Punctorum A, B, D, Ascensus, Descensúsve. Quod erat demonstrandum.

Quódque de ipsis punctis ostenditur; perinde verum est de Ponderibus inde liberè dependentibus, vel per *Prop.* 4. hujus. Vel etiam, quia, quemcunque arcum describit, verbi gratiâ, B punctum; huic similem & æqualem & similiter situm, describet ab eo liberè dependens P, (utpote quod eidem, per 30. Cap. 2. perpendiculariter ubique subest; &, propter æqualem fili longitudinem, in eâdem distantiâ.) Adeóque tantundem vel ascendit vel descendit; hoc est (per modò demonstrata) in ratione distantiarum punctorum appensionis à Centro. Quod etiam erat Demonstrandum.

PROP. XII.

Si idem sit Libræ Centrum, atque Centrum Motûs: Quæ ex illâ liberè dependent Gravia (aut etiam aliàs directè vel subsunt vel incumbunt) in eâ ratione ponderant (seu gravant sua respectivè Brachia) cæteris paribus; quæ ex rationibus Ponderum, & Distantiarum punctorum applicationis à communi Libræ & Motus Centro, componitur.

Adeóque: Si Distantiæ sint æquales; in ratione Ponderum: Si Pondera sint æqualia; in ratione Distantiarum: Si vel utraque sint æqualia; vel sint reciprocè proportionalia; Æquiponderant: Quæ verò ex Centro dependent; neutrum gravant Brachium.

Idem intellige de Viribus aliis: Nempe in eâ ratione movendo pollent, quæ componitur ex rationibus Virium, & Distantiarum à communi Centro Motûs & Libræ (sive quod hujus instar est) quibus directè applicantur Vires.

P.

P.	nP.	P.	nP.	nP.
D.	D.	mD.	mD.	$\frac{1}{n}$D.

PD. G :: nPD. nG :: mPD. mG :: mnPD. mnG :: PD. G.

NAm (per 7. Cap. 2.) in eâ ratione ponderant; quâ pollent, si moveantur Ascensus, Descensúsve: Hoc est (per 5. Cap. 2.) in ratione quæ ex rationibus Ponderum, & Altitudinum ascensus descensúsve componitur: Hoc est (per præcedentem) quæ ex rationibus Ponderum, & distantiarum punctorum Applicationis) à communi motûs & libræ Centro, componitur. Quod erat Propositum.

Qnodque, de Incumbentibus & Dependentibus, additur; constat ex 4 hujus.

Corollaria constant, ex 4. & 6. Cap. 1.

SCHOLIUM.

PRopositio hæc (ut & præcedentes) potissimùm respicit Libram tanquam ex unico suo puncto liberrimè dependentem (non ad certam axis positionem, aliter quam gravitate suâ & ponderum dependentium, determinatam) adeóque in plano ad Horizontem recto, sive circa axem Horizontalem, librandam; & quidem, præsertim, ut in situ Horizontali constitutam: (quamquam & ad alium tum Libræ tum Axis situm accommodari poterit.) Saltem Póndera supponuntur omnia in eodem plano, atque ad unam eandémque rectam per Centrum motûs transeuntem, applicata; secus utique non esset idem Libræ atque Motûs Centrum. Erátque hæc propositio neutiquam omittenda, ut quæ tam Celebris sit in re Staticâ, Æqualia Pondera, in ratione Distantiarum à Centro Libræ, gravitare.

Verùm omnino evenit non raro, comparanda venire Pondera, ad Libram exigenda, neque in situ Horizontali, neque in uno aliquo, sed diversis positam: Sed neque in plano ad Horizontem recto, aut circa Horizontalem Axem, libranda; sed circa inclinatum Axem, adeóque in inclinato plano movendam: Vel etiam non ad unam aliquam, sed diversas Libras, easque inæqualiter ad horizontem inclinatas applicata: Ipsaque Pondera neque ex ejusdem rectæ, neque ejusdem plani, punctis suspensa.

Huic itaque casuum varietati ut satisfaciam, visum est sequentem propositionem huic subnectere, quæ rem eandem universalius exponat.

PROP. XIII.

Pondus idem ad idem Libræ punctum applicatum; pro variâ Libræ ad Horizontem positione; in plano ad Horizontem recto (sive circa Axem Horizontalem;) ponderat in ratione *Distantiarum à perpendiculo* per Centrum Motûs.

In Plano autem ad Horizontem inclinato (sive circa inclinatum axem;) in ratione *distantiarum à perpendiculi succedaneo*; seu rectâ quæ est, in illo plano, ad Horizontalem rectam ad angulos rectos.

Et quidem, universaliùs; *Æqualia Pondera*, sive ad ejusdem, sive diversarum librarum, utcunque ad Horizontem inclinatarum (modò *circa Axes æqualiter ad Horizontem inclinatos*, sive in planis æqualiter inclinatis, rotentur) puncta quælibet, appensa; ponderant (seu gravant sua respective Brachia) in ratione *distantiarum à perpendiculo* per suum cujusque Centrum motûs, vel *hujus succedaneo*, (illo quidem, si in planis ad Horizontem rectis rotentur; hoc, si in planis inclinatis:) Hoc est; utrobique á *Perpendiculari per Axem plano.*

Circa Axes verò *inæqualiter inclinatos* (adeóque in planis inæqualiter declivibus;) in ratione quæ ex rationibus *Distantiarum* illarum à Perpendiculo ejusve Succedaneo, vel Perpendiculari per Axem Plano, & *Declivitatum* Planorum, componitur.

Adeóque, *Pondera Inæqualia* circa *æqualiter inclinatos* Axes (adeóque in Planis æqualiter declivibus;) in ratione quæ ex *Ponderum* & *Distantiarum* illarum(à Perpendiculo ejúsve Succedaneo) rationibus componitur.

Circa Axes verò *Inæqualiter inclinatos*; in eâ quæ ex *Ponderum*,& *Distantiarum* illarum,& *Declivitatum*,rationibus componitur.

Intelligatur

INtelligatur Libra, à situ Horizontali A C B, ad situm α C β, vel à C b, moveri; puncto sui B, describens arcum Peripheriæ B β b, in plano sive ad Horizontem recto, sive utcunque obliquo. Et compleatur C B β S circuli quadrans. Et ducantur rectæ β κ, b c, ipsi B C parallelæ; Perpendiculo (ejúsve succedaneo) S C, occurrentes in κ, c. Dico in eâ ratione ponderare expositum pondus in punctis B, β, b; quæ est rectarum B C, β κ, b c, distantias ab S C mensurantium. Fig. 69.

Nam, demissis a punctis β, b, ad Libram in situ Horizontali A B, perpendicularibus β δ, b d: Ostendetur, ex 4 hujus (ejúsve Scholio) si C B β S planum sit ad Horizontem rectum; tantundem ponderare, respectu assumptæ Libræ A B, pondera ex B, β, b, punctis suspensa, atque si ex B, δ, d, suspenderentur. Adeóque; si sint æqualia pondera; in ratione Distantiarum B C, δ C, d C, (per præcedentem;) hoc est (propter parallelas) Distantiarum B C, β κ, b c: Sin pondera sint inæqualia; in ratione quæ ex Ponderum & Distantiarum rationibus componitur (per eandem Prop. præced.) Quæ erant proposita.

Idémque in Plano inclinato, constabit ex 26 Cap. 2. Cum enim inclinatio plani (per 26 Cap. 2.) in eâdem ratione omnes in illo plano gravitationes minuit; in eâdem inter se ratione ponderabunt in B, β, b, punctis appensa pondera, in plano inclinato, quâ in plano ad Horizontem recto ponderarent (per 5 Cap. 1.) Hoc est (ut jam ostensum est) in ratione Distantiarum, si Pondera sunt æqualia; vel, si inæqualia, in ratione ex Ponderum & Distantiarum rationibus compositâ. Quæ itidem probanda erant.

Quod autem eadem sit punctorum β, b, ab erecto per Axem Plano perpendiculari, atque ab S C rectâ (quæ illius est, atque circuli librationе descripti, ad planum illud recti, communis sectio) Distantia: Sive (quod eodem recidit, propter punctorum, sive a rectâ, sive a plano, distantias, rectis perpendicularibus mensurari solitas) quod rectæ β κ, b c, in circuli plano perpendiculares ad S C rectam, sunt etiam ad illud per axem planum perpendiculares: Constat ex Def. 4. El. 11. Quod etiam affirmatum erat.

Alia Demonstratio.

Eadem aliàs demonstrabimus, ex Prop. 21. Cap. 2. pro variâ motûs Obliquitate. Nam (constructis ut prius ductísque contingentibus B T, β τ, b t, ut in Schemate;) Puncti B, quocunque onere gravati (& quidem sive in recto ad horizontem plano sive utcunque Obliquo) per arcum B β b moti; eadem est obliquitas motûs in ipsis

B,

B, β, b, punctis, atque B T, β τ, b t, contingentium; (per 15. Cap. 2.) quarum inclinationum ad horizontem anguli (si planum sit erectum) sunt T B C, τ β κ, t b c; & his æquales, anguli S C B, S C β, S C b; (est utique T B C, S C B, uterque rectus; & tum τ β κ, tum S C β, sumpto communi κ β C, complent rectum, per 16 El. 3. & 32 El. 1. & similiter tum t b c, tum S C b, sumpto communi c b C;) quorum Sinus recti sunt, B C, β κ, b c: His igitur proportionalia sunt Æqualium ponderum momenta in punctis B, β, b, in erecto plano, per 21 Cap. 2. (Adeóque; Inæqualium, in ratione quæ ex illâ & Ponderum ratione componitur; per 19 Cap. 2.) Eadémque plano Obliquo accommanda, ut priús, per 26 Cap. 2. Quæ erant probanda.

Quódque de unâ Librâ ostensum est; de pluribus similiter ostendetur. Puta, si ad Libræ C B, punctum δ; &, Libræ C b, punctum b; appensa sint æqualia pondera: ponderabunt (per jam dicta) in ratione distantiarum δ C, b c, cæteris paribus (Adeóque, si pondera sint inæqualia; in rationibus ex Distantiarum & Ponderum rationibus composita, per 1 Cap. 3.) Quod itidem erat propositum.

Denique; quod de Axibus inæqualiter inclinatis, affirmatur; adeóque, Motuum Planis inæqualiter Declivibus: Constat ex Prop. 24, 25, 26, Cap. 2. Quod ultimò demonstrandum erat.

SCHOLIUM.

NOtandum interim hîc erit; non ita hæc intelligenda esse, quasi, si ad Libram A B appensum pondus in B, ponderi in A, æquiponderet; illud in β, huic in α cederet, seu minùs ponderaret. Quanquam enim illud in β, minùs ponderet quàm in B; non tamen destruitur æquilibrium, quoniam & in eâdem ratione (propter eandem obliquitatem) minùs ponderet hoc in α quàm in A. Quódque de Æquilibrio dicitur; pariter & de momentis inæqualibus obtinebit. Puta, quâ ratione pondus in B, præponderat ponderi in A; eâdem & illud in β præponderabit huic in α. Nam utriusque momentum proportionaliter minuitur, ob eandem motuum obliquitatem ratione Perpendiculorum ad terræ Centrum; quæ Ponderum moventium Directiones sunt, & supponuntur invicem parallela.

At verò: Si loco Ponderis in A, α, a, (cujus Directio supponitur eadem cum directione, ponderis in B, β, b; utraque scilicet, deorsum ad terræ centrum; adeóque &, propter Tangentes parallelas, Declivitates æquales:) Substituatur, verbi gratia, Vis humana; quæ non minùs applicari

plicari poterit secundum directionem $\alpha\upsilon$, quam A V perpendiculum ; (adeoque ejusdem erit momenti in quocunque libræ situ; dum interim illud Ponderis a B ad β moti minuitur :) Minuetur continuò ratio Resistentiæ ponderis (a B ad β, b, moti) ad æquale momentum Virium in A, α, a. Adeòque Vis in α, facilius movebit pondus in β ; quàm vis eadem in A, pondus idem in B. Quæ ex propositione sequente apertius constabunt.

PROP. XIV.

Si duo pondera (aut aliæ quæcunque vires) ad Libram applicata, ita se habeant, ut, in quocunque Libræ situ, eadem utriusque sit obliquitas motûs: Quam habent inter se horum momenta rationem in uno Libræ situ; eandem & in quovis alio habitura sunt.

Si verò (vel, propter curvatum libræ Jugum; vel Centrum Motûs extra ipsam Libram; vel, non easdem applicatarum virium Directiones; vel, aliàs undecunque;) contingat, pro vario Libræ situ, inæquales subinde futuras esse duorum motuum obliquitates : Non eadem erit, in omni Libræ situ, momentorum ratio : Sed variabitur, pro variâ ratione Declivitatum, sive Sinuum Angulorum Inclinationis ad Horizontem, sive Complementi obliquitatis.

Quódque de duobus ponderibus dictum est, de pluribus similiter constabit.

1. INtelligantur, ad libram A C B, duo Pondera (seu vires aliæ) *Fig. 69.* in A, B, ita applicata, ut directiones motuum A V, B T, vel nullam habeant vel æqualem obliquitatem (hoc est, ad directionem Moventis, quæ in Gravibus est Perpendiculum, vel nullum faciant, vel æquales angulos :) Eadémque si, motâ Librâ, in alium quemvis situm pervenerint, ut $\alpha\beta$; eadem adhuc sit Directionum Motus $\alpha\upsilon$, $\beta\tau$, obliquitas. Eadem, inquam, erit inter se momentorum ubique ratio. Putà, si pondus in B ponderi in A æquiponderet ; illud in β huic in

in α æquiponderabit. Si illic præponderet: &, hic, præponderabit; atque in eâdem ratione. Cum enim, ex hypothesi, eadem utriusque sit ubique Obliquitatis variatio; adeóque (per 21 Cap. 2.) eâdem ratione vel augeatur vel minuatur utriusque momentum: Erunt adhuc in eâdem ad invicem ratione, quâ prius, constituta; (per 5 Cap. 1) Quod erat primò demonstrandum.

Fig. 70. II. Deinde: Sit *Libræ Jugum incurvatum* A M B: Seu (quod eodem recidit) *Centrum motûs* M, *extra libram* A C B. Et sunto, verbi gratiâ, utraque A, B, infra L M N horizontalem rectam per Centrum Motûs transeuntem; sed ad perpendiculi M P partes oppositas. Adeóque, utut fieri possit eandem esse in A & B motûs obliquitatem; si tamen moveatur A ad α versus P; adeóque (propter rotationem, quæ angulos A M B, α M β, æquales postulat) B ad β versus N; (nec tamen vel A ad P, vel B ad N perveniat:) Manifestum est, majorem esse motûs obliquitatem in α quam in A; minorem tamen in β quam in B; (majorem utique angulum cum perpendiculo faciet Tangens in α quam Tangens in A, minorem verò Tangens in β quam Tangens in B. Adeóque (per 21 Cap. 2. vel Prop. præced.) minuitur momentum ponderis ab A ad α moti; moti vero à B ad β, augetur. Et propterea (per 8 El. 5.) major erit ratio momenti in β ad momentum in α, quam momenti in B ad momentum in A. Et similiter ostendetur (mutatis mutandis) in aliis libræ positionibus alias variari momentorum rationes. Et quidem, pro variâ ratione sinuum Angulorum inclinationis, seu complementi obliquitatis; per eandem 21 Cap. 2. Quod erat itidem demonstrandum.

Fig. 71, 72. III. Idem ostendetur, si ex A C B Libræ puncto aliquo, ut B, dependant, non quidem liberè (ut eidem semper libræ puncto directè subsit) sed in certo angulo, ut C B E, fixum pondus E: Aut etiam, si similiter supernè affigatur. Manifestum utique est (rotatione factâ circa centrum C) punctum E (vel huic affixum pondus) circulum describere, non quidem radii C B, sed C E: Idémque planè accidere, ac si jugum esset incurvatum A C E; de quo mòdo ostensum est, quod erat propositum.

Atque hinc ostendetur (per Prop. præced. vel 21 Cap. 2.) *Pondus E infra libram fixum; prout altiùs elevatur, ita plus ponderat, seu majori in A ponderi æquipollet: At, fixum supra libram; minori.* Quod, inspectis figuris, statim patebit. Quippe distantiæ æstimandæ sunt, non secundum longitudines C B, C β; sed C D, C δ: ut ex 4 hujus patebit.

IV. At

IV. At verò, si nec supra libram, nec infra, sed à latere, affixum sit Pondus E; (intellige, ita ut, rotata librâ A C B circa axem X C S, sint ubique C X, B E, in eodem plano:) erit eadem ubique momentorum ratio, ponderum in A & E, non minùs quàm in A & B, positorum. Cum enim parallelos arcus, æquales similes & similiter positos, describunt B, E, puncta; eadem semper utriusque erit obliquitas motus. Adeóque & eadem ratio momentorum; per primam partem hujus. Atque omnino perinde est, atque si librâ X E (ipsi C B parallelâ) circa centrum X ferretur. Fig. 73.

SCHOLIUM.

ATque hujus ope, quæ utcunque ad varias circa eundem Axem libras (connexas tamen) in variis Planis applicantur Pondera (puta in parallelis planis Perpendicularibus per A B, X E, &c.) ad eorum unum reducuntur. Perinde siquidem Ponderat E Pondus, ubicunque in B E rectâ infinitâ fuerit, atque si esset in ipso B puncto. Ut jam ostensum est.

Quæ autem ita ad unum Planum reducuntur Pondera; eadem, per 4 hujus, ad unam ejusdem rectam quamlibet (utcunque infra, suprave fuerint) reducuntur. Perinde siquidem ponderant, ubicunque fuerint in eodem Perpendiculo (sive revera, sive huc ut modò dictum est, reducta) atque si in ipsâ quam quis velit istius Plani rectâ essent. Ut ibidem probatum erat.

Quæque ita ad unam libram reducta sunt pondera; eadem & ad unum ipsius Punctum, Æquilibrii Centrum, mox reducentur, per 20 hujus. Quippe ita perinde Ponderant simul omnia, atque si ex illo puncto dependerent. Ut ibidem probabitur.

V. Porro; Manente Jugo recto A B, & centro motûs in ipsâ Librâ, C: Si tamen alia sit directio virium in A & B adhibitarum; variabitur, pro variâ Libræ positione, momentorum inter se ratio; atque ita quidem ut in propositione est affirmatum. Esto enim, verbi gratiâ, A B libræ Jugum, in situ Horizontali positum; ejúsque puncto B applicatum grave; adeóque virium Directio B P ad Horizontem perpendicularis: Puncto autem A, vis alia quævis (putà, humana,) adhibita, secundum directionem A F (ipsi B P minime parallelam;) cui quidem A F parallela L Φ, peripheriam puncto A (circa C rotando) descriptam tangat in L; (infra vel supra punctum A, prout contigerit) Manifestum utique est, moto A ad a versus L (priusquam ad L pertingat) Fig. 74.

tingat) Minui Obliquitatem motûs; (sive angulum quem facit directio motûs cum directione virium A F, vel huic parallelâ:) Adeóque (per prop. præced. vel 21 Cap. 2.) Augeri Momentum: Dum interim moto B, per similem arcum, ad β, hujus Obliquitas Augetur; adeóque Momentum Minuitur. Et propterea (per 8 El. 5.) alia ratio erit, pro mutato libræ situ, momenti virium in A ad momentum Ponderis in B; atque momenti Virium in α ad Ponderis in β momentum. (Et quidem in eâ ratione quàm innuit propositio: per 21 Cap. 2.) Quod erat affirmatum.

Fig. 75. VI. Contrà verò; Si pro A C B jugo recto, substituamus (hoc in casu) L C B jugum inflexum; atque ita quidem inflexum, ut quem angulum facit C B ad B P directionem Gravitatis seu vis moventis in B, eandem faciat C L ad L Φ directionem vis in L moventis: Manebit eadem ubique ratio momenti Virium in L, λ, ad momentum Ponderis in B, β. Quippe idem hic præstabit jugum inflexum L C B, atque in primo hujus demonstrationis casu, rectum A C B. Et ut illic (propter similes arcus A α, B β,) æquales erant obliquitates in α, β, non minùs quàm in A,B; sic hic,ob easdem causas eadem erit in β,λ, non minùs quàm in B,L, eadem Obliquitas. Cæteràque, ut illic ostendentur. Dummodo (quod hic intelligendum est) directio virium in L,λ, punctis, sit semper eadem; putà,rectæ L Φ parallela: sicut eadem supponitur directio Ponderum, in B, β; putà Perpendiculum ad Terræ Centrum.

VII. At verò; si in punctorum altero, ut B, β, ponderis directio eadem sit (puta, recta ad Centrum Terræ, seu Perpendicularis ad Horizontem;) in altero verò, ut A, α, directio moventis in singulis A α curvæ punctis alia atque alia; sitque, verbi gratiâ, secundum ductum ipsius curvæ, vel Rectas in iisdem punctis Tangentes: Propter motûs obliquitatem in A, α, sive nullam,sive eandem; mutatam verò in B, β; (adeóque virium momentum illic æquale, hic continnuò immutatum;) vel utrobique immutatum quidem, sed non similiter immutatum: Variabitur & momentorum inter se ratio (siue rectum sit jugum, sive Inflexum) pro vario libræ situ; ita quidem ut in Propositione determinatum est, per 21 Cap.2.

Quódque in expositis casibus ostensum est; similiter ostendetur (ex iisdem Prop. 21. Cap. 2. & præcedente hujus) in aliis quibusvis casibus. Constat igitur, quod erat propositum.

SCHOLIUM.

VIsum est,in hac Propositione, generaliter propositâ, plures casus exhibere, & strictim comprehendere, potiùs quam totidem Propositionibus.

sitionibus singulos exhibere: tum quia eodem principio nituntur omnes, eâdemque demonstatione confirmantur; tum quia infiniti esset laboris singulos recensere qui huc adduci casus possent. Expositis igitur hisce paucis, facile erit alios hisce similes, prout res tulerit, huc referre; & tanquam generali propositione comprehensos, ejusdem demonstratione confirmatos reputare.

Estque opportunus hic locus demonstrandi illud quod supra insinuavimus in Scholio Prop. 3. Nempe [*Si intelligatur Centrum Terræ tanquam in infinitâ distantiâ; Libra* (vel non gravata, vel utrinque æqualiter gravata) *quocunque situ ponatur, quiescet: Si verò intelligatur Centrum Terræ tanquam in distantiâ finitâ; quiescet quidem Libra in situ Horizontali posita; vel etiam in situ ad Horizontem Perpendiculari; posita verò in situ ad Horizontem Obliquo, neque sic quiescet* (quod volunt aliqui) *neque* (quod volunt alii) *ad situm Horizontalem feretur; sed ad situm Horizonti Perpendicularem.*

Intelligantur, in A B Libra, duo quævis puncta, A B, æqualiter utrinque à Centro C remota, invicem æquiponderantia (sive æqualiter gravata) à situ A B Horizontali, per situm Obliquum $\alpha\,\beta$, ad situm a b Horizonti Perpendicularem lata, arcus similes & æquales rotando describere A α a, B β b; quos tangant rectæ A T, α T, a T, B T, β T, b T; quæ itaque *Directionem Motûs* in illis respectivè punctis designabunt, per Prop. 15. Cap. 2. Fig. 59.

Atque Intelligatur, primò, Centrum Terræ (quò tendunt Gravia) tanquam in Infinitâ Distantiâ; adeóque Perpendicula, seu Rectæ-Deorsum (*Directionem Moventis*, seu Vis Motricis, designantes) A D, α D, a D, B D, β D, b D, invicem parallelæ. Erunt igitur, in situ Horizontali (propter tum rectas A D, A T, tum B D, B T, coincidentes) eadem utrobique Declivitas; (utpote utrobique perpendicularis:) Item, in situ ad Horizontem Perpendiculari (propter angulos D a T, D b T, rectos) eadem etiam Declivitas (quippe utrobique nulla:) Sed & in situ Obliquo (propter tum α T, β T, tum α D, β D, invicem parallelas; adeoque Obliquitatis angulos æquales D α T, D β T, quos cum directione Moventis facit Directio Mobilis;) æqualis utrobique Declivitas (per Declivitatum Definitiones;) adeoque (cum cætera sint paria) æquiponderabunt (per 13 hujus:) Cum itaque contraponderant (per 1 hujus) se mutuò sustinebunt, nec fiet motus (per 12 Cap. 1.) Quiescet igitur Libra, quocunque situ posita. Quod erat propositum.

Intelligatur deinde Terræ Centrum, tanquam in Distantiâ Finitâ; adeoque Perpendicula seu Rectæ ad Centrum (*Directionem Moventis designantes*) invicem convergentes putà, A K, B K, α K, β K, a K,

 b K,

b K, in Terræ Centro K coeuntes. Si itaque ponatur Libra in situ ad Horizontem Perpendiculari; erit (propter K a T, K b T, angulos rectos) æqualis utrobique Declivitas (quippe nulla:) Item, in situ Horizontali (propter tum angulos C A T, C B T, rectos, tum C A K, C B K, invicem æquales) æquales item erunt Obliquitatis Anguli K A T, K B T. Adeóque (propter æqualem utrobique Declivitatem) æquiponderabunt, & sese mutuò sustinebunt, A, B; Libráque propterea quiescet, per modò demonstrata. Si vero ponatur Libra in situ Obliquo: Obliquitatis Anguli K α T, K β T, inæquales erunt, & quidem major ille qui est ad Brachium elevatius, puta K α T. Nam duorum æqualium angulorum D α T, D β T, altero semper Major est angulus ille K α T; Altero verò, angulus K β T vel Minor erit (nempe quoties ob magnam Libræ declivitatem, vel magnam Centri distantiam, β K cadit inter β D & β T;) vel erit Nullus (nempe, si β K circulum contingat, adeóque coincidant β T, β K;) vel saltem Minus eum superabit (nempe si quando propter exiguam Libræ Declivitatem, vel exiguam a Centro Terræ Distantiam, β T cadat inter β K & β D) ob angulum K β C, majorem angulo K α C (per 18 El. 1. Euclid.) adeóque (qui ad rectum reliquus est) K β T, minorem (reliquo) K α T: (Quæ Schema contemplanti satis obvia sunt.) Erit igitur (quocunque situ Obliquo ponatur Libra; modo Terræ Centrum intelligatur in distantiâ finitâ) in motu depressioris puncti β minor Obliquitas (adeoque Declivitas major) quam elatioris α; adeoque β præponderabit, per 13 hujus. Et consequenter (cum de punctis reliquis utriusque Brachii respectivè sumptis, idem sit judicium; sintque cætera paria;) deorsum feretur Brachium depressius (per 12 Cap. 1.) donec redigatur Libra, ad situm Horizonti Perpendicularem a b. Quod erat propositum.

Sunt qui contrarium hujus affirmant, inter quos Jordanus & alii; asserentes Libram obliquo situ positam, latum iri in situm Horizontalem: contra quos prolixè disputat Guid-Ubaldus in Mechanicis. Qui tandem concludit, permansuram fore libram quocunque situ positam, etiamsi consideretur Centrum Terræ tanquam in distantiâ finitâ. Quorum neutrum dicendum esse, ex supra demonstratis constat.

Hinc sequitur, *Ejusdem Rectæ non unum aliquod statum esse Centrum Æquilibrii*; quod nempe idem sit pro omni situ: sed, in situ obliquo, à puncto medio magis magisque ad partem decliviorem procedere, prout obliquitas major fuerit; dummodo Centrum Terræ intelligatur in distantiâ finitâ. Quodque hic de Rectæ Centro Æquilibrii dicitur; similiter infra intelligetur *de Centro Gravitatis* in Solidis, Planis, aliisve.

Sed & ex iisdem principiis probabitur, Ejusdem *Gravis* (*cæteris paribus*)

ribus) gravitatem minorem continuò fieri, prout Centro Terræ magis appropinquat. Si enim, verbi gratiâ, rectæ A B, punctum medium C, intelligatur rectâ C K ad Centrum directè ferri; adeoque eâdem semper Declivitate, & eodem impetu: reliqua tamen puncta, ut A, B, majorem continuo Obliquitatem sortientur prout Centro fiunt propiora. Nam, eâdem manente A K B trianguli base A B, prout altitudo C K minuitur, obtusior fiet angulus A K B; adeóque reliqui K A C, K B C, minores; & consequenter, majores fient Obliquitatis anguli K A T, K B T: (Idemque in situ obliquo $\alpha\,\beta$ similiter ferè ostendetur.) Et quanquam de rectæ situ Perpendiculari a b, non idem contingat (eo quòd tota recta sit in perpendiculo) tamen de rectis extra hunc situm, sed & de curvis omnibus, omnibúsque tum superficiebus, tum solidis (ut quæ non possint tota in perpendiculi rectâ jacere) idem ostendetur.

Verùm ubi Centrum Terræ consideratur tanquam in infinita distantiâ; adeoque Perpendicula tanquam parallela; (quod in staticis plerumque fit;) hæc omnia locum non obtinent. Quam qaidem hypothesin (post Archimedem, aliosque) nos etiam sequimur, nisi cum contrarium insinuatur: quod & aliquoties monuimus.

PROP. XV.

Ex tribus his, Pondere, Ponderatione, & Distantiâ puncti applicationis (sive, à communi Motûs & Libræ Centro; nempe siquod sit; sintque ad eandem per centrum motûs rectam applicata pondera: Sive, à Perpendiculo per Centrum motus; si in eodem recto ad Horizontem plano rotentur: Sive, à perpendiculi succedaneo; si saltem in eodem plano rotentur: Sive denique à perpendiculari plano per axem motûs:) Datis duobus quibusvis, datur tertium.

Nempe; Datis Pondere & Distantiâ; datur Ponderatio: Datis Pondere & momento seu Ponderatione; datur Distantia: Datis ponderatione & Distantiâ; datur pondus.

Excipe; Si (quod unâ cum ponderatione datur) Distantia vel pondus nullum sit.

Intel-

Intelligitur autem Propositio, præsertim de Librâ in plano ad horizontem recto libratâ; saltem in datâ declivitate. Et similiter in sequentibus.

$$PD = G. \quad \frac{G = PD}{P} = D. \quad \frac{G = PD}{D} = P.$$

CUm enim (per 12 ut 13 hujus) Ponderationis sive Momenti ratio, ex rationibus Ponderum & Distantiarum componatur: Datis componentibus; datur composita: Item; Datis compositâ, & componentium alterâ; datur reliqua; (per 2 & 3 Cap. 1.) Adeóque constat propositum.

Exceptio item inde patet. Quoniam Pondus nullum, nihil Ponderabit, in quâcunque Distantiâ: Et, Nullius Distantiæ, nulla est Ponderatio, quodcunque sit Pondus.

SCHOLIUM.

MOmentum illud hic intelligo, quo Pondus gravat suum respectivè Libræ Brachium; quod itaque speciatim *Ponderationem* appello: Non quatenus vel Centrum Libræ gravat, vel punctum illud ex quo directè dependet.

Propositionem hanc (& sequentes aliquot) multiplicem facere, pro variâ Distantiæ interpretatione secundum varios casus, potius quam propositionum numerum augere, visum est; quoniam eadem totius esset repetenda demonstratio. Quámque hic adhibui variarum interpretationum Distantiæ, variis casibus accommodationem; eadem in sequentibus Propositionibus intelligenda erit.

PROP. XVI.

Dato Pondere, in datâ, (à communi motûs & Libræ Centro; vel à Perpendiculo per Centrum motûs, ejúsve succedaneo; vel à Perpendiculari Plano per axem motûs;) Distantiâ: Pondus aliud investigare, quod, in assignatâ distantiâ, dato vel æquiponderet, vel in datâ ratione ponderet.

Item

Item; Distantiam investigare, in quâ, Pondus assignatum, dato vel æquiponderet, vel in datâ ratione ponderet.

P.		$\frac{1}{n}$P.		nP.		$\frac{m}{n}$P.		nP.	
D.		nD.		$\frac{1}{n}$D.		nD.		$\frac{m}{n}$D.	
PD.	G::	PD.	G::	PD.	G::	mPD.	mG::	mPD.	mG.

SIt P, datum pondus; in distantiâ C D, quam D dicimus, suspensum. Sítque alia exposita distantia, puta n D, (quæ sit ad D datam ut n ad 1;) ídque vel in eodem vel in contrario Libræ Brachio. Dico; Pondus $\frac{1}{n}$ P (quod sit ad datum P, ut 1 ad n) in assignatâ distantiâ n D, priori in D, æquiponderare. Fig. 76.

Item: Sit assignatum Pondus, ut n P (quod ad datum P, sit ut n ad 1.) Dico; In distantiâ $\frac{1}{n}$ D (quod sit ad datum D, ut 1 ad n) assignatum n P pondus, priori in D æquiponderare.

Cum enim utrobique posteriora Pondus & Distantiâ, sint prioribus reciprocè proportionalia; (alterum ut n ad 1, alterum ut 1 ad n:) Æquiponderabunt. per 12 & 13 hujus.

Similiter: Si imperetur, non ut æquiponderent; sed, ut in datâ ratione; puta, ut m ad 1: Pro $\frac{1}{n}$ P, $\frac{1}{n}$ D; positis $\frac{m}{n}$ P, $\frac{m}{n}$ D; habetur quæsitum. Quippe hæc, ad prius posita, ponderant in ratione m ad 1. per easdem 12 & 13 hujus.

PROP. XVII.

Æqualis; ejusdem, vel æqualium Ponderum; (sive, ad commune motûs & Libræ Centrum; sive, ad Perpendiculum per centrum motûs, ejusve succedaneum; sive, ad Perpendiculare Planum per motûs Axem:) Propinquatio; aut inde Elongatio: (sive Pondus Centro illi, aut Perpendiculo Planóve, admoveatur; sive Centrum, Perpendiculnm, Planúmve, Ponderi; vel contra:) Æqualiter Auget, Minuítve Ponderationem. Et; Inæqualis: vel, Inæqualium Ponderum: Proportionaliter.

Sequitur.

SEquitur ex 12 & 13 hujus. Cùm enim Æqualia Pondera, ponderant in ratione Distantiarum: Quâ ratione Augetur Minuitúrve Distantia; in eâdem similiter vel Augetur vel Minuitur Ponderatio. Tantundem autem Addit, qui ex Duplo Triplum facit, & qui ex Triplo Quadruplum, &c. Quodque de Æqualibus dicitur; de Proportionalibus similiter inde constat.

PROP. XVIII.

Datis Ponderibus quotlibet: Datisque, vel communi motûs & Libræ Centro (aut perpendiculo per centrum motûs ejúsve succedaneo, aut perpendiculari Plano per motûs axem) atque Applicationum punctis; vel horum ab illo Centro (aut perpendiculo, perpendiculíve succedaneo, aut Plano) ad datas partes Distantiis: Investigare; Quanta sit tum singulorum, tum simul omnium ponderatio; &, ad quas partes; Tum denique quantum gravant ipsum quo sustinent Centrum, aut Axem.

$$\begin{array}{c}+D.\\ P.\\ \hline +DP.\end{array} +G :: \begin{array}{c}+3D.\\ 5P.\\ \hline +15DP.\end{array} +15G :: \begin{array}{c}+4D.\\ 3P.\\ \hline +12DP.\end{array} +12G :: \begin{array}{c}\pm 0D.\\ 4P.\\ \hline \pm 0DP.\end{array} \pm 0G :: \begin{array}{c}-2D.\\ 3P.\\ \hline -6DP.\end{array} -6G :: \begin{array}{c}-3D.\\ 4P.\\ \hline -12DP.\end{array} -12G.$$

Fig. 77.

$$\left.\begin{array}{l}+1G\\ +15G\\ +12G\end{array}\right\} = +28G.$$
$$\pm 0G = \pm 0G.$$
$$\left.\begin{array}{l}-6G\\ -12G\end{array}\right\} = -18G.$$
$$\overline{\qquad\qquad +10G.}$$

IN Distantiis: verbi gratiâ, ad Centri (Perpendiculi, hujúsve succedanei, Planíve) Dextram (quas signo + insignimus) D, 3D, 4D; dependeant Pondera P, 5P, 3P: quæ (posito P in Distantiâ D ponderare ut G) ponderabunt ut G, 15 G, 12 G; per 12 & 13 hujus: Adeóque simul gravant brachium Dextrum, ut 28 G; per 8 Cap. 1.

In Distantiis ad sinistram (quas contrario signo — insignimus) 2D, 3D; dependeant Pondera 3P, 4P: Quæ itaque contraponderabunt, ut — 6 G, — 12 G; per 12 & 13 hujus: Adeóque simul gravant sinistrum brachium ut 18 G; per 8 Cap. 1.

Atque ex ipso Centro, quod itaque neutrum gravat Brachium, Pondus 4 P: Cujus Ponderatio est, ut ± 0 G. per 12 & 13 hujus.

Quæ ſimul omnia valent, ut $+28G-18G\pm 0G=+10G$; per 8 Cap. 1. Adeóque prægravant Brachium Dextrum, ut 10 G. Hoc eſt (propter poſitum $DP=G$) quantum Decuplum Ponderis P in diſtantia D, dextrorſum, appenſi.

Et ſimiliter faciendum erit, quotcunq; & quantacunq; in quibuſcunq; diſtantiis, ad utramvis partem appendantur Pondera: (habentur enim vel ex 12 & 13 hujus, vel ex 15 hujus, ſingulorum Ponderationes:) Idque, ſive dentur ipſæ Diſtantiæ; ſive Centrum (Perpendiculum, Perpendiculi Succedaneum, Planúmve) una cum Appenſionum Punctis; (nam, his datis, Diſtantiæ ſimul dantur; nempe ductis ab Appenſionum Punctis, vel rectis ad Centrum illud, vel perpendicularibus ad Perpendiculum, Perpendiculi Succedaneum, Planúmve.) Invenimus ergo, tum ſingulorum, tum ſimul omnium, Ponderationem; &, ad quas partes. Quod erat faciendum.

Quod verò C commune motûs & Libræ Centrum ſpectat, vel ſiquod aliud eſt motûs Centrum, vel Axem etiam; quo ſubſtinetur cum ponderibus Libra, ne tota ruat: tantundem valent atque ſimul omnia pondera $+P+5P+3P+4P+3P+4P=20P$, ex centro æquilibrii directè dependentia; (ſaltem in eâ declivitate inde dependentia, quâ cum Ponderibus Libra librari intelligitur:) per 2 hujus vel 18 Cap. 2. Utpote quorum Deſcenſus eo impeditur. Quod itidem inveſtigandum erat.

SCHOLIUM.

Dico autem; *Ex centro æquilibrii*: Quoniam, dum, propter Præponderantiam dextri Brachii, Libra (ſi ſibi permittatur) circa Centrum motûs rotatur; Eatenus deſcendens, quatenus deſcendit Centrum Æquilibrii (per 9 hujus:) Fixum illud Centrum motûs (vel motûs Axis) non ulterius impedit Deſcenſum Libræ, quàm, quatenus Deſcenſus ille ex Rotatione proveniens, minùs valet, quam directus eorundem Ponderum, totiúſque Libræ, Deſcenſus. Et quantum valet horum Deſcenſuum Differentia, tantundem gravatur Centrum (vel Axis) ſuſtinens.

At verò; ſi addito, ad Brachium ſiniſtrum, Pondere quod gravitet ut 10 G, quò ad Æquilibrii ſtatum redigatur Libra; unde propterea impediatur ne aſcendat ſiniſtrum Brachium, quo itaque impediatur Rotatio: jam totum deſcenſum impedit Centrum illud (vel Axis) fixum; Adeóque tantundem gravatur, quantum ſunt (tum ipſius Libræ Pondus; tum adventitium illud, quod additur, quantumcunque ſit, quod, ſitu quo ponitur, valet ut 10 G, libram reducens ad æquilibrium; tum) illa ſimul omnia appenſa Pondera.

Obex verò, siquis superne objectus Rotationem impedit, tantâ vi premitur, quanta est Ponderis, quod eò loci appensum, Libram reduceret ad Æquilibrium: Nec tamen Centrum (Axémve) tantillo onere levat; (quia nihil sustinet; hoc est, nihil impedit quin tota moles simul descendat:) Sed gravat potius.

Sin, loco hujus ad Brachium sinistrum Obicis, intelligatur Fulcrum Brachio dextro subjectum, quo Rotatio impediatur: Sustinet quidem hoc partem oneris, eâque Centrum levat.

Verum hæc consideratio non est hujus loci; sed ad Vectem spectat duobus Fulcris sustentum.

Si quis interim (præcedentem hanc demonstrationem quod spectat) Calculi methodum aversetur; (utut Demonstrationes Arithmeticas, Linearibus intermistas, non refugiat vel Euclides ipse, vel quantumcunque severus quisquam ex Veteribus Demonstrator;) Lineisque malit illud præstari: Facile erit quicquid est Calculi, sive hic, sive aliàs, ad Lineas revocare (quod tamen ad Pompam magis faciet, quàm ad Demonstrationis Robur vel Perspicuitatem:) Cujus quidem ad hanc propositionem Instantiam libet exhibere. Ad cujus exemplar, quicquid hujusmodi hic aliàs occurrat, poterit similiter in Lineis; cui id libitum erit, quispiam exhibere.

Alia Demonstratio.

Fig. 78. Expositis, ut priùs, Distantiis, Ponderibúsque: Super rectis, quæ expositis Distantiis D, 3D, 4D, &c. sint æquales, vel proportionales; totidem construantur Rectangula, vel, similiter inclinata Parallelogramma; quorum altitudines, sint respectivis Ponderibus proportionales. Puta; Ad Dextram, DP seu G; 3D 5P seu 15 G; 4D 3P seu 12 G: Ad sinistram, 2D 3P seu 6 G; 3D 4D seu 12 G; Quæ quidem Parallelogramma, quum Bases habeant expositis Distantiis proportionales; & Altitudines, proportionales Ponderibus; (ex constructione:) sunt ipsa, in ratione ex his compositâ (per 23 El. 6.) hoc est; in eâ quâ ponderant appensa Pondera; per 12 & 13 hujus.

Fig. 79. His demum Rectangulis seu Parallelogrammis (per 44, 45, El. 1.) totidem respectivè æqualia (putà, primum primo, secundum secundo, &c.) invicem æque-alta & æquangula, utrinque ad eandem rectam, puta CH infinitam, tanquam communem basem, continuè ponantur: Putà, ad Dextram, ea quæ ponderibus dextris respondent, ut G, 15 G, 12 G;

12 G; ad ſiniſtram quæ reſpondent Ponderibus ſiniſtris, ut 6 G, 12 G.

Quæ quidem Parallelogramma, tum ipſa (quia prioribus ſunt reſpective æqualia) tum ipſorum Baſes (per 1 El. *6.* cum ſint æquè alta) putà C B, B E, E D, C F, F S; ſunt (per modò demonſtrata) Ponderum quibus reſpondent Ponderationibus proportionalia. Adeóque: Ut C D, ſumma baſium ad dextram; ad C S ſummam baſium ad ſiniſtram; ita ponderum omnium ad Dextram, Ponderatio; ad Ponderationem omnium ad ſiniſtram. Atque ut S D differentia, ſive ad C D, ſive ad C S, ſive ad C B, &c. ſic eſt Præponderantia ponderum à dextrâ, ad Ponderationem vel omnium à dextrâ, vel omnium à ſiniſtrâ, vel ipſius ſpeciatim Ponderis cui reſpondet baſis C B, &c. Quæ erant inveſtiganda.

Pondus verò, quod ex Centro (vel Axe) dependet, ut nullam habet inde diſtantiam; ſic quæ huic reſponderent Parallelogramma (putà C 4 P, C A) nullius ſunt Latitudinis; adeóque nullius magnitudinis; ut & ipſum (librationem quod ſpectat) nihil gravat vel hoc vel illud Brachium.

Denique; ipſum quo omnia ſuſtinentur Centrum (vel Axem) cum ſimul omnium pariter deſcenſui recto reſiſtat, in eâ ratione gravant ſingula, quâ ſunt ipſa reſpectivè Pondera; & ſimul omnia, quantum eſt omnium Aggregatum ex æquilibrii centro ſuſpenſum: (per 2 hujus, vel 18 Cap. 2.) Hoc eſt, ut $P+5P+3P+4P+3P+4P=20P$. Quod erat ultimò inveſtigandum.

P R O P. XIX.

Datis Ponderibus quotlibet (vel ſumma Ponderum;) datâque eorum ad datum commune motûs & Libræ Centrum (vel ad datum per centrum motûs Perpendiculum, aut Perpendiculi Succedaneum, vel ad datum Motûs Axem; Planúmve per illum Axem perpendiculare) Ponderatione ad datas partes: Ponderationem illam Augere vel Minuere, datâ quantitate; ſive manente hoc centro (Perpendiculo, perpendiculi Succedaneo, Axe, Planóve;) ſive manentibus Ponderibus ſic appenſis.

Sunto data pondera, vel summa Ponderum, verbi gratia, 20 P. Sitque omnium Ponderatio ad datum Centrum, vel Axem C (vel Perpendiculum, Planúmve perpendiculare per Axem) + 10 G = + 10 DP, dextrorsum: Quæ verbi gratia, Minuenda sit (vel Ponderatio sinistrorsum Augenda) quantitate 5 PD; hoc est, expositæ Ponderationi + 10 PD, auferenda sit 5 PD.

Inveniatur (per 15 hujus) distantia dextrorsum, quâ datum Pondus 20 P, ponderet ut 5 PD (nempe quantum expositæ Ponderationi auferendum est) puta $\frac{1}{4}D = \frac{5\,PD}{20\,P}$. Cui sit æqualis, verbi gratia, CE. Dico; si, manente C, omnia simul Pondera sinistrorsum
Fig. 77. moveantur; quantum est EC recta; Vel, manentibus Ponderibus, tantundem dextrorsum trànsferatur C: Utrumvis fiat, tantò minor erit ponderum singulorum Distantia dextrorsum (vel major sinistrorsum) quanta est $EC = \frac{1}{4}D$. Adeóque (per 17 hujus) expositæ ponderationi dextrorsum, tantum aufertur (vel additur ponderationi sinistrorsum) quanta est 5 PD. Quod erat imperatum.

Similiter omnino fieret, si Augenda esset Ponderatio dextrorsum (vel ponderatio sinistrorsum minuenda;) nisi quod tunc vel Pondera dextrorsum movenda essent, vel C (Centrum, Axis, Perpendiculum, perpendiculi Succedaneum, vel Perpendiculare per axem Planum) sinistrorsum; quo appensionum distantiæ dextrorsum augeantur, vel minuantur sinistrorsum.

SCHOLIUM.

Hinc fieri potest, ut quæ priùs fuerat sive Dextrorsum sive Sinistrorsum Ponderatio, in Æquilibrium evanescat; (putà, si Ponderationi + 10 PD, tantundem auferatur; quippe + 10PD − 10PD = ±0PD:) vel, ut Ponderatio prius Dextrorsum, jam fiat Sinistrorsum; vel contra; (putà si Ponderationi + 10 PD, auferatur 15PD; quippe + 10 PD − 15 PD = − 5 PD:) Quod per 16 hujus (quâ docetur, *in datâ ratione* minuere) non fiet; in quâcunque enim ratione (quæ infinita non sit) minuatur, verbi gratia, + PD; manebit adhuc, signo + affectum.

PROP. XX.

Datis Ponderibus quotlibet; unà cum communi Motûs & libræ Centro (vel perpendiculo per Centrum Motûs, ejúsve Succedaneo, vel motûs Axe, aut per hunc plano Perpendiculari;) atque applicationum Punctis, aut horum inde Distantiis.

Vel; Datis saltem summa Ponderum, & simul omnium Ponderatione ad datas partes.

Punctum Libræ datæ (vel Perpendiculum illud, aut Perpendiculi Succedaneum; vel Perpendiculare Planum per Axem; prout ab hoc aut illo Distantia data fuerit;) invenire: quo si suspenderentur omnia, similiter ponderarent; Nempe, tantundem, atque ad datas partes.

Quod ipsum inventum Libræ Punctum; est Centrum Æquilibrii; estque Unicum. Et Perpendiculum inventum, aut Perpendiculi Succedaneum; est Perpendiculum Æquilibrii, aut Succedaneum hujus; estque item Unicum. Et inventum Herpendiculare Planum; est Planum Æquilibrii Perpendiculare; estque hoc (ex planis plano huic per Axem parallelis) Unicum.

$$\frac{+10G=10PD}{20P} = +\tfrac{1}{2}D. \qquad \frac{+lrDP+msDP-ntDP}{+rP+sP+tP} = \frac{+lr+ms-nt}{r+s+t}D.$$

ESto (ut in Prop. 18.) expositum C centrum motûs & libræ (vel Fig. 77. Perpendiculum per motûs centrum, aut perpendiculi Succedaneum, vel Perpendiculare Planum per motûs Axem; juxta conditiones ad Prop. 15 memoratas:) Atque exposita Pondera; quorum summa sit, verbi gratiâ, 20 P: Et simul omnium Ponderatio, ut 10 G, vel 10 PD; dextrorsum.

Vel, exponantur singula seorsum Pondera, cum suis Distantiis; unde, per 18 hujus, hæc summa & Ponderatio colligi possint.

Datur,

Datur, inquam, Diſtantia (per 15 hujus) quâ ſi ad datas partes hoc totum Pondus, vel ſumma Ponderum, ſuſpendatur ſimiliter ponderabit. Nempe $\frac{+10G=+10PD}{20P}=+\frac{1}{2}D$. Hoc eſt; ſi Dextrorſum (quod innuit ſignum $+$) in Diſtantiâ $\frac{1}{2}D$ (putà in puncto E, diſtantiæ C D medio; vel ubivis in perpendiculo, aut perpendiculi ſuccedaneo, per E tranſeunte; vel in perpendiculari per E plano, plano per axem motûs parallelo;) ſuſpendantur ſimul omnia Pondera ſeu ſumma ponderum 20 P: Similiter ponderabunt, atque jam in ſuis ſingula ſuſpenſa locis; nempe ut $+10G$, vel $+10PD$. Quod erat inveſtigandum.

Vel, Univerſaliter: In diſtantiis $+lD$, $+mD$, $-nD$, &c. appenſa pondera rP, sP, tP, &c. ponderant ut $+lrDP$, $+msDP$, $-ntDP$, &c. (per 18 hujus.) Horum Aggregatum, ſi per ſummam Ponderum dividatur; quod prodit $\left(\frac{+lrDP+msDP-ntDP}{rP+sP+tP}=\right)\frac{+lr+ms-nt}{r+s+t}D$, eſt Diſtantia (Dextrorſum, aut ſiniſtrorſum, prout notata ſignis $+$ aut $-$ præpollent) quâ ſi ſumma Ponderum ſuſpendatur, ſimiliter Ponderabunt: per 15 hujus. Quod erat inveſtigandum.

Dico porro; Libræ punctum E ſic inventum, Æquilibrii Centrum eſſe; (Quódque per hoc tranſit Perpendiculum, vel Perpendiculi Succedaneum; eſt Perpendiculum Æquilibrii; vel Succedaneum hujus: Et, Perpendiculare planum per E, perpendiculari per axem Plano parallelum; eſt Perpendiculum Æquilibrii Planum.)

Cum enim ita gravant Libram omnia ſimul Pondera, atque ſi ex E puncto (vel per illud tranſeunte Perpendiculo, Planóve perpendiculari) dependerent omnia (per jam demonſtrata:) Si ipſum E libræ centrum fiat (vel ubivis in eo Perpendiculo, Planóve ſuſpendantur;) nihil ponderabunt, ſive neutrum prægravabunt Brachium, per 12 & 13 hujus. Erítque propterea (per 6 hujus, vel def. Centri Æquilibrii) libræ punctum E, Centrum Æquilibrii: Et (per def. Perpendiculi Æquilibrii, hujúſve Succedanei, & Plani Æquilibrii) Perpendiculum illud, ejuſve Succedaneum; erit Perpendiculum Æquilibrii, aut huius Succedaneum; & Planum illud, erit Perpendiculare Planum Æquilibrii. Quod erat demonſtrandum.

Vel etiam; Quia, poſito C Centro libræ, tantundem ſimul omnia dextrorſum Ponderant, atque ſi in diſtantiâ C E dextrorſum, ſuſpenderentur omnia: Si Centrum transferatur à C in E (vel a Perpendiculo, Succedaneóve, vel Perpendiculari per Axem Plano, per C, ad parallelum per E Planum rectámve) tantundem omnium (ubicunque dependeant)

vel

vel minuitur diſtantia dextrorſum, vel (quod eodem recidit) augetur ſiniſtrorſum, quanta eſt C E recta (vel parallelorum diſtantia.) Adeóque (per præced.) tantundem Ponderationis, vel dextrorſum demitur, vel additur ſiniſtrorſum, quanta eſt ſimul omnium Ponderatio in diſtantiâ C E: hoc eſt, per modò demonſtrata, tota Ponderatio dextrorſum tollitur. Eritque propterea (per 6 hujus, vel def. Centri Æquilibrii) E Centrum Æquilibrii. (Et ſimiliter, per ſuas reſpective definitiones, oſtendetur, de Perpendiculo Æquilibrii, ejúſve Succedaneo; & Perpendiculari Plano Æquilibrii.) Quod demonſtrandum erat.

Denique: Centrum Æquilibrii unicum eſſe dico: (& ſimiliter unicum eſſe Perpendiculum Æquilibrii, aut hujus Succedaneum; Unicum item Perpendiculare planum plano per Axem parallelum.)

Poſito enim, verbi gratia, E centro æquilibrii; quo ſcilicet ſuſpenſa libra in neutram partem propendet: Si inde in utramvis partem ad quamcunque diſtantiam transferatur Centrum Motûs, putâ ad C; vel ex illâ parte minuetur, vel ex alterâ augebitur omnium diſtantia; adeóque & Ponderatio (per præced.) Præponderabit itaque brachiorum alterum (per 9 Cap. 1.) Adeóque non erit C centrum Æquilibrii. (Et ſimiliter de Perpendiculo Æquilibrii, ejúſve Succedaneo, vel de Perpendiculari Plano, oſtendetur.) Quod erat ultimò demonſtrandum.

PROP. XXI.

Datâ dati Ponderis (ſive unius, ſive ex pluribus aggregati) ad datum aliquod libræ punctum ut commune motûs & libræ Centrum (vel ad datum Perpendiculum, Succedaneúmve, vel Perpendiculare planum per axem) Ponderatione: Datur ejuſdem, ad aliud quodvis libræ punctum ut commune Centrum motûs & libræ (vel Perpendiculum, Succedaneúmve, aut Perpendiculare planum parallelum, ut dictum eſt) aſſignatum, Ponderatio.

NAm, propter data duo Centra (vel Perpendicula, Succedáneáve, aut parallela Plana) adeóque ſecundi à priore Diſtantiam ad datas partes: Datur (per 12, 13, & 17 vel 19 hujus) quantum dati ponderis ponderationi datæ ad datas partes, addendum erit vel auferendum, propter tranſlatum Centrum (vel Perpendiculum, Succedaneúmve, aut Perpendiculare

pendiculare planum.) Adeóque quanta erit, & ad quas partes, Ponderatio respectu posterioris. Quod erat propositum.

Putà; si Pondus, vel ponderum Aggregatum, ut 20 P, ponderet ad C Centrum (vel Perpendiculum, Planúmve perpendiculare) ut $+ 10 PD$, dextrorsum; & transferatur centrum (Perpendiculum, planúmve) ad E; ut sit, verbi gratia, distantia $CE = \frac{1}{4} D$ dextrorsum; auferendum erit $+ \frac{1}{4} D \times 20 P = + 5 PD$. Adeóque ponderabit ad E, ut $+ 10 PD - 5 PD = + 5 PD$.

Si $CE = \frac{1}{2} D$: auferendum $+ \frac{1}{2} D \times 20 P = + 10 PD$. Adeóque ponderabit, ut $+ 10 PD - 10 PD = 00$.

Si $CE = D$: auferendum $+ D \times 20 PD = + 20 PD$. Adeóque ponderabit, ut $+ 10 PD - 20 PD = - 10 PD$; hoc est, ut 10 PD sinistrorsum.

Similiter omnino, si sumeretur E sinistrorsum; nisi quòd quæ jam auferenda sunt, tunc essent addenda; & contra.

PROP. XXII.

Datâ Centrorum Libræ motúsque & Æquilibrii (vel Perpendiculorum per Centrum æquilibrii & per Centrum motûs; vel Plani Perpendicularis per motûs axem & huic paralleli Plani Æquilibrii) ab invicem Distantiâ ad datas partes: Ex cognito Pondere (vel summa ponderum) cognoscitur Ponderatio; vel, cognitâ ponderatione, pondus vel summa ponderum.

$$+D \times P = +DP = +G. \qquad \frac{+G = +DP}{+D} = P.$$

CUm enim appensum Pondus, vel summa Ponderum utcunque appensorum, perinde libram gravant atque si omnia ex Centro Æquilibrii (vel in perpendiculari Plano per Centrum Æquilibrii, plano per Axem motûs perpendiculari Parallelo) dependerent; per 20 hujus. Adeóque per 12 & 13 hujus, in ratione quæ ex Distantiæ, & Ponderis (seu summæ Ponderum) rationibus componitur; atque ad eas partes quà est æquilibrii Centrum Planúmve. Datis, tum ad datas partes Distantiâ,

Distantiâ, tum summâ Ponderum; datur Ponderatio (quanta, & ad quas partes:) Vel, Datis Distantiâ & Pondertaione; Pondus datur, vel summa Ponderum. per 15 hujus. Quod erat probandum.

PROP. XXIII.

Datis Pondere (seu summâ Ponderum) & Ponderatione ad datas partes: Datur Centri Æquilibrii (Perpendiculi, Planive, in quo est) à Plano per axem motûs transeunte, (vel, in datâ librâ per centrum motûs transeunte, à Centro libræ) Distantia ad datas partes.

Adeóque; Plani Perpendicularis per axem motûs, & huic paralleli Plani Æquilibrii: Vel, in dato Libræ Plano, Perpendiculorum (aut Succedaneorum) per centrum Motûs & Centrum Æquilibrii: Vel, in datâ librâ per centrum motus transeunte, Centrorum Motûs & Æquilibrii: Uno dato, datur reliquum.

Cum enim Ponderatio ad datas partes, sit in ratione quæ componitur ex rationibus Ponderis (seu summæ ponderum) & Distantiæ Centri Æquilibrii (perpendiculivè aut plani in quo illud est) sive à communi Motûs & libræ Centro; sive à Perpendiculo per centrum motûs eiúsve Succedaneo; sive à plano per axem motûs perpendiculari; ad datas partes: per 12, 13, & 20 hujus: Datâ Ponderatione ad datas partes, & ipso pondere seu summa Ponderum; datur ad illas partes Distantia, per 15 hujus.

Adeóque (in datâ librâ) distantium punctorum uno insuper dato, datur reliquum (putà, dato centro libræ per centrum motûs transeuntis, datur Centrum Æquilibrii; vel, dato centro Æquilibrii, datur istius libræ Centrum:) Similiter, distantium Perpendiculorum (per Centrum Motûs, & per Centrum Æquilibrii,) dato uno, datur reliquum: Item, Planorum perpendicularium (per Axem motûs, & paralleli Plani Æquilibrii,) dato uno, datur reliquum. Quod propositum erat.

PROP. XXIV.

Libram vulgarem Officinarum Conſtruendi, rationem exponere.

Fig. 51. LIbra vulgaris Officinarum, intelligitur Centro ſuo ſuſpendi; Brachiáque æquali præciſè à Centro longitudine utrinque porrigi: Atque ab horum extremis dependere Lances, ad Æquilibrium redactæ: Quarum uni impoſito noto Pondere, ignotum priùs Pondus in altero æſtimatur. Quippè cùm æqualibus utrinque a Libræ Centro diſtantiis, ſint appenſa: Quod noto Ponderi, ſic appenſum Æquiponderat, Æquale Pondus eſt: Sin majus; præponderabit, adeóque deorſum feretur: Si minus; elevabitur. Sequitur ex 12 hujus.

SCHOLIUM.

QUò exactiores ſint hæ Libræ; requiritur, ut hæc quæ ſequuntur, Obſerventur.

1. Ut Brachia utrinque ab Axe (quo ſuſtinetur Libra) porrecta (unà cum Lancibus reliquiſque armamentis) ſint ejuſdem præciſè ponderationis; (præſertim dum ſitu Horizontali ponitur, à quo ponderationis initium ſumi ſolet:) Hoc eſt, ut in ipſo præciſè Æquilibrii perpendiculo ſuſtineatur Libra, cum armamentis. Quippe ſi alterum Brachiorum (cum armamentis ſuis) prædonderet, ea propendebit Libra; indéque appenſo Ponderi inique favebit, per 2 hujus.

2. Ut ex ſui Jugi Centro æquilibrii præciſè dependeat. Sive, ut Axis Libræ ſit Axis Æquilibrii. Nam (per 10 hujus) ſi Axis ſit vel tantillum infra Centrum æquilibrii; libra in alteram partem detruſa non revertet, ſed planè præcipitabitur, ut uſui omnino futura ſit incommoda. Si ſupra Centrum Æquilibrii ſit Axis; Revertet quidem detruſa Libra; ſed hoc habet cum priori ſitu commune incommodum, quod Libra ipſa in alteram partem præponderabit, eam ſcilicet quà erit Æquilibrii Centrum. Unde, ut in priori caſu præcipitatio promovetur (propter Libræ præponderantiam ad ſitum decliviorem) ita in hoc caſu (ubi præponderantia Libræ eſt ad partem contrariam) revocatur quidem Libra ne præcipitetur, ſed ſimul minùs ſincerè ſuum munus peragit; dum illa Libræ præponderantia, ponderis ex eâ parte appenſi partibus favet. Quæ conſtant omnia ex 10 hujus.

3. Ut

3. Ut ejuſdem ſint præciſè longitudinis ipſa Brachia: Quæ quidem ab ipſo Axe ſeu Centro Motûs, ad ipſa Appenſionum Puncta, æſtimanda eſt. Quippe ſi Brachiorum alterum altero longius ſit; minus ex illo dependens Pondus, majori ex altero dependenti, æquiponderabit. per 12 hujus.

Atque hinc oriri poteſt inſignis impoſtura. Putà, ſi, qui merces vendunt pondere æſtimandas, Bilancem ita conſtitutam habeant, ut vacuæ lances æquiponderent, brachiorum autem alterum altero ſit longius: Poſitis enim in lance ex longiori brachio dependente Mercibus; &, in contrariâ, noto Pondere: Mercium Pondus minus, majori Ponderi in oppoſitâ lance æquiponderabit, in fraudem emptoris.

4. Ut liberrimè ex Appenſionum punctis dependeant (cum ſuis oneribus) Lances. Eo nempe fine, ut, in quemcunque ad Horizontem ſitum reciprocetur Jugum, Onus tamen (vi prop. 31. Cap. 2.) eidem ſemper Jugi puncto ſubſit; adeóque æquali ſemper à Centro diſtantiâ ſuſpendi intelligatur, Quippe ex eo Libræ puncto ſuſpendi intelligitur, cui directè ſubeſt: per 4 huius.

5. Ut ipſa, in libræ Jugo, Appenſionum puncta, ſint in eâdem præciſè Lineâ Rectâ cum ipſo Motûs Centro; ſive (quod eodem recidit) in eodem cum Axe Plano cui Examen Perpendiculariter inſiſtit. Quippe ſi vel infra, vel ſupra, ſint Appenſionum Puncta; (cum tantundem valeant appenſa Pondera, atque ſi in ipſis eſſent, per 4 hujus) pro vario libræ ſitu, variabitur momentorum ratio: ut ad 14 huius oſtenditur, in caſu 2; ubi Centrum Motûs eſt extra Libram; hoc eſt, extra rectam illam quæ appenſionum puncta conjungit; per 9 & 12 def. hujus.

6. Ut duo Brachia, ſint, quàm commodè fieri poteſt, Longa. Quò enim longius à Centro diſtant Appenſionum puncta, eò plus ponderant, tum ſigillatim appenſa Pondera (per 12 hujus) tum (quod inde ſequitur) comparatorum Ponderum Differentia: (cui ponderando æquipollent ſimul utraque pondera, contrariis Lancibus impoſita; per 5 hujus.) Unde, quod, in brevi Jugo, ſenſum fugiat diſcrimen, idem, pro Jugi longitudine auctum, evadet ſatis notabile.

7. Ut Jugi firmitas tanta ſit (pro ratione Ponderum ad illud exigendorum) ut non vel rumpatur, vel inflectatur. Hoc utique adverſaretur def. 2 & 9 hujus; quæ Libram Jugúmque inflexile ſupponunt. Et (ne cæteris immoremur) illis ſaltem incommodis obnoxium erit, quæ, ex Centro Motûs extra libram poſito oriunda; modò memoravimus.

8. Ut Axis Acies, quâ ſuſtinetur jugum (quæque per ipſius Centrum gravitatis, vel Æquilibrii, tranſire intelligitur) Tum Acuta ſit (ad inſtar quaſi lineæ Mathematicæ, quam referre intelligitur) quò facilius

ciliùs in utramvis partem reciprocetur Libra: Tum situ Horizontali constituta (quippe Libra circa Horizontalem Axem sincerius libratur, utpote in Plano ad Horizontem recto, in quo, cæteris paribus, Pondera magis gravitant, & suapte sponte feruntur, per 25, 26, Cap. 2.) Tum denique ut Declivitatem habeat utrinque æqualem (nam siqua motus est declivior, eà magis propendebit Libra; per 17, Cap. 2.) Adeóque ut Axis Cuneum referat, cujus duo plana in Aciem coeuntia, sint (posito Jugo in situ Horizontali) ad Horizontem æqualiter inclinata; & simul Trutinæ foramina, quibus sustineri solent Axis extrema, ita subtus comparata sint ut ab infimo puncto, cui incumbit Axis acies, æquali utrinque acclivitate assurgant; utrinque enim (nempe tum ob formam Axis indebitam, tum foraminum Trutinæ inæqualem acclivitatem) oriri poterit inæqualitas in declivitate motûs.

9. Ut, quam fieri possit per alia incommoda, tenue sit & leve Jugum, cum armamentis suis. Nam (per 2 huius) utut, cæteris ut dictum est comparatis, ipsum Jugi Pondus, cum Lancibus reliquâque armaturâ, Librationem quod spectat, nullius instar habeatur: Axem tamen, quo sustinetur premit, ejúsque obtundit aciem, quo minus circa illum liberè rotetur libra. Adeóque quo minus fuerit Jugi pondus, eò minus hinc incommodi, cæteris paribus, oborietur.

10. Denique; pro variâ Gravium ad Examen exigendorum pondere & magnitudine, aliter atque aliter prospiciendum erit in fabricâ Libræ. Nempe, in Aurifabrorum & Gemmariorum Bilancibus quibus res minutissimæ ad examen revocantur; maximè prospiciendum erit ut accurate omnia fiant, quó levissimum Ponderis discrimen detegatur. Quos quidem tantâ cura accuratione fieri nonnunquam dicitur ut $\frac{1}{400}$ unius grani huc illuc vertatur, imò (quod in Honoratissimi *Boylii* nostri accuratissimâ quâdam Bilance observatum est) parte unius grani, $\frac{1}{1024}$; (quod coram compluribus testibus fide dignis experimento facto sæpius comprobatum fuit.) Ubi autem res, magnæ Molis & Ponderis, librandæ veniunt (ut in Fabrorum ferrariorum negotiis, aliisque magni moliminis rebus fieri solet) magis prospiciendum erit firmitati totius machinæ: Adeóque ita attemperanda sunt quæ de Longitudine Brachiorum, de tenuitate & levitate Jugi, de Aciei Axis acumine, reliquísque hujusmodi, suprà diximus; ut firmitati totius machinæ non officiatur. Et quidem, quæ ad Centipondium pendendum paratur Libra, non minùs accurata censebitur, si uno scrupulo vertatur; quam quæ ad Drachmam pendendam comparatur, si vertatur parte $\frac{1}{480}$ unius grani.

grani. Nam ut Centipondium in se contineat scrupulos 28800; ita Drachma continet $\frac{28800}{480}$ unius grani; computando scilicet in Librâ seu Pondo 12 Uncias; in Unciâ, 8 Drachmas; in Drachmâ, 3 Scrupulos; in Scrupulo, 20 Grana:) Adeóque; utrobique eâdem appensi Ponderis parte aliquotâ vertitur.

PROP. XXV.

Stateram Romanam construendi rationem exponere.

STatera, quam (ob usum ejus frequentem Romæ) *Romanam* vocant; à vulgari Librâ, Brachiorum longitudine, potissimum differt: Quæ non, ut Vulgaris Libra, Æqualia habet; sed, pro variâ Ponderum comparandorum ratione, variè Inæqualia. Porrecto nempe ab Axe Motûs (qui & Axis Æquilibrii esse debet) Brachiorum altero, ut CA, in certam longitudinem, putà unius Pollicis, aut etiam minorem; in altero Brachio, ut CB, quantumvis porrecto, distinguunt partes ipsi CA longitudine æquales, quot opus videbitur, distantiis 1, 2, 3, 4, &c. terminatas; (quas etiam in particulas quotlibet æquales distribuunt.) Fig. 80.

Appenso itaque Q Quæsito Pondere seu explorando ex A; Pondus datum seu notum P, ex Brachio contrario dependens, à puncto C removendo & admovendo explorant in quâ distantiâ fiet æquilibrium. Atque invento, verbi gratia, pondus P in distantiâ 5, ponderi Q in A, æquiponderare: hinc colligunt (propter Pondera Distantiis reciprocè proportionalia) Pondus Q, ponderis P noti, quintuplum esse. Cujus Demonstratio ex 12 hujus dependet.

SCHOLIUM.

HOc habet Statera hæc, præ vulgari Librâ commodum: Tum ut uno Pondere noto, quodcunque explorandum ponderent: Tum ut minus gravetur Centrum vel Axis Libræ. Quamquam enim rotationem quod spectat tantundem valet P in 5, atque 5 P in 1; non tamen æqualiter gravant Axem; Ut ad 18 hujus ostensum est.

FINIS.

Errata sic emendentur.

PAg. 9. *l. pen. l* ad *r.* *p.* 10. *l.* 28. quàm quod. *p.* 25. *l.* 6. *marg.* Fig. 20, 21. *p.* 38. *l.* 22. judicium. *p.* 57. *l.* 32. impediatur. *p.* 61. *l.* 1. esset. *p.* 70. *l.* 31. Ascendat. *p.* 75. *l.* 9. per 31. *p.* 86. *l.* 10. accommodanda. *p.* 96. *l.* 16. sustinentur. *p.* 98. *l.* 27. 3D4P. *p.* 99. *l.* 23. 20P, illic suspensa. *p.* 108. *l.* 26. Quas.

MECHANICA:

SIVE,

De MOTU,

TRACTATUS GEOMETRICUS.

Authore *JOHANNE WALLIS* S S. Th. D.
Geometriæ Professore *Saviliano* in Celeberrima Academia *OXONIENSI*; *Regalis Societatis* LONDINI, *pro Scientia Naturali promovenda*, Sodali; & *REGIÆ Majestati* à Sacris.

PARS SECUNDA.

IN QUA,
De Centro Gravitatis;
Ejusque Calculo.

LONDINI,
Typis *Gulielmi Godbid*; Impensis *Mosis Pitt*, ad Insigne *Albi Cervi* in vico vulgo vocato Little-Britain.
M DC LXX.



MECHANICORUM,
SIVE
Tractatûs DE MOTU:
PARS SECUNDA:
Quæ est
DE CENTRO GRAVITATIS, Ejusque CALCULO.

AD LECTOREM MONITIO.



Equis miretur, quòd Pars *hæc* Secunda, *præter solitum, ex abrupto inchoari videatur; continuatis tum Capitum, tum Figurarum, tum Paginarum Numeris: Lectorem monendum duxi, id pluribus de causis contigisse. Primò quidem, quòd non ab initio statueram particulatim edere; sed simul & semel opus integrum emittere. Et quidem (ut dicam quod res est) Partis hujus Secundæ pars quasi dimidia jam ante impressa fuerat, quàm vel Partem Primam (anno præterito) ediderim, vel Opus ipsum in Partes distribuendum putaverim. Sed partim Operarum Moræ, quæ Opus Typothetis difficile, atque inusitatum, in longum protraxerant; partim aliorum impatientia, qui ut saltem Partem illam præmitterem efflagitarunt; fecere, ut loco commodo Sectionem facerem. Verùm, si id in causâ non fuisset; alia tamen ratio est (quæ etiam ab initio fecit, ne Opus hoc in* Libros *partirem,) cur sic fecissem. Quippe; cùm frequentissima occurrat Citationum occasio; si, quoties* Figura *vel* Propositio *citanda foret, toties, præter ipsarum Numeros, tum* Libri *seu* Partis, *tum* Capitis *Numeri recensendi essent: Omnino minùs commode id fieret, quàm (quod hic fit) ubi Figura quælibet unico Numero, & quælibet Propositio vel unico vel saltem duobus Numeris designatur. Atque ob eandem causam, etiam sequentis Partis Numeri cum Numeris Secundæ continuandi erunt.*

CAP.



CAP. IV.

De Centro Gravitatis.

DEFINITIO.

Continuum quodvis (ſecundum Cavallerii Geometriam Indiviſibilium) intelligitur, ex Indiviſibilibus numero infinitis conſtare.

UT, ex infinitis Punctis, Linea; Superficies, ex infinitis Lineis; & ex infinitis numero Superficiebus, Solidum: Item ex infinitis temporis Momentis, Tempus, &c.

Hoc eſt; (ut nos idem explicamus in noſtra Arithmetica Infinitorum, & Tract. de Con. Sect.) ex particulis Homogeneis, infinitè exiguis, numero infinitis; Idque (ut plurimum) ſecundum unam ſaltem dimenſionem æqualibus.

Fig. 81. PUtà; Linea, ex infinitis punctis, hoc eſt, Lineolis infinitè exiguis, longitudine æqualibus, vel æquè altis; quarum cujuſvis longitudo vel altitudo ſit $\frac{1}{\infty}$ (pars infiniteſima) longitudinis vel altitudinis totius lineæ.

Fig. 82. Item, Superficies ex infinitis lineis ſive rectis ſive curvis parallelis; hoc eſt, ſuperficieculis (lineis illis interjectis) æquè altis, quarum cujuſvis altitudo ſit infiniteſima pars totius altitudinis; aut etiam ex punctis (quibus illæ lineæ intelliguntur conſtare) hoc eſt ex ſuperficieculis æqualibus & ſimilibus, quarum cujuſvis magnitudo ſit $\frac{1}{\infty}$ totius areæ.

Item; Solidum, ex infinitis numero ſuperficiebus, hoc eſt ſolidulis æquè altis ſive æque craſſis, quorum cujuſvis altitudo vel craſſities ſit $\frac{1}{\infty}$ totius; vel, lineis numero infinitis (ex quibus intelliguntur illæ ſuperficies conſtare) puta ex totidem Priſmatis, ſitu paral-

parallelis, quorum bases (communi plano sectorum ad ea recto) similes sint & æquales, quarum magnitudo sit $\frac{1}{\infty}$ istius quo secantur plani; vel etiam, ex punctis (quibus illæ lineæ intelliguntur constare) hoc est solidulis exiguis, æqualibus, quorum singulorum magnitudo intelligatur $\frac{1}{\infty}$ totius.

Quæ quidem Lineolæ, Superficieculæ, Solidula, &c. variis modis disposita intelligi solent, prout constructori videatur expedire. Exempli gratia; Circulus dicetur, hoc sensu, ex infinitis numero rectis parallelis constare, ad eandem unam aliquam diametrum ordinatim applicatis; hoc est, Parallelogrammis æque altis: Fig. 83. vel ex infinitis numero Circumferentiis concentricis; hoc est, annulis Fig. 84. æque crassis: vel ex infinitis numero radiis; hoc est, sectoribus, vel triangulis similibus, &c. Et Sphæra similiter, sive ex infinitis Fig. 85. numero planis æque crassis; sive ex totidem superficiebus Sphæricis concentricis; sive ex infinitis numero sectoribus sphæricis, aut Pyramidulis; &c.

Dico tamen, *ut plurimum*, ita fieri, ut illæ particulæ secundum unam saltem dimensionem sint æquales: Neque enim illud necessario exigitur; quin, si id aliquando expedire videbitur, pro altitudinibus (verbi gratiâ) æqualibus, poterit constructor vel arithmetice proportionalibus, vel secundum aliquam aliam ordinatam seriem crescentibus vel decrescentibus uti.

Hoc est (secundum Mathematicum rigorem) saltem inscribi potest, vel circumscribi, vel aliàs adaptari, ex hujusmodi particulis conflatum, quod ab exposito differat quantitate infinitè exiguâ, sive quæ datâ quâvis minor sit.

Puta; in Circuli peripheriâ, ex arcubus numero infinitis, conflabitur curva quæ peripheriæ exactè congruat; sed & eidem peripheriæ inscribi potest ex subtensis numero infinitis, vel circumscribi ex infinitis numero tangentibus, conflata linea, quæ à peripheriâ illâ deficiat, vel eam superet, differentiâ quæ datâ quâvis minor sit. Unde factum est, ut Circulus, pro Polygono regulari laterum numero infinitorum, haberi soleat. Et, in aliis curvilineis, similiter.

Item Circuli Plano, aptari potest, sive ex Annulis; sive ex Sectoribus, figura quæ circulo accuratè congruat: Sed & eidem inscribi potest vel circumscribi, sive ex Parallelogrammis, sive ex similibus Triangulis figura, cujus ab exposito circulo differentia, sit datâ minor. Atque in aliis similiter.

Atque hanc, de Indivisibilibus, doctrinam (nunc passim receptam, atque, post Cavallerium, à celeberrimis Mathematicis approbatam) pro Veterum continuâ figurarum Adscriptione, substituere visum est; ut breviorem; nec tamen, minùs demonstrativam, si debitâ cautione adhibeatur.

Hanc interim definitionem, utut Capiti V. maximè subservituram, huic IV. Capiti præfigo, quoniam & hic alicubi usui erit. Ut siquando Grave, per omnia sui puncta, designem, &c. nec velim tamen perperam intellectum iri.

Sin Demonstrandum hoc, non Definiendum, putet quis; Ego quidem pro eatenus demonstrato habeo quatenus demonstratione opus sit, ex demonstratâ ab aliis Methodo Indivisibilium. Hic utique id agitur, ut definiam quo sensu velim hujusmodi quæ occurrunt intelligenda; quod est Definitionis opus.

Definitio *Centri Gravitatis*, habetur in Capite præcedente.

PROPOSITIONES.

PROP. I.

Si Puncto unico, ut Centro Motûs, sustineatur Grave (vel ex pluribus conjunctis gravibus aggregatum:) poterit nihilo minùs in quasvis partes, circa illud rotando moveri; non aliàs.

Si duobus punctis, pluribúsve in eadem rectâ, ut motûs Axe sustineatur: poterit, circa illam rectam, in utramvis partem rotando moveri; non aliàs.

Si tribus (pluribúsve) non in eâdem rectâ punctis sustineatur: in nullas partes movebitur.

Fig. 86. Intelligatur Grave quodvis A B F, unico puncto M ut Centro motûs sustineri. Manifestum est, stante hoc puncto M, in quascunque circa hoc moveatur partes, eandem posse totius figuram retineri. Quippe in quodcunq; Superficiei Sphericæ centro M descriptæ moveatur (verbi gratia) punctum A; (hoc est, in quascunque partes circa M rotetur;) nihil impedit quin & reliqua puncta, ut B, ita simul moveantur, ut eandem

eandem quam priùs inter se positionem retineant. Puta, ut A, B, sint in eâdem quâ priùs distantiâ; sitque A B F idem angulis, iisdemque ut prius cruribus comprehensus, &c.

Sin duobis punctis, ut X, S, (vel pluribus in eâdem rectâ) aut etiam ipsâ X S rectâ, ut Axe motûs sustineatur: Manifestum est, stante rectâ X S, adeóque omnibus in illa punctis, posse aliud quodvis punctum, circa hanc ut Axem, vel prorsum vel retrorsum peripheriam describere, reliquáque simul puncta, ita ut necesse erit quò eandem inter se positionem retineant, moveri; similes item peripherias circa eundem Axem describendo.

Súntque hæc duo, vel ita ex Elementis perspicua, vel per se manifesta, ut in 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, deff. 11 Euclidis (quæ Sphæram, Conum, & Cylindrum spectant) quasi pro postulatis supponantur.

Sed dico porro; Stante centro motûs M, non posse, nisi circa hoc rotando, moveri grave: Propter eandem, quam manere supponimus distantiam, cujus libet sui puncti, tum ab M puncto, tum à sui quovis alio. Per def. Centri motûs.

Item; Stantibus X, S, punctis; non posse aliàs quam circa hanc rectam rotando (ut circa Axem) moveri. Quippe omnia ejusdem X S rectæ puncta, eodem situ manere certum est; (secus enim non possent eandem quam priùs ab utroque distantiam retinere:) Quæque extra hanc rectam puncta, si aliter moveantur quam circulos circa X S axem describendo, non retinebunt eandem ubique tum ab X tum ab S distantiam; (quod ex Elementis Sphæricis facilè constabit.) Et, nisi simul ita moveantur omnia (hoc est, nisi totum grave circa X S axem rotetur) non eundem inter se situm conservabunt; (quod supponitur.) Non igitur aliàs quam sic rotando movebitur.

Denique: Si tribus punctis, ut X S A (nedum pluribus) non in eâdem recta, sustineatur: Non movebitur. Cum enim stantibus X S, non posse aliter, quam rotando circa X S ut Axem, moveri grave, jam ostensum sit: non posse autem sic moveri, stante etiam (extra hanc rectam) puncto A; (utpote quod, cùm extra Axem sit, non à reliquis moti punctis omnibus, nisi & ipsum simul moveatur, eandem distantiam retinebit, quod Rotationis definitio postulat:) non omnino movebitur.

SCHOLIUM.

INtelligitur Propositio, de Gravi (seu gravium Aggregato) duro & constante; eousque saltem constante, ut, ea quæ adhibetur Vi, nec frangatur, nec luxetur aut incurvetur; quin eandem (saltem æquipollentem)

tem) retineat figuram omniúmve ipsius partium inter se positionem respectu totius, utcunque situm seu positionem respectu loci mutent: Non de Gravi fluido seu molli, quod promiscue incurvetur, vel figuram suam mutet, partiúmque inter se positionem. Quod & in aliis subinde propositionibus intelligendum erit.

Puncta vero, ut M, X, S, &c. quibus sustineri intelligitur grave; adeóque immotis illis, moveri; sive sint in ipso Gravi, sive extra, perinde est. Sed utcunque ita cum Gravi quod movetur quasi connecti intelligenda sunt, tanquam ipsius puncta essent; & eandem cum reliquis Gravis punctis positionem retineant, utcunque moveatur Grave.

Puncto autem (uno vel pluribus) sustineri dicetur illud Grave; quando (retentâ suâ ad Gravis partes singulas positione) loco suo minimè dimoveri intelligatur punctum illud, seu plura puncta.

Denique; Quod, de Gravium Aggregato (dum ita, ut dictum est, connecti intelligantur) tanquam pro uno Gravi habendo; hic insinuamus: idem in sequentibus intelligendum erit. (Quippe & Gravium Aggregatum, Grave est.) Quod semel moneo; ne singulis identidem propositionibus repetere opus sit.

PROP. II.

Si rectâ quâvis, ut Axe Motûs, ad Horizontem perpendiculari sustineatur grave; in nullam partem gravitate suâ præponderabit; Adeòque, sibi sic permissum non movebitur.

Fig. 87. NAm, stante rectâ, ut X S, ad Horizontem perpendiculari (adeóque ipsius punctis omnibus eodem situ manentibus;) quodcunque, extra hanc, punctum moveatur, ut A, peripheriam describet, ut A α, circa X S ut Axem (per præced.) adeóque in Horizontali plano: (Cum enim X S perpendicularis sit, tum ad planum circuli, utpote cujus Axis est; tum ad Horizontem, ex hypothesi; erit circuli planum illud Horizontale; per 14 El. 11.) In quo quidem plano cùm nullus sit Descensus, aut Præponderatio; nec fiet, ob gravitatem, motus. (per 4, 9, 23, cap. 2.) Cúmque de omnibus gravis punctis perinde constet, constat de Gravi toto; Quod erat propositum.

SCHOLIUM.

SCHOLIUM.

Rectâ verò sustineri dicetur Grave, si duobus saltem ipsius punctis sustineatur; quippe sic tota recta eodem situ retinebitur; ut ad prop. præced. ostensum est.

PROP. III.

Si Grave rectâ quâvis, ut motûs Axe, non ad Horizontem perpendiculari, sustineatur; sitque in Plano per Axem Motûs incedente constitutum, ad Horizontem recto; (quod, *Perpendiculare planum per Axem*, dicimus;) in neutram partem præponderabit; Adeóque sibi sic permissum, non movebitur.

Sin extra illud Planum constitutum sit; ad Planum illud, infra motûs Axem feretur.

Per X S motûs Axem (vel Horizonti parallelum, vel utcunque obliquum) incedat Planum Horizonti rectum X S A, in quo intelligatur constitutum Grave. Erit quodcunque Gravis punctum vel in ipso Axe, ut M; vel infra, ut B; vel supra Axem, ut A. Fig. 88. 89.

De puncto M, manifestum est, stante X S, ipsum M item stare; utpote quod est in ipsâ X S rectâ.

De B, constat; Cum enim (per 1 hujus) non possit B moveri, stante X S, quin peripheriam rotando describat, ut B N A; ad cujus planum rectus est X S Axis; Cujus quidem Peripheriæ punctum infimum est ipsum B (per 20 Cap. 2.) Inde non movebitur sponte suâ: Quippe Grave (per def. Gravitatis) non nisi Descensûs Ergô, gravitate suâ movebitur.

Idem denique, de A constat: Quippe cum non possit A moveri (per 1 hujus) nisi peripheriam, ut A N B, circa X S ut axem describendo; cujus (per 20 Cap. 2.) tum supremum punctum est ipsum A, tum Descensûs utrinque pariter Declivis; in neutram partem feretur. per 8, 17 Cap. 2.

Cumque hoc constet de singulis Gravis punctis, sive infra, sive supra, sive

sive in ipso Axe; constat de Gravi toto, sic constituto, in neutram partem præponderare; adeóque nec motum iri. Quod erat propositum.

Sin extra hoc planum constitutum sit Grave: ipsius puncta singula, quæ extra planum sunt, ut N; intermedia erunt, in suis respectivè peripheriis, inter punctum supremum, ut A, & infimum ut B (per 20 Cap. 2.) adeóque deorsum ad B feretur, per 2, 8, Cap. 2. Quod erat ultimò demonstrandum.

PROP. IV.

Si circa rectam quamvis, ut Axem, (sive Horizontalem, sive utcunque obliquum,) rotetur Grave; eâ ratione ponderant ipsius puncta singula æqualiter gravata (aut illis applicata pondera æqualia) quâ distant à Perpendiculari per Axem Plano.

Adeóque: Si inæqualiter gravata; in ratione ex Ponderum (sive Gravaminum) & Distantiarum rationibus compositâ.

Fig. 90. Sit primùm Axis XS, in plano Horizontali; atque in eodem Horizontali plano puncta quotlibet A, B, E. Unde ducantur ad Axem normales AC, BX, ES: (quæ itaque, per def. 4 El. 3. plano per Axem perpendiculari normales sunt, punctorum ab eo Plano distantiam mensurantes.) Cúmque, per 1 hujus; non possint alias A, B, E, puncta, quam rotando ferri; (circulorum peripherias Centris C, X, S, describendo; & quidem, propter situm Axis Horizontalem, ad Horizontem rectorum;) Erunt AC, BX, ES, totidem Libræ, circa sua respectivè Centra C, X, S, rotatæ: Adeóque, per 12, 13, Cap. 3. A, B, E, puncta, in eodem plano horizontali posita, æqualiter gravata, ponderant in ratione distantiarum, AC, BX, CS: Inæqualiter verò gravata; in eâ quæ ex harum, & Ponderum rationibus componitur. Quod erat propositum.

Deinde; Manente Axe XS, in situ Horizontali; (quò plana circulorum rotatione factorum, sint adhuc ad Horizontem recta:) Sint, extra planum Horizontale, puncta Gravis quotlibet, $\alpha, \beta, \varepsilon$: (sive in eodem

eodem, sive diversis Planis, perinde est:) Unde, ad Planum Horizontale ducantur perpendiculares; puta αA, βB, εE. Intelligatur autem, per ipsum Axem XS, erigi Planum ad Horizontem perpendiculare; atque ad hoc perpendiculares rectæ, ακ, βξ, εσ; vel his æquales Fig. 91. (utpote parallelæ parallelis terminatæ) AC, BX, ES. Ostendetur (ex prop. 18. cap. 2. vel 4, 13 cap. 3.) tantundem ponderare eadem pondera in α, β, ε, atque in A, B, E,. Hoc est; (per jam demonstrata) in ratione distantiarum AC, BX, ES, vel ακ, βξ, εσ, si Puncta sint æqualiter gravata; vel, si inæqualiter, in ratione quæ ex harum & Ponderum rationibus componitur. Quod erat propositum.

Denique: Sit situs Axis ad Horizontem utcunque obliquus: Reliquáque, ut prius, constructa. Nempe, in eodem XSABE plano Inclinationis, rectæ AC, BX, ES, Axi ad angulos rectos; in quas scilicet cadunt, a punctis α, β, ε, demissæ Perpendiculares ad idem Planum, αA, βB, εE. Similiter omnino procedet demonstratio, nisi quod Circuli rotatione descripti, qui prius erant ad Horizontem recti, nunc fiant obliqui; adeóque propter planorum Obliquitatem, minuuntur Ponderum Momenta. Est autem, propter eundem omnium axem, eadem circulorum omnium Obliquitas; Adeóque in eâdem ratione minuuntur Ponderum Momenta, per 26 Cap. 1. Quam itaque rationem inter se haberent Momenta Ponderum in A, B, E, α, β, ε, in erectis circulis; eandem & hic habebunt in circulis æqualiter inclinatis (per 5 cap. 1.) Hoc est (per jam demonstrata) in ratione distantiarum à Perpendiculari per Axem Plano, ponderabunt, si sint æqualiter gravata; vel, si inæqualiter, in ratione quæ ex harum & Ponderum, rationibus componitur. Quod erat ultimò demonstrandum.

Brevi. Summa Demonstrationis huc redit. Cùm quæ ad prop. 12 & 13 cap. præced. Ponderationum Rationes traduntur, in hanc universalem propositionem conspirent, *Æqualia Pond ra, circa axes æqualiter inclinatos, ponderare in ratione distantiarum à plano per Axem Perpendiculari; Et, Inæqualia, proportionaliter:* (Quæcunque sit vel Axis, vel Libræ ad Horizontem positio; &, sive per Centrum Motûs transeat Libra, sive secus; item, sive sint ad eandem vel diversas Libras, sive in eodem vel diversis Planis librentur:) Constat propositum, de quocunque Axis situ, non ad Horizontem recto; & de quocunque Punctorum ad Axem situ. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

SCHOLIUM.

DE Situ verò Axis ad Horizontem recto, non agit hæc Propositio; (ut neque sequentium aliquot:) Quoniam, hoc casu (propter rotationum circulos Horizonti parallelos) nulla erit cujusvis puncti, utcunque gravati, ad motum circa axem propensio, seu Ponderatio: ut dictum est, Prop. 2. hujus.

PROP. V.

Si Perpendiculare Planum, per motûs Axem, incedens; secet Grave in partes invicem æquiponderantes: (Hoc est; Si Perpendiculare Planum per Axem sit Planum Æquilibrii:) Non movebitur, sibi sic permissum, Grave.

Sin Segmentorum alterum, reliquo præponderet; (dummodo non sit Axis motûs, ad Horizontem perpendicularis:) Eà feretur; eatenus donec fiat Æquilibrium. Et simul utraque æquipollent excessui præpollentis.

Adeóque; Non erunt, ejusdem gravis (aut Aggregati gravium) duo Æquilibrii Plana invicem parallela.

Fig. 92. DE Axe motûs ad Horizontem recto; constat propositum; ex 2 hujus.

De Axe motûs non ad horizontem recto; sic demonstratur.

Si perpendiculare planum per XS motûs axem, dividat Grave in segmenta A, B: horum utraque (gravia cum sint, & extra perpendiculare planum posita) hac illac Descensum molientur (per 3 hujus;) Et quidem utrumque (propter rotationem circa XS axem, per 1 hujus) cum Ascensu contrarii; adeóque contraponderabunt: Si itaque æquiponderant: contrarii conatus æquales, se mutuò sustinebunt; nec fiet motûs. Si alterum præponderet: hoc reliquum superabit; adeóque motus horsum fiet, donec Æquilibrio impediatur (per 12 cap. 1.) Duóque simul conatus contrarii: æquipollebunt excessui præpollentis. (per 8 cap. 1.) Quæ demonstranda erant.

Atque

Atque hinc sequitur: (Quod etiam ante demonstratum est, ad prop. 20. cap. præced.) Non dari, ejusdem gravis (aut aggregati gravium) duo parallela Plana Æquilibrii. Nam si Planum per XS sit Planum Æquilibrii; huic Parallelum, puta per YT, non erit. Nam (positis utrisque ad horizontem perpendicularibus) si segmenta XSA, XSB, æquiponderant, segmenta YTA, YTB, non æquiponderabunt. Nam XSTY intersegmentum, æquiponderantium uni ablatum, alteri additum, momenta faciet inæqualia; per 9 cap. 1. Saltem, si intersegmentum illud nullum sit (sed quasi vacuum, inter duo connexa Gravia interjectum;) fiet utcunque segmentorum alterum, ut XSB, longius ab YT quam ab XS; propius autem alterum YTA: Adeoque illius momentum augebitur, hujus minuetur (per 13 cap. 3) & destruetur Æquilibrium, per 9 cap. 1. Fig. 93.

SCHOLIUM.

PLana Perpendicularia, *Parallela*, hic appello (& subinde aliàs, ubi eadem ratio) quando Horizontales Rectæ unius, sunt alterius Rectis Horizontalibus, parallelæ. Quamquam enim, perpendicularia cum sint Plana, in Terræ centro coeant; eâdem tamen ratione (ne longâ periphrasi opus sit) Parallela Plana dicentur, quâ Perpendicula (propter immensam Centri terræ distantiam) pro Parallelis Rectis haberi solent.

PROP. VI.

Si rectâ quâpiam, ut Axe, non ad Horizontem perpendiculari, sustentum Grave, quiescet: Idem Grave, eodem situ constitutum, aliâ quâvis ejusdem ad Horizontem perpendicularis Plani rectâ sustentum, pariter quiescet.

Rectâ verò extra hoc Planum, plano Parallelâ (non ad Horizontem rectâ) si ut Axe sustineatur: non, eo situ constitutum, quiescet.

PUtà: Si AB Grave, Axe XS (non ad Horizontem recto) sustentum, quiescet: Perpendiculare Planum per hunc incedens, ut YXST, grave dirimet in A, B, segmenta, invicem æquiponderantia: Fig. 94.

(Nam

(Nam si alterutrum præponderaret, non quiesceret Grave; per præced.) Sumptâ igitur aliâ quâvis in eodem Plano rectâ, ut Y T: quum per hanc incedens Planum Y X S T (ut jam ostensum est) secet Grave in partes invicem æquiponderantes: Axe Y T sustentum, sic constitutum Grave, quiescet. per præced.

Sin aliâ quâvis, extra hoc Planum, rectâ (quæ Plano parallela sit, & non ad Horizontem recta) ut Axe, sustineatur: non, eo situ, quiescet. Quippe, si quiesceret hac aliâ rectâ sustentum; esset, per hanc incedens perpendiculare Planum, Planum Æquilibrii; (nam, nisi æquiponderarent segmenta, non quiesceret; per præced.) Estque plano priori parallelum; (quod, propter parallelam plano per quam incedit rectam, non ad horizontem perpendicularem; &, quem supponimus, Perpendiculorum parallelismum; probabitur ex 15 El. 11.) Adeóque, duo essent parallela Plana Æquilibrii. Quod (per præced.) fieri non potest.

PROP. VII.

Si Æquilibrii Axe sustineatur Grave: quocunque situ ponatur, sibi sic permissum, quiescet.

Et contra; Si Axe motûs sustentum Grave, quocunque situ ponatur quiescet: Axis ille motûs, est Axis Æquilibrii.

NAm; Si Æquilibrii Axe sustineatur Grave; quocunque situ ponatur Grave; (nempe; quocunque ad Horizontem situ ponatur Axis ille; & quodcunque Planum per hunc motûs Axem, constituatur ad Horizontem rectum:) Perpendiculare Planum per Axem, Planum erit æquilibrii: (per def. Axis Æquilibrii.) Adeóque non movebitur, sibi sic permissum Grave; per 5 hujus.

Conversa similiter patet. Nam, nisi motûs Axis ille, sit Axis Æquilibrii; erit saltem aliquod Planum per hunc incedens, quod Planum Æquilibrii non erit (per def. Axis Æquilibrii.) Adeóque, posito hoc Axe non in situ ad Horizontem recto; positoque illo non Æquilibrii Plano, in situ perpendiculari; Movebitur Grave: per 5 hujus. Quod est contra hypothesin.

PROP.

PROP. VIII.

Si unico sui puncto sustineatur Grave: quocunque situ ponatur; saltem unum per punctum illud incedens Perpendiculare planum, est planum Æquilibrii.

Adéoque; Per omne Gravis Punctum incedit aliquod Æquilibrii Planum.

SIt XASB Grave; puncto sui M sustentum; per quod transeat Perpendiculum AMB; pérque hoc incedat AMBN perpendiculare Planum. Erit hoc AMBN, vel Planum Æquilibrii (adeóque habetur quod erat probandum;) vel segmentum alterum, puta ABNS, præponderabit. Quo casu; Planum AMBN (cujus faciem alteram, putà quæ S respicit, Anteriorem dicemus; alteram, Posteriorem;) intelligatur, immoto Gravi, imaginatione converti circa AMB axem; donec eo perveniatur ut quæ utrinque sunt segmenta Gravis Æquiponderent. Hoc enim omnino fore certum est: Quippe, factâ semi-conversione, quod erat ab anteriore conversi Plani facie, à posteriore relinquetur, segmentum Gravis præponderans; & contra: Cúmque à præponderantiâ anticâ ad posticam sic continuo motu perventum sit; eo momento quo ab hac ad illam transibatur, neutra erat; sed, æquiponderantia. Quódque cum converso Plano, hoc situ posito, coincidit immotum, per Grave, Planum; est Perpendiculare Planum Æquilibrii. Fig. 88.

Unde & constat Corollarium. Quippe quovis sui puncto sustentum intelligi possit Grave.

PROP. IX.

Si unico sui puncto sustineatur Grave: Per illud incedens Perpendiculare Planum Æquilibrii, manebit Horizonti rectum.

Ideoque; vel quiescet grave; (nempe si perpendiculum per centrum motûs, seu punctum illud quo sustinetur grave, sit Perpendiculum Æquilibrii istius Plani sic gravati.)

Vel (si perpendiculum illud non sit Perpendiculum Æquilibrii istius plani) rotabitur circa Horizontalem Axem, Plano illi rectum, per centrum motûs seu punctum illud quo sustinetur Grave transeuntem; donec ad Æquilibrium redigatur.

Sin Planum aliquod Perpendiculare, non sit Planum Æquilibrii: Segmentum præponderans descendet (adeoque obliquabitur Planum;) donec ad Æquilibrium redigatur.

Unde; Si duo quævis per idem punctum plana perpendicularia sint Plana Æquilibrii: etiam reliqua sic erunt; eritque Perpendiculum per illud Punctum, Axis Æquilibrii.

Fig. 88. PEr punctum M, quo sustineri intelligatur Grave, transeat tum XS recta Horizontalis, quæ pro onusta Libra habeatur; tum huic ad angulos rectos AMBN Perpendiculare planum per Axem, Grave dirimens in duo segmenta AMBX, AMBS; quibus respective onerantur MX, MS, libræ brachia, per 13 cap. 3.

Cumque (per præced.) ex Perpendicularibus per M planis, saltem unum aliquod sit Planum Æquilibrii: Intelligatur, primo, illud AMBN planum Æquilibrii; adeoque (per def. Plani Æquilibrii) AMBX, AMBS, segmenta invicem Æquiponderantia. Erit igitur M (per def. 13. cap. 3.) centrum Æquilibrii. Quo cum (ex hypothesi) sustineatur Libra, in neutram partem movebitur, per 7 vel 10 cap.

cap. 3. Adeoque nec obliquabitur A M B N, sed manebit (ut prius) Horizonti rectum. Quod erat primo demonstrandum.

Adeoque; vel non movebitur Grave, vel circa manentem X M S axem rotabitur, per 1. hujus. Illud quidem; si A M B sit Perpendiculum Æquilibrii istius plani A M B N sic gravati (sive A M S B X perpendiculare planum Æquilibrii per axem X S;) Hoc, si secus (puta si segmentum alterum, ut A M B N præponderet;) per 5 hujus. Quæ itidem erant demonstranda.

Sin A M B N perpendiculare planum aliquod per M, non sit planum Æquilibrii; hoc est, si segmentum alterum præponderet, puta A M B S, quo gravatur M S Brachium: Descendet hoc (adeoque obliquabitur A M B N planum) donec ad Æquilibrium redigatur (per 5 hujus, vel 5 cap. 3.) Quod erat item demonstrandum.

Si itaque duo Plana per idem M punctum Perpendicularia, ut A M B N, A M S B X, sint utraque Æquilibria Plana, etiam reliqua per illud punctum perpendicularia plana erunt item plana Æquilibrii (adeoque A M B, axis Æquilibrii.) Cum enim propter Æquilibrii Planum A M B N, non moveatur grave nisi rotando circa illius plani axem; & simili de causa, non nisi circa axem plani A M S B X; (qui quidem Axes, cum suis respective planis perpendiculares esse debeant, non erunt eadem recta;) non omnino movebitur grave (propter tria saltem, non in eadem recta, puncta permanentia) per 1 hujus. Sed (per præcedens membrum hujus) si quod sit ex perpendicularibus planum, quod non sit planum Æquilibrii, movendum esset Grave: Nullum igitur est. Quod ultimo erat demonstrandum.

PROP. X.

Si Perpendiculum per Centrum motûs, sit Axis Æquilibrii; sibi permissum Grave, non movebitur.

Rectáque illa, quæ si sit Perpendiculum per Centrum motûs, Grave non movebitur; est Axis Æquilibrii.

CUm enim (per def. Axis Æquilibrii) quodvis per illum transiens Planum, sit Planum Æquilibrii: Si Axis Æquilibrii sit in Perpendiculo per Centrum motûs; quodvis per centrum motûs incedens Per-

Perpendiculare Planum, est Planum Æquilibrii. Adeóque sponte suâ non movebitur sic sustentum Grave; per præced.

Et Conversa similiter patet. Nam nisi Perpendiculum per Centrum motûs, sit Axis Æquilibrii; aliquod saltem per illud incedens Planum, non erit Planum Æquilibrii (per def. Axis Æquilibrii:) Adeoque Grave movebitur; (per præcedentem.) Quod est contra Hypothesin.

PROP. XI.

In quovis Æquilibrii Plano, per quodvis ipsius Punctum, incedit Axis aliquis Æquilibrii.

Adeóque, per omne Gravis punctum incedit aliquis Axis Æquilibrii.

Fig. 88. EXpositum Æquilibrii Planum, ut A M B N, intelligatur in situ ad Horizontem recto constitutum. Ejúsque puncto quovis, ut M, sustineatur Grave. Quod itaque (per 9 hujus) non nisi rotando circa Axem plano illi rectum, ut X M S, movebitur. Et Perpendiculum per Centrum motûs, ut A B, erit vel perpendiculum Æquilibrii istius Plani sic gravati: Vel, eatenus circa X M S rotabitur grave, donec hoc contingat; & sic positum, sibi permissum Grave quiescet. per eandem 9 hujus. Eáque Gravis recta, quæ, sic quiescente Gravi, in A M B perpendiculo per M transeunte jacebit, est Axis Æquilibrii. per præced.

Corollarium constat: Cum (per 8 hujus) per quodvis Punctum transeat Planum Æquilibrii.

PROP.

PROP. XII.

Si à puncto fixo libere dependens Grave, unico sui puncto, ut Centro motûs sustineatur: Non priùs quiescet quam illud sui punctum sit in eodem perpendiculo cum puncto fixo; Planúmque quodvis per illud perpendiculum incedens, grave dirimat in partes invicem æquiponderantes.

In eo verò situ constitutum (nempe, cum Perpendiculum appensionis, est Axis Æquilibrii;) sibi sic permissum, quiescet.

Si verò, posito Gravi in hoc situ quietis; solvi intelligatur in gravi vinculum, illudque alio jam sui puncto sustineri; Sítque hoc aliud punctum in eodem quo priùs Axe Æquilibrii; quiescet adhuc sic situm Grave.

Sin extra illum Æquilibrii Axem sit hoc aliud Punctum; non, eo situ, quiescet.

Adeóque; Non erunt, ejusdem Gravis, duo Æquilibrii Axes invicem paralleli.

A puncto F liberè dependens, puncto sui X sustineatur A X B grave. Non priùs inquam, quiescet, quàm ipsum X punctum sit in F X perpendiculo: quod &, ibi positum, consistet. Cùm enim unico X puncto sustineatur Grave (quod itaque punctum, totius onere gravatur, per 18 Cap. 2.) si extra perpendiculum sit, eo feretur: ibique constitutum, consistet X punctum sic gravatum. per 31 Cap. 2. Fig. 95.

Sin, posito X puncto in perpendiculo F X, per quod incedet Planum aliquod Perpendiculare, dirimens expositum Grave in A, B, duo segmenta inæqualiter ponderantia: nondum quiescet Grave. per 9 hujus.

Si verò ita constitutum sit, ut, Planorum perpendicularium per F X incedentium, nullum non dividat grave in partes invicem Æquiponderantes; Hoc est, si Perpendiculum illud sit Axis Æquilibrii: non movebitur sic appensum Grave. per 9 hujus.

Dico

Dico porro; Si (posito Gravi in hoc statu quietis) soluto vinculo in X, alio ejusdem perpendiculi puncto ut C, sustineatur Grave; Quiescet adhuc in eodem situ positum. Cùm enim, ex constructione, idem sit perpendiculum F X & F C; sitque F X Axis Æquilibrii; erit & F C Axis Æquilibrii. Adeóque (per 10 hujus) quiescet Grave.

Sin alio, extra hanc rectam puncto, ut Y, sustineatur; puta perpendiculo G Y (priori parallelo; saltem nonnisi in Centro Terræ occurrente, quod pro parallelo jam habemus;) non eo situ quiescet. Intelligatur enim planum quodvis Perpendiculare (aliud quam G Y X F) per G Y incedens, Grave dirimens in segmenta Y T A, Y T B; & huic plano parallelum, per F X incedens, Grave dirimens in segmenta X S A, X S B. Cúmque sit ex hypothesi, illud per F X (Æquilibrii Axem) Planum Æquilibrii; non erit huic parallelum per G Y, Planum Æquilibrii (per 5 hujus:) Adeóque nec G Y, Axis Æquilibrii; (per def. Axis Æquilibrii:) Nec hujus, in perpendiculo manentis, uno puncto sustentum, Grave quiescet, per 10 hujus. Non igitur alio, extra hunc F X S Æquilibrii Axem, puncto sustentum; eodem situ constitutum quiescet. Nec erit alius Axis Æquilibrii, exposito F S parallelus. Quæ demonstranda erant.

PROP. XIII.

Si Centro Gravitatis sustineatur Grave: quocunque situ ponatur, sibi sic permissum, non movebitur.

Punctúmque illud, quo si sustineatur, Grave non movebitur quocunque situ positum; est Centrum Gravitatis.

Cum enim (per def. Centri Gravitatis) quævis per illud transiens recta, sit Axis Æquilibrii: Si sui Centro Gravitatis sustineatur Grave, quocunque situ ponatur, perpendiculum per Centrum illud motûs, erit Axis Æquilibrii. Adeóque non movebitur sic sustentum Grave. per 10 hujus.

Et conversa similiter patet. Nam, nisi Punctum illud, quo, ut Centro Motûs, sustinetur, sit Centrum Gravitatis; aliqua saltem per illud incedens recta, non erit Axis Æquilibrii (per def. Centri Gravitatis.) Adeóque, positâ hac rectâ ad Horizontem perpendiculari, non quiescet unico illo puncto sustentum Grave. per 10 hujus. Quod est contra hypothesin.

PROP. XIV.

In Æquilibrii Axe quovis; est Centrum Gravitatis. Nempe; illius Axis, ut Libræ considerati, Centrum Æquilibrii.

CUm Æquilibrii Axe, ut XS, sustentum Grave, quocunque situ positum, quiescet (per 7 hujus;) Adeóque totum Gravis onus sustineat Axis ille (per 18 Cap. 2. vel 2, 4, 18, Cap. 3.) Intelligatur XS recta, sic onusta, secundum Libræ longitudinem applicari; vel ipsa etiam, pro Librâ censeatur. Hujúsque sic onustæ Libræ, quæratur (per 20 Cap. 3.) Centrum Æquilibrii. Quod sit C. Dico C, Centrum Gravitatis esse, totius Gravis. Fig. 96.

Cum enim idem C punctum, in quocunque Gravis situ, sit illius (sive Axis sive Libræ) XS, Centrum Æquilibrii; (quod statim demonstrabitur:) Manente puncto C, non movebitur XS recta. per 7 Cap. 3. Si itaque C puncto, ut Centro Motûs, sustineatur Grave: Neque circa manentem rectam XS (utpote quæ est Axis Æquilibrii) rotabitur; Neque (propter C, centrum Æquilibrii) movebitur Axis ille: (quæ jam ostensa sunt:) Nec potest aliàs moveri Grave; (per 1 hujus.) Adeóque, puncto C sustentum, sponte suâ non movebitur, quocunque situ constitutum Grave. Estque propterea, Punctum C, Centrum Gravitatis; (per præced.) Quod erat demonstrandum.

Quod autem idem C punctum, sit, ejusdem axis Æquilibrii XS, Centrum Æquilibrii, quocunque situ constituatur Grave: Sic ostenditur.

Sit primùm, ita utcunque constitutum Grave, ut expositus æquilibrii Axis XS, sit in situ Horizontali constitutus. Per ipsius, ut onustæ libræ, Centrum Æquilibrii C, transeat Axis libræ; qui itaque ad libram XS normalis erit; & quidem in situ Horizontali; (cùm enim intelligatur XS libra unico sui puncto C, ut centro motûs, sustineri, adeóque ad nullam axis positionem aliter quàm gravitate suâ determinari, libratur in plano ad Horizontem recto, utpote omnium maxime declivi; adeóque circa axem Horizontalem; ut in Scholio Prop. 12. Cap. 3. dictum est:) atque per hunc axem perpendiculare Planum ACB; quod

quod itaque (propter C centrum æquilibrii, ex constructione) est æquilibrii Planum perpendiculare per axem motûs, grave dirimens in duo segmenta A B X, A B S, invicem æquiponderantia. Atque hoc eo usque saltem permanebit, utcunque moveatur grave, dum idem gravis planum X A S Horizontale maneat (puta, vel rotato utcunque circa Perpendiculum per C Gravi, vel etiam altiùs humiliusve elevato aut depresso:) per 13 Cap. 3. Quippe eadem adhuc manebit omnium tum ad Horizontem inclinatio, tum ab A C B perpendiculari per axem plano distantia.

Deinde; Manente ut prius, X S axe utcunque in situ Horizontali: intelligatur utcunque circa illum rotari Grave, in quemcunque situm ad axem (nempe ut quodlibet planorum, per X C S transeuntium, perpendiculare fiat:) Dico, etiamnum idem A C B planum, planum esse æquilibrii; adeoque C, ut prius, æquilibrii Centrum. Cùm enim omnia utriusque segmenti puncta, in planis ipsi A C B parallelis rotentur; Manebunt adhuc in eâdem quâ priùs ab A C B, perpendiculari per axem motûs, distantiâ: Adeoque in eâdem quâ prius ratione ponderabunt; per 4 hujus, vel 13 Cap. 3. Cùm itaque priùs, respectu A C B plani, æquiponderabant segmenta A B X, A B S; etiamnum æquiponderabunt. Eritque propterea, C, ut prius Centrum æquilibrii.

Denique; Quocunque Planorum per X S transeuntium, manente ad horizontem recto; Intelligatur X S libra utcunque ad Horizontem inclinari: Dico etiamnum idem C punctum, esse libræ X S centrum Æquilibrii.

Fig. 97. Ne autem, propter Solidi in Plano repræsentationem, linearum multitudo ducendarum, turbet phantasiam; eâ projectione in figurâ utor, quæ oculum supponit in ipso motûs axe per C transeunte, atque in distantiâ infinitâ. Et propterea, tum axis ille in unicum C punctum projicitur; tum Rectæ quævis huic parallelæ, in totidem respectivè puncta: Planáque per axem omnia, in totidem rectas; in ipso X A C B S per libram Plano perpendiculari. Quæ quidem Projectio, ut Phantasiam juvat, ita nec Rationes perturbat: Quoniam (per cas. 4. prop. 14. cap. 3.) perinde omnino ponderat (respectu C axis) quocunque ejusdem rectæ (puta per D transeuntis) axi parallelæ, puncto intelligatur grave. Eadem utique est singulorum ejusdem punctorum ab A C B perpendiculari per axem Plano distantia, atque ipsius D ab A C B perpendiculo.

Intelligatur itaque, utcunque circa C rotato Gravi, X C S Libra (& simul Planum libræ per axem) ex situ Horizontali in situm Ξ C Σ, utcunque

utcunque ad Horizontem inclinatum delata: Cui respondeat, in eodem Perpendiculari plano, in situ Horizontali, X C S; hujúsque punctis D, E, F, &c. puncta illius *d*, *e*, *f*, &c. Intelligatur autem Grave totum, ex partibus (æqualibus an inæqualibus, pluribus an paucioribus, adeóque numero finitis an infinitis, perinde est) puta tribus L, M, N, constare; (& quidem, vel in ipsis perpendicularis plani punctis L, M, N; vel in L, M, N, rectis, axi parallelis; utcunque positis, dummodo sit X C S axis æquilibrii;) ad libræ puncta, in situ horizontali positæ, D, E, F, applicatis; ut quæ (per 4 cap. 3. & cas. 4. prop. 14. ejusdem) similiter ponderent ac si in ipsis D, E, F, punctis intelligantur. Delatâ verò librâ X C S, in Ξ C Σ; delata simul erunt (propter rotationem totius gravis) D, E, F, L, M, N, puncta ponderáque, in *d*, *e*, *f*, *l*, *m*, *n*. Erit, inquam, adhuc A C B perpendiculare planum æquilibrii per axem; adeóque C centrum æquilibrii. Fig. 97.

Nam, translatis D, E, F, punctis, in *d*, *e*, *f*, minuentur quidem horum (propter obliquationem libræ) ponderationes (per 13 cap. 3.) Sed in eâdem ratione minuentur; adeóque, quod priùs erat æquilibrium etiamnum manebit (per cas. 1. prop. 14. cap. 3.) si ad eadem quæ priùs libræ puncta D, E, F, hoc est *d*, *e*, *f*, applicata maneant pondera L, M, N, hoc est *l*, *m*, *n*.

Cum autem; pro ponderum *l*, *m*, *n*, infra suprave libram fixâ positione; motâ librâ mutentur applicationum puncta, puta, ex *d*, *e*, *f*, in δ, ε, φ; adeóque mutetur ponderationum ratio; (per cas. 3. prop. 14. cap. 3.) Ponderum *l*, *m*, quæ supra libram fixa intelliguntur, ponderationibus sinistrorsum auferendum aliquid; addendum vero ponderationi sinistrorsum ponderis *n* infra libram fixi; (nempe, prout in præsenti schemate ponuntur; & similiter, mutatis mutandis, in quâcunque sive obliquationis libræ, sive ponderum ad obliquatam libram positione.) Sunt autem Addenda illa vel Auferenda (per 17 cap. 3.) in eâ ratione quæ componitur ex ratione Ponderum *l*, *m*, *n*; & ratione rectarum *d*δ, *e*ε, *f*φ, hoc est (propter similia triangula *l d* δ, *m e* ε, *n f* φ) rectarum *d l*, *e m*, *f n*: Adeóque in eâ ratione quâ ponderarent eadem Pondera circa axem Ξ C Σ libranda; per 13 cap. 3. Adeóque (per 12 El. 5.) in eâdem ratione est summa Auferendorum ponderationibus *l*, *m*; ad Addendum Ponderationi *n* (vel summam addendorum, si plura essent;) quâ esset ponderum *l*, *m*, circa axem Ξ C Σ ponderatio; ad ponderationes ponderis *n*, circa eundem axem. Adeóque cùm sint Ponderationes hæ (propter X C S vel Ξ C Σ axem Æquilibrii, ex hypothesi) invicem æquales; etiam Addenda Auferendis sunt æqualia: adeóque perinde simul valent, atque si nihil vel adderetur vel auferretur,

 per

per 8 cap. 1. (Quodque de Auferendis Addendísve ponderationi ſiniſtrorſum dictum eſt, perinde eſt atque ſi de Addendis Auferendiſve ponderationi dextrorſum diceretur: quippe idem valet, plus ad dextram, atque, minus ad ſiniſtram.) Cùm itaque; applicatis ponderibus *l*, *m*, *n*, ad puncta *d*, *e*, *f*, eſſet A C B planum Æquilibrii per axem, ut ſupra oſtenſum eſt, (adeóque ſimul omnium ponderatio, nulli in utramvis partem æquipolleret;) & C centrum Æquilibrii: Erit ſimiliter, idem C, centrum æquilibrii; ponderibus ut nunc applicatis ad puncta δ, ε, φ.

Eſt igitur idem C punctum, æquilibrii Centrum, axis æquilibrii XCS, quocunque ſitu conſtituatur Grave. Quod demonſtrandum ſuſcepimus.

SCHOLIUM.

$$\begin{array}{ccc} P & 3P & 3P \\ +6D & +D & -3D \\ \hline +6DP & +3DP & -9DP = \pm 0DP. \end{array}$$

$$+6dP + 3dP - 9dP = \pm 0dP.$$

EXempli gratiâ. Si intelligantur pondera L = 1P. M = 3P. N = 3P. Diſtantia verò CD = +6D. CE = +1D. CF = −3D. Erit Ponderum ad libræ X C S puncta D, E, F, applicatorum ponderatio reſpectu axis C; ut $P \times +6D = +6DP$. $3P \times +D = +3DP$. $3P \times -3D = -9DP$. Adeóque ſimul omnium, ut $+6DP + 3DP - 9DP = \pm 0DP$. (Atque hoc, ex constructione; ponitur enim C, centrum Æquilibrii.)

Et ſimiliter (diminutis in eâdem ratione omnium ponderationibus, propter obliquationem libræ, putà in ratione *d* ad D) eorundem ponderum ad libræ Ξ C Σ puncta *d*, *e*, *f*, applicandorum ponderationes, erunt ut $+6dP + 3dP - 9dP = \pm 0dP$.

$$\begin{array}{ccc} P & 3P & 3P \\ +6D & +3D & -5D \\ \hline +6DP & +9DP & -15DP = \pm 0DP. \end{array}$$

$$+6\delta P + 9\delta P - 15\delta P = \pm 0\delta P.$$

Eorundem verò Ponderum à Plano per Axem X C S vel Ξ C Σ, diſtantiæ; puta rectæ D L, E M, F N; vel *d l*, *e m*, *f n*; ſint ut +6 D, +3 D, −5 D; Et his proportionales (putà in ratione δ ad D) *d* δ, *e* ε, *f* φ; ut +6 δ, +3 δ, +5 δ. Adeóque eorundem Ponderationes ad axem X C S, vel Ξ C Σ; ut $+6DP + 9DP - 15DP = \pm 0DP$: (Idque, ex hypotheſi; ſupponitur enim X C S, axis æquilibrii.)

Atque (his proportionales) ponderationes auferendæ $+6\delta P + 9\delta P - 15\delta P = \pm 0\delta P$.

His

His itaque ritè ſubductis (additiſve reſpectivè) à ponderationibus priùs poſitis, tanquam in d, e, f, punctis; prodibit Æquilibrium, ſive $\pm 0\,dP \mp 0\,\delta P = \pm 0\,0$.

Verbi gratiâ; Si ponamus d ad δ, ut 3 ad 1; vel, ut 1 ad $\frac{1}{3}$; Ex $+6dP+3dP-9dP$, ſubductis $+6\delta P\ +9\delta P\ -15\delta P$, hoc eſt, $+2dP+3dP-5dP$; manebunt $+4dP \pm 0dP - 4dP = \pm 0dP$.

$$
\begin{array}{l}
+6dP+3dP-9dP = \pm 0dP \\
-2dP-3dP+5dP = \mp 0dP \\
\hline
+4dP \pm 0\,dP - 4dP = \pm 0dP
\end{array}
$$

Si ponamus d ad δ, ut 3 ad 2, vel, ut 1 ad $\frac{2}{3}$: Ex $+6dP+3dP-9dP$, ſubductis $+6\,\delta P+9\delta P-15\delta P$, hoc eſt, $+4dP+6dP-10dP$; manebunt $+2dP-3dP+1dP=\pm 0dP$.

$$
\begin{array}{l}
+6dP+3dP-\ 9dP \\
-4dP-6dP+10dP \\
\hline
+2dP-3dP+\ 1dP = \pm 0dP.
\end{array}
$$

Adeóque; Utut ea Portio quæ dextrorſum ponderabat priùs vel ſiniſtrorſum; motâ librâ, vel in neutram partem, vel in oppoſitam ponderet: non tamen deſtruitur, ſimul-omnium æquilibrium.

PROP. XV.

Cujuſque Gravis, Centrum Gravitatis unicum eſt: Idque tum in omnium Axium Æquilibrii, tum in Planorum Æquilibrii omnium concurſu.

Eſtque omne per illud tranſiens Planum, Planum Æquilibrii; omníſque recta tranſiens, Æquilibrii Axis.

INtelligatur AB Grave, puncto ſuì X ſuſtentum, ex F puncto fixo Fig. 98.
liberè dependens, in ſitu quietis poſitum; Hoc eſt, ita dependens ut FXS perpendiculum, ſit Axis Æquilibrii; (per 12 hujus.) In quo itaque perpendiculo (per præced.) Eſt Centrum Gravitatis; Alio autem, extra hoc perpendiculum, puncto ſuſtentum Grave, non, in eo ſitu, quieſcet; (per eandem 12 hujus;) Adeóque, extra hoc perpendiculum, non eſt Centrum Gravitatis; Nam ſiquod eſſet, eo ſuſtentum Grave, etiamnum in illo ſitu quieſceret, per 13 hujus.

Intelligatur deinde, ſoluto vinculo in X alio ſui extra rectam FXS continuatam puncto ut Y ſuſtentum, ex puncto fixo ut G liberè dependens, quieſcere; Adeóque (per 12 hujus) in eum ſitum redigi gravitate ſuâ, ut Axis Æquilibrii per Y tranſiens, (eſt utique aliquis, per 11 hujus,)

jus) sit in G Y perpendiculo, puta G Y T. Ostendetur, ut priùs, tum in G Y T (infinita rectâ) centrum Gravitatis esse; tum, extra hanc non esse.

Cùm itaque ostensum sit, tum in rectarum (infinitarum) X S, Y T, utrâque tum, non extra utramvis, esse Centrum Gravitatis; cúmque illæ non nisi in uno intersectionis puncto, ut C, communicent: unicum erit Centrum Gravitatis, C.

Est autem in Æquilibrii omni sive Axe sive Plano (per 11 & 14 hujus) centrum aliquod Gravitatis: Cum itaque unicum esse, jam ostensum sit; erit hoc unum in omnium concursu.

Quódque omnis per illud transiens recta sit Axis Æquilibrii, omnéque Planum per illud transiens, Æquilibrii Planum: ex definitionibus constat.

PROP. XVI.

Manente, in eâdem à Terræ Centro altitudine, Centro Gravitatis: neque Descendere censendum est Grave, neque Ascendere.

Tantundem verò vel Ascendere vel Descendere censendum est Grave, quantum Ascendit, vel Descendit Centrum Gravitatis.

Adeoque (quoniam hoc in aliis Gravis motibus perinde obtinet) perinde Ponderando valet Grave utcunque situm, atque si in illo puncto totum esse intelligeretur, ubi est ipsius Centrum Gravitatis.

DEmonstratur eodem modo, mutatis mutandis, atque 8 & 9 Cap. 3.

Fig. 99, 100. Nam, immoto C centro Gravitatis; utcunque rotetur Grave, (neque enim aliter, quam rotando moveri potest, per 1 hujus) puta ut ipsius recta A C B in situm α C β deveniat: Quoniam in quocunque situ, adeóque in toto progressu, opposita segmenta, plano quovis ad Horizontem recto ut P D divisa, invicem æquiponderant; (per def. Centri Gravitatis;) Estque (propter rotationem) unius Descensus

sus cum oppositi Ascensu necessario conjunctus; Erit Ascensus Descensui æquipollens (nam sicubi alter præpollet, ea præponderabitur, per 7 Cap. 2:) Adeóque nulli vel Ascensui, vel Descensui simul Æquipollent. Per 8 Cap. 1.

Item; moto Centro C in κ, nec ascendendo tamen vel descendendo, sed in eâdem à Terræ Centro altitudine; sitque ibidem A C B recta, in situm α κ β translata: Atque hujus similis ad horizontem situs intelligatur, in α C β. Manifestum est, (propter æquè alta puncta C, κ; rectásque C β, κ β, æquales & similiter positas;) puncta β, β, utrobique æque alta esse. Idémque de reliquis respectivè punctis similiter ostendetur. Adeóque totum Grave in situ α κ β, æquè altum est à terræ centro, atque in situ α C β; hoc est (per jam demonstrata) æquè altum atque in situ A C B. Adeóque nec Ascendisse nec Descendisse censendum erit.

Sin altius humiliúsve sit punctum κ quam C; atque similiter ad horizontem sita intelligatur eadem recta in α C β, atque in α κ β: Ostendetur (propter æquales rectas similiter positas) tantò altiora esse vel humiliora singula rectæ α κ β puncta, quàm puncta rectæ α C β; quantò est ipsum κ, quam C: Adeóque (cum de reliquis punctis eadem sit ratio) tantò altius humiliúsve Grave in α κ β, quàm in α C β; hoc est, (per ante demonstrata,) quàm in A C B. Adeóque tantundem vel Ascendisse vel Descendisse censendum erit Grave, quantum Ascenderit, vel Descenderit centrum Gravitatis; per 3 Cap. 2. Quæ demonstranda erant.

Cùm igitur, per 4 Cap. 2. in eâ ratione ponderat idem Grave quâ, si moveatur, plus vel Ascensurum sit vel Descensurum: tantundem ponderando valere censendum erit; atque si ibidem totum esset Grave, ubi ipsius est Centrum Gravitatis.

SCHOLIUM.

Quæ igitur, in præcedentibus, ostensa sunt, de Punctis Applicationum, eorúmve à Centro vel aliunde distantiis; de Gravium item loco, & motibus variè declivibus; cæteráque istiusmodi: Eorum Centris Gravitatis accommodanda erunt omnia. Quippe totum Grave, hujus ope, in unico illo puncto virtualiter situm intelligatur, in quo est ipsius Centrum Gravitatis. Quódque de integris gravibus jam dictum est; de illorum Particulis quibusvis, & harum centris gravitatis; perinde

perinde intelligendum eſt; Quippe & hæ Particulæ ſunt totidem Gravia: Sicut & Gravium Aggregatum, pro uno Gravi habendum; cujus eſt & unicum commune Centrum Gravitatis.

Quæ igitur (per totum Caput 2 aut alibi) de Gravi, tanquam in uno Puncto exiſtente; aut, ad Punctum unum Applicato, eíve vel ſubjecto, vel ſupereminente,&c. dictaſunt: De Centro Gravitatis commodè exponuntur omnia. (Quod & obiter inſinuatum eſt, in Scholio Prop. 3. Cap. 2.) Quippe tantundem ponderando valet Grave, utcunque poſitum, atque ſi in eo puncto totum intelligeretur, ubi eſt Centrum Gravitatis: aut etiam, Gravium quotlibet Aggregatum, utcunque poſitorum, atque ſi in communi ſimul omnium Centro Gravitatis eſſent.

Fig. 101, 102. Atque hinc etiam ampliandum jam erit, & aliquatenus relaxandum, quod in Scholio Prop. 1. hujus definivimus: Nempe, ſingula totius Gravis, vel Aggregati gravium, puncta, intelligenda eſſe in eodem ad invicem ſitu permanere. Quippe, motâ utcunque Gravis parte aliquâ, vel aliquot partibus, ita tamen ut earum vel ſingularum vel ſimul omnium Centrum Gravitatis maneat ut priùs ſitum; perinde eſt, ponderationem quod ſpectat, atque ſi omnino permanſiſſent in eodem ſitu puncta ſingula. Adeóque, quod hactenus demonſtratum eſt, ſupponendo ſingula totius puncta ſitum ſuum ad invicem (atque ad motûs centrum vel axem) retinere: poſthac pro demonſtrato habebitur, ſi ſaltem partium Centra gravitatis, maneant ut priùs ſita; aut etiam commune omnium Centrum Gravitatis ſimiliter ad motûs centrum vel Axem ſitum. Puta, ſi A C B Grave, (motis utcunque partibus, manentibus partium centris gravitatis,) in ſitum α C β perveniat; perinde omnino ponderabit. Similiter; Automati rotis quotlibet utcunque circa ſua centra motis, manente communi totius centro gravitatis in eodem (vel æquipollente) ſitu, manet eadem totius Ponderatio.

PROP. XVII.

Si Centrum Gravitatis sit in eodem ad terræ Centrum Perpendiculo cum Centro motûs: sibi permissum Grave non movebitur.

Sin extra Perpendiculum constituatur; ad Perpendiculum, infra Centrum motûs, feretur: Idque (nisi aliàs impeditum) in Plano per centrum motûs, centrum Gravitatis, & Centrum Terræ transeunte.

Quodque de Perpendiculo dictum est, Perpendiculi Succedaneo accommodabitur in obliquè declivi Plano.

SEquitur ex 10 Cap. 3. Nam Centrum Gravitatis, saltem Æquilibrii Centrum est; (per eorum definitiones:) Nempe, si recta quævis per Centrum Gravitatis, pro Librâ censeatur. Fig. 103.

Vel (ut ea) sic ostenditur.

Puta; Si Centrum Gravitatis sit in M centro motûs; hoc manente, non descendet Grave; per præced. Adeóque à Gravitate non movebitur.

Si sit in perpendiculo infra centrum motûs, ut in P: Centrum Gravitatis, (adeóque & Grave, per præced.) jam est in situ rotationis infimo, (per 20 Cap. 2.) Adeóque non, ob Gravitatem, movebitur.

Si sit in Perpendiculo supra centrum motûs, ut S; adeóque in puncto supremo; (per 20 Cap. 2.) In quascunque partes rotetur, æqualiter descensurum est, (propter æqualem quaqua versum declivitatem,) tum Centrum Gravitatis, tum (per præced.) ipsum Grave. Adeóque (per 8 Cap. 2.) non movebitur.

Sin extra perpendiculum sit, ut in G: deorsum ad P feretur, per arcum GP, in MGP plano perpendiculari situm, (ut qui omnium, in superficie sphæricâ rotationem determinante, descensus est maximè declivis,) per 24 Cap. 2. Quæ demonstranda erant.

Eademque, in obliquè declivi plano, de perpendiculi Succedaneo, similiter ostendentur. Putà; si super declive planum impenetrabile, volvendum

volvendum esset G grave, circa C centrum motûs; suo centro Gravitatis peripheriam in illo plano describens S P G. Quippe, cum propter duritiem subjecti plani, aut forsan Axis circa quem rotetur determinatam positionem, similemve causam aliam, in plano perpendiculari descendere non possit; quàm tamen potest maximè declivi feretur.

PROP. XVIII.

Ad datum motûs Axem, (vel similiter inclinatum,) eâ ratione ponderant comparata Gravia; (vel idem, Grave pro vario situ:) quæ ex rationibus Ponderum, & Distantiarum Centrorum Gravitatis à perpendiculari per Axem Plano, componitur.

Adeóque: Si Distantiæ sint æquales; in ratione Ponderum: Si Pondera sint æqualia; in ratione Distantiarum: Si vel utraque sint æqualia; vel sint reciprocè proportionalia; Æquiponderant: Quorum verò centra Gravitatis sunt in ipso per Axem Perpendiculari Plano; nihil in utramvis partem ponderant.

Circa Axes verò inæqualiter inclinatos, adeóque in Planis inæqualiter Declivibus, Libranda: in eâ ratione ponderant, quæ ex Ponderum, & Distantiarum centrorum Gravitatis à perpendiculari per axem plano, & Declivitatum planorum in quibus librantur pondera, componitur.

$$\frac{\begin{matrix}P.\\D.\end{matrix}}{PD.}\,G :: \frac{\begin{matrix}nP.\\D.\end{matrix}}{nPD.}\,nG :: \frac{\begin{matrix}P.\\mD.\end{matrix}}{mPD.}\,mG :: \frac{\begin{matrix}nP.\\mD.\end{matrix}}{mnPD.}\,mnG :: \frac{\begin{matrix}nP.\\\frac{1}{n}D.\end{matrix}}{PD.}\,G. \;\Big|\; \frac{\begin{matrix}P.\\D.\\\Delta.\end{matrix}}{PD\Delta.}\,G :: \frac{\begin{matrix}nP.\\mD.\\r\Delta.\end{matrix}}{nmrPD\Delta.}\,mnrG.$$

SEquitur ex 12 & 13 Cap. 3. propter 16 hujus.

PROP.

PROP. XIX.

Ex tribus his ; Pondere, Ponderatione, & Diſtantiâ Centri Gravitatis à perpendiculari per Axem Plano ; datis duobus quibuſvis, datur tertium.

Nempe : Datis Pondere, & Diſtantiâ ; datur Ponderatio : Datis Pondere, & Ponderatione ; datur Diſtantia : Datis Ponderatione, & Diſtantiâ ; datur Pondus.

Excipe ; Si (quod unà cum Ponderatione datur) Diſtantia vel Pondus nullum ſit.

Intellige ; *in datâ Axis inclinatione*, (& ſimiliter in ſequentibus :) Secùs enim & hujus habenda erit conſideratio.

$$PD = G. \qquad \frac{G = PD}{P} = D. \qquad \frac{G = PD}{D} = P.$$

Sequitur ex 15 Cap. 3. propter 16 hujus.

PROP. XX.

Dato Pondere, datâque Diſtantiâ Centri Gravitatis à perpendiculari per Axem Plano : Pondus inveſtigare, quod in aſſignatâ Centri Gravitatis à perpendiculari Plano per axem Diſtantiâ, Dato illi vel æquiponderet, vel in datâ ratione ponderet.

Item : Diſtantiam inveſtigare, in quâ, Pondus Aſſignatum, Dato illi vel æquiponderet, vel in datâ ratione ponderet.

P.	$\frac{1}{n}$P.	nP.	$\frac{m}{n}$P.	nD.	
D.	nD.	$\frac{1}{n}$D.	nD.	$\frac{m}{n}$D.	Fig. 104.
PD.	G::PD.	G::PD.	G::mPD.	mG::mP.	mG.

SEquitur ex 16 Cap. 3. propter 16 hujus.

PROP. XXI.

Ejuſdem vel æqualium Ponderum, Centri Gravitatis ad perpendicularis Plani per Axem motûs Appropinquatio, aut inde Elongatio, Æqualis, (ſive Centrum Plano admoveri intelligatur, ſive Planum Centro, vel contra;) æqualiter auget, minuítve Ponderationem.
Et Inæqualis, vel, Inæqualium Ponderum; proportionaliter.

SEquitur ex 17 Cap. 3. propter 16 hujus.

PROP. XXII.

Datis Ponderibus quotlibet; datiſque vel Axe motûs (aut Perpendiculari per hunc Plano) & Ponderum Centris gravitatis; vel horum à Perpendiculari per Axem Plano diſtantiis ad datas partes: Inveſtigare, quanta ſit tum ſingulorum tum ſimul omnium Ponderatio; &, ad quas partes: tum denique quantum gravant ipſum quo ſuſtinentur Axem.

	†D.	†3D.	†4D.	±0D.	--2D.	--3D.
Fig. 105.	P.	5P.	3P.	4P.	3P.	4P.
	†DP. †G::	†15DP. 15G::	†12DP. †12G::	±0DP. ±0G::	-6DP. -6G::	-12DP. -12G.

Oſtenditur

$$\begin{array}{r} +\ 1G \\ +15G \\ +12G \end{array}\Big\} = +28G$$

$$\pm\ o\ G = \pm\ o\ G.$$

$$\begin{array}{r} -\ 6G \\ -12G \end{array}\Big\} = -18G$$

$$\overline{\qquad\qquad +10G}$$

OStenditur ex 18 Cap. 3. propter 16 hujus..

Signum +, innuit distantiam à Perpendiculari per Axem Plano, Dextrorsum: Signum —, Sinistrorsum. Pondera verò eodem signo + rotantur omnia, quia intelliguntur omnia, Deprimentia. Si verò esset Ponderum aliud Deprimens, aliud Elevans: illud signo +, hoc signo —, notari par esset: Et multiplicationum leges insuper essent observandæ.

PROP. XXIII.

Datis Ponderibus quotlibet (vel summa Ponderum) datâque eorum simul omnium Ponderatione ad datas partes, respectu Axis expositi (vel expositi per axem Perpendicularis Plani:) Ponderationem Augere vel Minuere datâ quantitate; sive manente eodem per Axem plano perpendiculari; sive manentibus (in iisdem parallelis Planis) Ponderum centris gravitatis.

OStenditur ex 19 Cap. 3. propter 16 huius.

Nempe: Manente Axe, (saltem similiter ad horizontem inclinato; in eodem perpendiculari plano,) Amovendo vel Admovendo ponderum Centra Gravitatis.

Vel, manentibus ut priùs (saltem in iisdem parallelis Planis) Centris Gravitatis; (vel communi simul omnium Centro;) Amovendo vel Admovendo Axem, similiter inclinatum, in parallelo Plano; tanto quidem intervallo, quanto exposita Pondera (vel summa ponderum) tantundem ponderarent, quantum vel Addendum vel Auferendum ponderationi expositum.

PROP. XXIV.

Datis Ponderibus quotlibet; unà cum Axe motûs,(aut per illum Perpendiculari Plano,) & Centris gravitatis, (aut horum à Perpendiculari per Axem Plano diſtantiis, ad datas partes:)
Vel, Datis ſaltem ſumma Ponderum, & ſimul omnium Ponderatione ad datas partes:
Diſtantiam Centri Gravitatis ſimul omnium, à Perpendiculari per Axem Plano, invenire.
Adeóque; Ponderationem Augere vel Minuere in datâ ratione. Nempe; in eâ ratione, auctâ vel minutâ Diſtantiâ.

$$\frac{+10G=+10PD}{20P}=+\tfrac{1}{2}D.$$

Fig.105. Oſtenditur ex 20 Cap. 3. propter 16 hujus.
Puta; Si $+10G=+10PD$ ſumma Ponderationum dextrorſum, data; (vel, ex datis, inventa, per 22 hujus;) per 20 P ſummam ponderum dividatur: Habetur $+\tfrac{1}{2}D$, diſtantia Centri gravitatis à Plano per Axem Perpendiculari, dextrorſum: Putà, in ≅ Σ Rectâ, Planóve.

Corollarium, conſtabit ex 20 hujus. Quippe jam datur totius Aggregati (tanquam unius Gravis) tum Pondus tum Centri Gravitatis diſtantia.

PROP. XXV.

Datâ, à Perpendiculari per Axem Plano communis Ponderum quotlibet, utcunque poſitorum, Centri Gravitatis Diſtantiâ: Ex cognitis Ponderibus, vel ſumma Ponderum; cognoſcitur Ponderatio: Vel, ex cognitâ Ponderatione; Summa Ponderum.

+

$$+D \times P = +DP = +G. \frac{+G}{} = \frac{+DP}{D} = P.$$

SEquitur ex 22 Cap. 3. propter 16 hujus.

PROP. XXVI.

Datis, in Gravi quovis, tribus Æquilibrii Planis, quæ non in unâ rectâ concurrant omnia; Vel, Datis duobus quibusvis Axibus Æquilibrii: Datur ejusdem Centrum Gravitatis. Nempe in communi secantium concursu.

Et quidem; Figuræ Planæ, vel Lineæ utcunque curvæ in Plano descriptæ: Datis duobus (præter ipsum Planum) Planis Æquilibrii, (non in hujus rectâ aliquâ concurrentibus:) Vel, Uno Axe Æquilibrii non in illo Plano jacente: Datur Centrum Gravitatis. Nempe in communi datorum concursu.

Lineæ verò rectæ; Dato uno vel Æquilibrii Axe, vel Plano Æquilibrii, rectam illam secante: Datur Centrum Gravitatis. Nempe, sectionis Punctum.

Puncti vero, Centrum Gravitatis, est punctum ipsum.

CUm enim duo Plana se mutuò non nisi in unâ rectâ secent; Rectáque sive rectam, sive planum, non nisi in unico puncto; (ut ex elementis notum est:) Manifestum est, non posse nisi in unico puncto; vel Duos Axes Æquilibrii, vel Tria Æquilibrii Plana, non in eâdem rectâ concurrentia; se mutuò secare (Tertium utique Planum, duorum communem sectionem, non nisi in uno puncto secat.) Cúmque Centrum Gravitatis, per 15 hujus, sit in communi omnium sive Axium sive Planorum Æquilibrii concursu; Datis illis, datur (quod in eorum concursu est) Centrum Gravitatis. Quod erat primò demonstrandum.

Sin illud Grave sit vel Figura Plana, vel Linea utcunque curva in Plano descripta; erit hoc ipsum planum, unum ex tribus illis Æquilibrii

Planis

Planis requisitis; (per def. Plani Æquilibrii: quippe posito hoc ad horizontem recto in neutram partem præponderabitur, per 3 huius) Adeóque (cum Centrum Gravitatis in illo plano esse constet) si vel duobus aliis Æquilibrii Planis (non in eâdem aliquâ hujus Plani rectâ se mutuò secantibus;) vel, Axe uno; secetur Planum hoc: unico secabitur puncto, (quod itaque Gravitatis Centrum erit;) per jam dicta. Quod secundò demonstrandum erat.

Linea recta verò (cujus Centrum gravitatis in ipsa esse, similiter ostendetur;) ex tribus Æquilibrii planis duo supplet; sive communem duorum sectionem: Adeóque, si vel uno aliquo Æquilibrii vel Axe, vel Plano, secetur; secatur puncto unico, quod itaque Centrum erit Gravitatis.

Denique: Quod Puncti Centrum Gravitatis extra ipsum non sit, similiter ostendetur atque de Plano, & Lineâ rectâ; (quippe si Planum aliquod extra ipsum ponatur ad Horizontem perpendiculare; totum grave ad unas partes ponderabit:) Cum itaque Punctum sit indivisibile; erit ipsum sui Centrum. Quod erat ultimò demonstrandum.

SCHOLIUM.

Fig. 98. EXempli gratiâ. Centrum Gravitatis Puncti C, est ipsum C Punctum. Centrum gravitatis rectæ XS, est in ipsâ rectâ; ejúsque Puncto C quo ab Æquilibrii Plano vel Axe YCT, secatur.

Figuræ Planæ, vel Lineæ Curvæ in Plano, YXTS, centrum Gravitatis est in duorum Planorum Æquilibrii, puta XS & YT, communi sectione, (quæ ipsa est Axis Æquilibrii;) hujúsque puncto C, quod est in exposito plano.

Figuræ verò solidæ, vel lineæ curvæ non in plano descriptæ, (quales sunt spirales circa Conum, vel Cylindrum, &c.) Centrum gravitatis erit in trium Planorum Æquilibrii; putà per YXT, duorúmque hoc secantium ut in XCS, & YCT; communi concursu C: sive duorum Axium Æquilibrii XS & YT communi sectione C.

Ejusmodi autem dico Axes habentur; ope 12 hujus. Putà suspenso primum Gravi ex sui puncto X, ut habeatur XS; deinde, ex sui puncto Y, ut habeatur YCT.

PROP.

PROP. XXVII.

Duorum conjunctorum Gravium (Homogeneorum) commune Centrum Gravitatis, est in eâ rectâ quæ sua respectivè Centra Gravitatis conjungit, sic divisâ, ut Distantiæ sint Ponderibus reciprocè proportionales.

Adeóque; datis duobus, eorúmque Centris Gravitatis; datur commune simul utriusque Centrum Gravitatis.

Quódque de duobus dicitur; de pluribus similiter obtinebitur.

Item; Datis Totius & Ablati, Ponderibus & Centris Gravitatis; datur Centrum Gravitatis reliqui.

SUnto, verbi gratia, duo Pondera, vel (quod eodem recidit, per 16 hujus) eorum Centra Gravitatis, in punctis A, B: Adeóque (per præced.) A B Axis Æquilibrii; & (per 15 hujus) in illo, Centrum Gravitatis: putà C. Est, inquam, ut Pondus A ad pondus B, sic (reciprocè) distantia C B ad distantiam C A, (per 18 hujus) ut Æquiponderent. Fig. 106.

Invento autem duorum A B ponderum communi Centro Gravitatis C; dato adhuc tertio Pondere, ejúsque Centro Gravitatis D: eodem modo invenietur trium commune Centrum Gravitatis. Nempe, ita divisâ rectâ C D in E, ut distantiæ E D, E C; sint Ponderibus D, & A + B, reciprocè proportionales.

Item; datis Totius A + B, & Ablati B, Ponderibus & Centris Gravitatis; datur residui Centrum Gravitatis A. Nam datis Ponderibus A + B & B, habetur (subductione) Pondus A. Sumptis igitur (in B C rectâ continuatâ) ut inventum Pondus A, ad Pondus B datum, sic data C B distantia, ad distantiam C A quæsitam.

Dico *Homogeneorum*; quia quæ sunt invicem Heterogenea, (ut linea & superficies; superficies, & solidum; aut similia;) nullam habent ad invicem rationem; (quod docent def. 3 & 5. Quinti Euclidis:) suntque hujusmodi comparationis incapacia. Quodque hic monitum est; alibi, ubi opus erit, est intelligendum.

CAP.

CAP. V.

De Calculo Centri Gravitatis.

MONITUM.

Hoc Caput Integrum, quanquam à præcedentibus dependeat, & (per Methodi leges) hunc sibi locum vendicare videatur: Non tamen ita cum sequentibus connexum est, quin ut possit ab illis separari. Cum itaq; ubi ad interiora Geometriæ penetrandum erit, Calculus necessariò futurus sit perplexior, quàm forte Tyrones, vel minùs exercitati, commodè ferre possint: illud jam statim sub initium monendum duxi; ut sicubi perplexi Calculi molestiam subire nolint, possint inoffenso pede ad Capita sequentia transire; quæ et præcedentibus, hoc omisso, tum satis intelligi, tum & legitimè demonstrari possunt.

DEFINITIONES.

DEF. I.

Quanta quælibet, Arithmeticè proportionalia, (sive secundum naturalem Numerorum consecutionem constituta,) appello Primana.

Quæque sunt in horum ratione Duplicatâ, Triplicatâ, Quadruplicatâ, &c. (sive ut Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. arithmetice-proportionalium,) appello Secundana, Tertiana, Quartana, *&c.*

Quæ autem in eorum ratione Subduplicatâ, Subtriplicatâ, Subquadruplicatâ, &c. (sive ut illorum Radices Quadraticæ, Cubicæ, Biquadraticæ, &c.) appello Subſecundana, Subtertiana, Subquartana, *&c.*

Quæ in ratione, Duplicatâ Triplicatæ, Subtriplicatæ, &c. Triplicatâ Duplicatæ, Subduplicatæ, &c. (ſive ut Quadrata Cuborum, aut radicum cubicarum, &c. ut Cubi Quadratorum, aut radicum quadraticarum, &c.) appello Quadrata Tertianorum, Subtertianorum, *&c.* Cubos Secundanorum, Subſecundanorum, *&c. Et ſimiliter, in quâvis aliâ rationum compoſitione, mutatis mutandis, appellanda erunt.*

Atque hujuſmodi Serierum Indices *ſive* Exponentes, *appello, numeros (integros an fractos, ſurdóſve, ut contigerit) unde denominantur illæ ſeries aut Rationes.*

Et, conſonanter, Æqualia dico Nullana : *Quoniam Æqualia ſecundum nullam (ne ſimplam quidem) rationem arithmeticè proportionalium creſcunt aut decreſcunt.* Subprimana *verò (ſive, ut dicam, Radices Laterales Primanorum,) eadem erunt atque Primana. propter* $\frac{1}{1} = 1$.

EXempli gratiâ :

Exponentes.	Series.								
0.	Æqualium,	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	&c.
1.	Primanorum,	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	&c.
2.	Secundanorum,	0.	1.	4.	9.	16.	25.	36.	&c.
3.	Tertianorum,	0.	1.	8.	27.	64.	125.	216.	&c.
$\frac{1}{1}$.	Subprimanorum,	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	&c.
$\frac{1}{2}$.	Subſecundanorum,	√0.	√1.	√2.	√3.	√4.	√5.	√6.	&c.
$\frac{1}{3}$.	Subtertianorum,	√c0.	√c1.	√c2.	√c3.	√c4.	√c5.	√c6.	&c.
$2 \times 3 = 6$.	Quadratorū tertianorum,	00.	1×1.	8×8.	27×27.	64×64.	125×125.	216×216.	&c.
	vel	0.	1.	64.	729.	4096.	15625.	46656.	&c.
$2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.	Q.Subtertianorum,	√c0.	√c1.	√c4.	√c9.	√c16.	√c25.	√c36.	&c.
$3 \times 2 = 6$.	Cuborum ſecundanorum,	000.	1×1×1.	4×4×4.	9×9×9.	16×16×16.	25×25×25.	36×36×36	&c.
	vel	0.	1.	64.	729.	4096.	15625.	46656.	&c.
$3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.	C.Subſecundanorū,	√0.	√1.	√8.	√27.	√64.	√125.	√216.	&c.
&c.	&c.								

DEF. II.

Series, jam definitis, Reciprocas, *appello; quando Series æqualium, per earum aliquam Dividi intelligitur. Quæ itaque Indices habebunt Negativos; ut* --1, --2, --3, *&c.*

Exempli gratia.

Index.	Series. Reciproca						
--0.	Æqualium,	$\frac{1}{1}$.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{1}{1}$.	&c.
--1.	Primanorum,	$\frac{1}{0}$.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{3}$.	$\frac{1}{4}$.	&c.
--2.	Secundanorum,	$\frac{1}{0}$.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{9}$.	$\frac{1}{16}$.	&c.
--3.	Tertianorum,	$\frac{1}{0}$.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{1}{8}$.	$\frac{1}{27}$.	$\frac{1}{64}$.	&c.
--$\frac{1}{2}$.	Subsecundanorum,	$\frac{1}{\sqrt{0}}$.	$\frac{1}{\sqrt{1}}$.	$\frac{1}{\sqrt{2}}$.	$\frac{1}{\sqrt{3}}$.	$\frac{1}{\sqrt{4}}$.	&c.
--$\frac{1}{3}$.	Subtertianorum,	$\frac{1}{\sqrt{c0}}$.	$\frac{1}{\sqrt{c1}}$.	$\frac{1}{\sqrt{c2}}$.	$\frac{1}{\sqrt{c3}}$.	$\frac{1}{\sqrt{c4}}$.	&c.
$-6 = -2\times3$.	Quadratorum tertianorum,	$\frac{1}{Q.0}$.	$\frac{1}{Q.1}$.	$\frac{1}{Q.8}$.	$\frac{1}{Q.27}$.	$\frac{1}{Q.64}$.	&c.
	Vel	$\frac{1}{0}$.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{1}{64}$.	$\frac{1}{729}$.	$\frac{1}{4096}$.	&c.
--$\frac{2}{3} = -2\times\frac{1}{3}$.	Q. Subtertianorũ,	$\frac{1}{Q.0}$.	$\frac{1}{Q.\sqrt{c1}}$.	$\frac{1}{Q.\sqrt{c2}}$.	$\frac{1}{Q.\sqrt{c3}}$.	$\frac{1}{Q.\sqrt{c4}}$.	&c.
	Vel	$\frac{1}{0}$.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{1}{\sqrt{c4}}$.	$\frac{1}{\sqrt{c9}}$.	$\frac{1}{\sqrt{c16}}$.	&c.
$-6 = -3\times2$.	Cuborum C. secundanorum,	$\frac{1}{C.0}$.	$\frac{1}{C.1}$.	$\frac{1}{C.4}$.	$\frac{1}{C.9}$.	$\frac{1}{C.16}$.	
	Vel	$\frac{1}{0}$.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{1}{64}$.	$\frac{1}{729}$.	$\frac{1}{4096}$.	&c.
--$\frac{3}{2} = -3\times\frac{1}{2}$.	C. Subsecundanorũ,	$\frac{1}{C.0}$.	$\frac{1}{C.\sqrt{1}}$.	$\frac{1}{C.\sqrt{2}}$.	$\frac{1}{C.\sqrt{3}}$.	$\frac{1}{C.\sqrt{4}}$.	
	Vel	$\frac{0}{1}$.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{1}{\sqrt{8}}$.	$\frac{1}{\sqrt{27}}$.	$\frac{1}{\sqrt{64}}$.	&c.

SCHOLIUM.

SCHOLIUM.

NOtandum hic, (quò rectiùs hæc intelligantur:) quod ſi Poteſtas quælibet ſecundum quam ſeries inſtituitur (unde & Indicem ſive Exponentem deſumit,) per aliam cujuſvis ſeriei poteſtatem multiplicetur; Poteſtatem facit cujus Index ſit Aggregato indicum utriuſque æqualis: Vel Index Multiplicatæ, tanto augetur, quantus eſt Index multiplicantis. Ut

$1 \times a = a.$	$1 \times a^2 = a^2.$	$1 \times a^3 = a^3.$	$1 \times a^4 = a^4.$	Quantitates.
$0 + 1 = 1.$	$0 + 2 = 2.$	$0 + 3 = 3.$	$0 + 4 = 4.$	Indices.
$a \times a = a^2.$	$a \times a^2 = a^3.$	$a \times a^3 = a^4.$	$a \times a^4 = a^5.$	Quantitates.
$1 + 1 = 2.$	$1 + 2 = 3.$	$1 + 3 = 4.$	$1 + 4 = 5.$	Indices.
$a^2 \times a = a^3.$	$a^2 \times a^2 = a^4.$	$a^2 \times a^3 = a^5.$	$a^2 \times a^4 = a^6.$	Quantitates.
$2 + 1 = 3.$	$2 + 2 = 4.$	$2 + 3 = 5.$	$2 + 4 = 6.$	Indices.

Sin per alteram Poteſtatem Dividatur, Poteſtas aliqua; oritur poteſtas cujusIndex ſit æqualis exceſſui Indicis poteſtatis diviſæ ſupra indicem poteſtatis dividentis: Vel Index Diviſæ tantò minuitur, quantus eſt Dividentis Index. (Adeóque ſi hic illo major ſit, prodibit index Negativus.) Vt

$a)\,1\,(\frac{1}{a}.$	$a^2)\,1\,(\frac{1}{a^2}.$	$a^3)\,1\,(\frac{1}{a^3}.$	$a^4)\,1\,(\frac{1}{a^4}.$	Quantitates.
$0 - 1 = -1.$	$0 - 2 = -2.$	$0 - 3 = -3.$	$0 - 4 = -4.$	Indices.
$a)\,a\,(1.$	$a^2)\,a\,(\frac{1}{a}.$	$a^3)\,a\,(\frac{1}{a^2}.$	$a^4)\,a\,(\frac{1}{a^3}.$	Quantitates.
$1 - 1 = 0.$	$1 - 2 = -1.$	$1 - 3 = -2.$	$1 - 4 = -3.$	Indices.
$a)\,a^2\,(a.$	$a^2)\,a^2\,(1.$	$a^3)\,a^2\,(\frac{1}{a}.$	$a^4)\,a^2\,(\frac{1}{a^2}$	Quantitates.
$2 - 1 = 1.$	$2 - 2 = 0.$	$2 - 3 = -1.$	$2 - 4 = -2.$	Indices.

Si itaque intelligatur ſeries poteſtatis inferioris, per ſeriem poteſtatis ſuperioris, reſpectivè dividi; (hoc eſt, terminus primus illius, per primum hujus; ſecundus, per ſecundum,&c.) orietur ſeries ex Reciprocis aliqua, quarum Indices ſunt Negativi.

Si cui interim hæc minùs adhuc explicata videantur: Conſulat, ſi libet, noſtram *Arithmeticam Infinitorum*: ubi fuſiùs traduntur.

PROP. I.

Si intelligatur infinita ſeries Quantorum, ab ipſo capite ſeriei (puta o vel $\frac{1}{0}$) inchoatorum, & continuè creſcentium ſecundum ſeriem Primanorum, Secundanorum, Tertianorum,&c. Subſecundanorum, Subtertianorum,&c. aliorúmve modò definitorum; eorúmve Reciprocam: quorum ultimum datum ſit: erit totius ratio, ad ſeriem totidem ultimo æqualium, ea quæ eſt Unius, ad Indicem ſeriei Uno auctum.

Idem continget, ſi, omiſſo termino primo, ſeu o, Series à ſecundo termino incipiat; ſeu à quovis termino qui ſit primo & ſecundo intermedius; Puta ſi in ſerie Primanorum (cui reliquæ accommodandæ intelliguntur) terminus primus ſit ſaltem non major quam communis Exceſſus ſeriei.

PUta: Infinita ſeries ejuſmodi Primanorum (qualia ſunt, parallela Plana in Conoide Parabolico; & Rectæ in Triangulo, Baſi parallelæ, &c.) cujus Index eſt 1: Eſt ad ſeriem totidem Maximo æqualium, (puta, ad circumſcriptum Conoidi illi Cylindrum, aut Triangulo Parallelogrammum, æquè altum;) ut 1 ad $2 = 1 + 1$.

Ejuſmodi ſeries infinita Secundanorum, cujus Index eſt 2; (qualia ſunt parallela baſi Plana in Cono aut Pyramide; vel Ordinatim-applicatæ in complemento Parabolæ;) ad totidem maximo Æqualia, (putà, circumſcriptum ſuper eadem baſi Cylindrum vel Priſma, æque altum; aut circumſcriptum complemento Parabolæ Parallelogrammum;) ut 1 ad $3 = 2 + 1$.

Ejuſmodi ſeries infinita Subſecundanorum cujus Index eſt $\frac{1}{2}$; (puta, rectarum in Parabola baſi parallelarum,) ad totidem maximo æqualium, (putà, ad Parallelogrammum ſuper eâdem baſe æquè altum;) ut 1, ad $\frac{3}{2} = \frac{1}{2} + 1$; ſive ut 2 ad 3.

Ejuſmodi ſeries infinita Subtertianorum, cujus Index eſt $\frac{1}{3}$, (putà, rectarum in Paraboloide cubicali,) ad totidem maximo æqualium, (putà,

tà, ad circumſcriptum Parallelogrammum ;) ut 1 ad $\frac{4}{3} = \frac{1}{3} + 1$: ſive, ut 3 ad 4.

Et ſimiliter in iſtiuſmodi aliis innumeris.

Item in Reciprocis ſeriebus ; puta, ejuſmodi ſeries cujus Index ſit $-\frac{1}{2}$. Erit ad totidem ultimo Æqualium, ut 1 ad $-\frac{1}{2} + 1$; ſive ut 1 ad $\frac{1}{2}$; vel 2 ad 1. Et in reliquis ſimiliter.

Per noſtræ *Arithmeticæ Infinitorum* Prop. 64. 102, &c.

Idem continget, ſi, pro ſerie Primanorum

0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. &c.
vel 0. 2. 4. 6. 8. 10. 12. &c.

quæ repræſentet Figuram Inſcriptam : Intelligatur Series,

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. &c.
vel 2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. &c.

quæ repræſentet Figuram Circumſcriptam :

vel $\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{2}$. $2\frac{1}{2}$. $3\frac{1}{2}$. $4\frac{1}{2}$. $5\frac{1}{2}$. $6\frac{1}{2}$. &c.
hoc eſt, ut 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. &c.
aut etiam $\frac{1}{3}$. $1\frac{1}{3}$. $2\frac{1}{3}$. $3\frac{1}{3}$. $4\frac{1}{3}$. $5\frac{1}{3}$. $6\frac{1}{3}$. &c.
hoc eſt, ut 1. 4. 7. 10. 13. 16. 19. &c.

quæ repræſentent Figuram intermediam ; putà quæ ſit partim Inſcripta, partim Circumſcripta ; adeoque major quam inſcripta & minor quam Circumſcripta. Quippe hæ omnes (atque horum ſimiles) dummodo Series Infinita intelligatur, tantundem valent, (utut in Serie terminorum numero Finitorum ſecus ſit :) Per Schol. Prop. 182. *Arithmet. Infinit.*

Quodque de ſerie Primanorum dictum eſt, reliquis Seriebus quæ ſunt in Primanorum ratione Duplicata, Triplicata, &c. Subduplicata, Subtriplicata, &c. aut aliàs compoſita, accommodandum erit.

SCHOLIUM.

Quoties, in ſequentibus, ſerierum hujuſmodi mentio fiet : quarum æſtimatio ex hac Propoſitione dependet ; intelligendæ ſunt ſeries illæ, ab ipſo capite ordiri, putà 0 vel $\frac{1}{0}$; & dato terminari. Quod cùm in propoſitione unâ aut alterâ expreſſè dictum ſit ; idem in ſequentibus intelligendum erit ; (niſi contrarium inſinuetur :) utut, quo longa periphraſis evitetur, (quæ propoſitionem, aliàs fortaſſe ſatis implicatam perplexiorem redderet,) illud diſertis verbis non dicatur.

PROP.

PROP. II.

A. Lineæ Rectæ, Parallelogrammi, Parallelepipedi, Prismatis, Cylindri, Superficiei Cylindricæ vel Prismaticæ, aut quæ horum instar sunt; Centrum Gravitatis, est *in media longitudine*

B. Nempe; Lineæ Rectæ, in Puncto medio: Parallelogrammi, in mediâ Rectâ oppositis basibus parallelâ: Parallelepipedi, Prismatis, aut Cylindri, vel Superficiei Cylindricæ vel Prismaticæ; in medio Plano, oppositis basibus Parallelo.

C. Adeóque: Parallelogrammi, in ejusmodi binarum Rectarum concursu: Parallelepipedi, in ejusmodi trium Planorum concursu.

D. Datur igitur Puncti, Lineæ rectæ, Quadrati aut cujusvis Parallelogrammi, Cubi aut Parallelepipedi cujusvis, horumve Solidorum cujusvis Superficiei, Centrum Gravitatis.

E. Adeóque &, Punctorum quotlibet, positione datorum, commune Centrum gravitatis datur. Item, Rectarum quotlibet, magnitudinè & positione datarum. Imò, & linearum quarumlibet, magnitudine & positione datarum, quarum singularum Centra gravitatis dantur, datur
Fig.108, commune Centrum Gravitatis. Ope Prop. ult. Cap. 4.
109, Et similiter, quotlibet Quadratorum vel Parallelogrammo-
110, rum quorumlibet; item, quotlibet Cuborum, vel quo-
111, rumvis Parallelepipedorum; aut superficierum horum;
112. (magnitudine & positione datorum;) datur commune centrum Gravitatis. Ope ejusdem Prop. ult. Cap. 4.

A. SI enim intelligatur Linea Recta, Parallelogrammum, Prisma, Cylindrus, aut quod horum instar est aliud; utrinque à medio C; Rectis Planisve parallelis, æquali intervallo ab invicem dissitis, positísque in situ ad horizontem rectis; in segmenta invicem æqualia (plura an pauciora,

pauciora, numero finita an infinita,) dividi: Manifestum est, (ex 13 Cap. 3. vel 4 Cap. 4.) propter segmenta quotlibet ex unâ parte, totidem ex alterâ, Æqualia magnitudine, (adeóque & Pondere; supponimus utique æquabiliter gravia:) & in Distantiis respectivè æqualibus posita; Æquiponderare singula singulis respectivè sumptis; adeóque omnibus omnia simul sumpta. Adeóque, quod per C transit. est Æquilibrii Perpendiculum, vel Perpendiculare Planum; (per definitiones;) & in illis Centrum Gravitatis; per 15 Cap. 4.

Adeóque; (per 26 Cap. 4.) in Linea Rectâ, hinc determinatur ipsum Punctum; in Parallelogrammo, aut quod hujus instar est, saltem Rectâ; in Prismate, aut Cylindro, Planum; in quo est ipsum Gravitatis Centrum. B.

Porro; Cùm sint in Parallelogrammo (sive sit Quadratum, Oblongum, Rhombus, aut Rhomboides,) bis bina latera opposita: Habentur hinc duæ rectæ, ut X C S (media inter A B, & D E,) & Y C T, (media inter A D, & B E,) in quarum utrâque (per jam demonstrata) est Centrum Gravitatis: Adeoque; in horum communi sectione, C puncto. per 26 Cap. 4. C. Fig. 113.

Denique; Cum sint in Cubo, & quovis Parallelepipedo, ter bina Plana opposita: Habentur hujusmodi (per jam demonstrata) tria Plana, in quorum singulis, (adeoque in communi omnium concursu C,) est Centrum Gravitatis. per 15 & 26 Cap. 4. Fig. 114.

Adeóque, tum Puncti (sive per 29 Cap. 4. sive hinc, quia nihil est quod utrinque ponderet, nedum præponderet,) tum Lineæ rectæ, tum Quadrati aut cujusvis Parallelogrammi, item Cubi aut Parallelepipedi cujusvis, ipsum Gravitatis Centrum; per jam demonstrata. Quodque de Cubis & Parallelepipedis, dictum est; perinde valet de horum superficiebus. D.

Et propterea, Punctorum quotlibet, vel quotlibet rectarum; item Quadratorum aut Paralellogrammorum quotlibet; quotlibet item Cuborum vel Parallelepipedorum; quotlibet denique Superficierum Cuborum aut Parallelepipedorum; datur commune Centrum Gravitatis, modo ipsa sint magnitudine & positione data. Per Prop. ult. Cap. præced. E.

Alia Demonstratio.

P. P. P. P.
0*d*. 1*d*. 2*d*. 3*d*. &c. usque ad D.

$$\overline{0dP + 1dP + 2dP + 3dP + \text{\&c. usque ad } DP} = \tfrac{1}{2}NDP.$$

Idem

Idem demonſtratur ex 1 hujus. Intelligatur utique, per C mediam longitudinem incedens, Perpendiculare per Axem Planum; (cui intelligantur parallela, Parallelogrammi vel Priſmatis Baſes oppoſitæ:) Quæque ſunt utrinque C A, C B, rectæ, ex infinitis numero Punctis (eo ſenſu quo def. 1. Cap. 4. definitum eſt) conſtare: (& ſimiliter ex infinitis numero Rectis, Parallelogrammum; &, Planis, Priſma, &c.) Quæ intelligantur omnia, æquè craſſa; (& ſimiliter alibi intelligendum, ubi hujuſmodi constructio adhibetur, niſi aliud innuatur:) Adeóque tum ipſa (ut Rectarum, Parallelogrammorum, & Parallelepipedorum, natura poſtulat, utpote in omnibus ſui partibus æque altorum;) Fig. præced. tum & propterea eorum Pondera, inter ſe æqualia: puta, ut P,P,P,P, &c. quorum omnium numerus intelligatur, N: Sed &, in Diſtantiis à Perpendiculari Plano per Axem, ut $0d, 1d, 2d, 3d$, &c. uſque D ad, maximam. Adeóque momenta ſeu Ponderationes (per 13 Cap. 3. vel 4 Cap. 4.) ut $0dP, 1dP, 2dP, 3dP$, &c. uſque ad DP. Quæ quidem infinitæ ſeries Primanorum, ſimul valent ut $\frac{1}{2}$NDP; (nempe, ad NDP, ſummam totidem Maximo Æqualium, ut 1 ad 2:) per 1 hujus. Cúmque hoc, utrinque perinde contingat: Æquiponderabitur utrinque. Adeóque (per 15 Cap. 4.) Centrum Gravitatis eſt in illo Plano. Quod erat demonſtrandum.

Reliquáque hinc deducuntur ut priùs.

Alia Demonſtratio.

P.	P.	P.	P.	&c.	P.
$0d$.	$1d$.	$2d$.	$3d$.	uſque ad	D.

$0dP + 1dP + 2dP + 3dP +$ &c. uſque ad DP. $= \frac{1}{2}NDP = NP \times \frac{1}{2}D$.

Idem Analyticè, tanquam ſi nondum notum eſſet, ſic inveſtigabitur. Fig. 115, 116. Intelligatur A B tanquam ex infinitis numero Punctis conſtans; (& ſimiliter ex Rectis, Parallelogrammum; &, ex Planis, Priſma, &c.) æquè craſſis; quorum itaque Pondera ſint, ut P,P,P,P, &c. quorum Numerus ſit N. Poſitóque Centro, vel Axe motûs in ipſo extremo A; erunt eorum inde Diſtantiæ reſpectivæ, ut $0d, 1d, 2d, 3d$, &c. uſque ad D. Et momenta ſeu Ponderationes, ut $0dP, 1dP, 2dP, 3dP$, &c. uſque ad DP. Quorum omnium ſumma (per 1 hujus) eſt ut $\frac{1}{2}NDP = NP \times \frac{1}{2}D$. Nempe quantum ſimul ponderaret NP totum Pondus vel ſumma Ponderum in diſtantia $\frac{1}{2}$D. Tantundem itaque diſtat Centrum Gravitatis à perpendiculari per A Plano, (per 24 Cap. 4.) Eritque propterea in parallelo plano per mediam longitudinem. Quod erat oſtendendum. Cæteráque hinc deducuntur, ut priùs. SCHO-

SCHOLIUM.

PLacuit hanc demonſtrandi methodum, in re facili, cæteris ſubjungere, ut eò meliùs intelligatur, ubi illa poſt in difficilioribus adhibebitur.

Intelligimus (quod ſemel monendum erit) ubi de figurarum centris gravitatis agitur, æquabiliter gravia eſſe, ſive puncta, ſive plana, ſive ſolida; hoc eſt, æquali magnitudini æquale pondus ineſſe; & proportionalibus, proportionalia.

Item; Puncta, Lineas, aut Plana, ex quibus idem Grave, ut Linea, Planum, aut Solidum, conflari intelligitur; æquè craſſa eſſe: ut nempe, pro interjectorum numero, diſtantiarum ratio cenſeatur. Utut enim non negaverim, ad def. 1. Cap. 4. poſſe quidem ſecùs aliquando aſſumi: ubi tamen nihil tale inſinuatur, pro æquè craſſis ſunt habenda.

Quæque hic monemus; in ſequentibus erunt intelligenda.

Notandum interim, ad hanc Propoſitionem, & alias ſequentes longiores, Literas in margine poſitas, indicare, in quo Demonſtrationis membro quærenda ſit iſtius partis probatio.

PROP. III.

Si quævis Linea (recta aut curva) vel Figura quævis (plana, curva, ſolidáve,) plano per medium ita diviſa ſit; ut ſingulæ unius ſegmenti particulæ, ſingulis alterius reſpectivè ſumptis, ſint æquales & æqualiter à dividente Plano remotæ: Centrum Gravitatis eſt *in Plano dividente.* Fig. 117, 118, 119.

Putà, Linea recta, utcunque biſecta. Arcus Circuli, producto *Radio* biſectus. Curva Parabolica, Hyperbolica, aut Elliptica, *Axe* producto biſecta. Portio perimetri Polygoni regularis (aut etiam tota Perimeter) rectâ per centrum figuræ tranſeunte biſecta, ſi biſecans illa recta vel Laterum unum vel unum Angulorum biſecet.

Item; Circulus, Ellipſis, Polygonum regulare, (ejúſve portio; ita ut dictum eſt, rectâ biſecta:) Item Sphæra, Sphæroides, Conus, Conoides, Cylindrus; & horum

rum Superficies: Item Pyramis & Prisma, basium regularium; Segmentum Circuli, Ellipseos, Parabolæ, Hyperbolæ, Sphæræ, Sphæroideos; multæque aliæ figuræ; plano per axem bisectæ.

Harúmque aliquarum, (quæ pluribus hujusmodi Planis secari possunt in Puncto unico concurrentibus,) ut Circuli, Ellipseos, Parallelogrammi, Plani Solidive regularis, Parallelepipedi, Sphæræ, Sphæroideos; Centrum Gravitatis hinc determinabitur.

$$\begin{array}{llll} lP, & mP, & nP, & \&c. \\ rD, & sD, & tD, & \&c. \\ \hline \multicolumn{4}{l}{lrDP + msDP + ntDP, \&c.} \end{array}$$

NAm, si Pondera Ponderibus respectivis sint Æqualia, (putà, utrinque lP, mP, nP, &c.) & in Distantiis respectivè æqualibus, (puta rD, sD, tD, &c. utrinque,) erunt utrinque æqualia Momenta $lrDP + msDP + mtDP$, &c. Adeóque, Centrum Gravitatis in dividente Plano. per 15 Cap. 4.

Et quidem, ubi sunt hujusmodi plura Plana, quorum communis sectio sit Punctum unicum; ipsum Centrum Gravitatis determinatur. Per 26 Cap. 4.

Quod autem hæc enumeratis Lineis & Figuris (& harum similibus) conveniant: Ex earum Definitionibus manifestum est, aut inde facilè demonstrabitur.

SCHOLIUM.

NOtandum tamen; de Curvis Parabolicis, Hyperbolicis, Ellipticis, (quod & de harum similibus intelligendum,) disertè dictum esse, *Axe* producto bisecandas; (non, *quâvis* diametro:) Nam, nisi Punctum bisectionis, sit in Axis vertice; bisecta linea non erit utrinque similiter curva. At in Parabolæ, Hyperbolæ, aut Ellipseos, Portionibus Planis, (rectâ abscissis; quippe de his intelligendum:) quævis Diameter basin totámque aream bisecans, rem præstat.

Dum autem has Linearum aut Figurarum species enumeravimus; alias tamen innumeras reperiri certum est; De quibus Demonstratio

non

non minùs procedit; súntque sub propositione generali comprehensæ. Nobis interim famosiores aliquot enumerasse sufficit.

Ponderum, quæ ex eâdem parte sunt, quantacunque inæqualitas, aut quantacunque varietas distantiarum, demonstrationi non officit: dummodo in comparandis quæ utrinque sunt, sit æqualitas. Sed &c, in prop. sequente, major adhuc erit variandi licentia.

PROP. IV.

Item; Si Linea vel Figura quævis (plana, curva, solida,) ita Plano dividatur; ut singulæ unius segmenti particulæ, singulis alterius respectivè sumptis, æquiponderent: Centrum Gravitatis est in Plano dividente.

$$\begin{array}{cccccc} lP. & mP. & nP. & rP. & sP. & tP. \\ rD. & sD. & tD. & lD. & mD. & nD. \\ \hline \end{array}$$
$$lrDP + msDP + ntDP \doteq lrDP + msDP + ntDP.$$

PUtà; Si ex unâ parte Pondera lP, mP, nP, sint in distantiis rD, sD, tD: ex alterâ verò, Pondera rP, sP, tP, in distantiis lD, mD, nD: Utcunque (propter Pondera distantiis reciprocè proportionalia) comparata comparandis respectivè æquiponderabunt. Adeóque, cùm singula singulis respectivè sumptis æquiponderent; etiam omnia omnibus æquiponderabunt: (per 12 El. 5.) Eritque propterea Centrum Gravitatis in Dividente Plano. Per 15 Cap. 4.

A. C.

PROP. V. Fig. 120,

Triangul, Parallelogrammi, Regularis Plani, Circuli, 121, 122,
Ellipseos; vel Portionis Circuli, Ellipseos, Parabolæ, 123,
Hyperbolæ, rectâ (vel parallelis rectis) abscissæ; Coni, 124,
Pyramidis, Cylindri, Prismatis, Sphæræ, Sphæroideos, 125,
Conoi- 126.

Conoideos; vel Portionis cujusvis horum, plano vel parallelis planis abscissæ; vel cujuscunque demum Figuræ planæ solidæve, quæ Diametrum aut Axem habet, quæ sibi ordinatim-applicatas rectas omnes parallelas bisecat, pérque omnium sibi ordinatim-applicatorum Planorum parallelorum centra gravitatis transit: Centrum Gravitatis est *in ejusmodi Diametro vel Axe quovis.*

B.D. Atque hinc datur Circuli, Ellipseos, Trianguli, Parallelogrammi, Regularis Plani, Sphæræ, Sphæroideos, Cubi, Parallelepipedi cujusvis, (& figuræ cujuscunque quæ hujusmodi plures Axes vel Diametros habet in unico puncto concurrentes,) Centrum Gravitatis. Nempe, in duorum pluriúmve concursu.

E Hinc item (cum primâ hujus) datur Centrum Gravitatis Cylindri, Prismatisve vel Solidi Prismatici cujusvis, cujus basium centra gravitatis dantur; (eorúmque Superficierum, dummodo Perimetri Basis centrum gravitatis datum sit:) Nempe; in Axis medio.

A Cum enim (verbi gratia) in Triangulo, Recta à quovis angulo ad appositi Lateris medium, rectas omnes huic lateri parallelas (Triangulum complentes, per def. 1. Cap. 4.) bisecet, per 2 & 6 El. 6. (quam itaque figuræ Diametrum dico; eâ significatione quâ Conicarum Sectionum Diametri, ab Apollonio definitæ, sic dicuntur:) Adeóque per singularum Centra Gravitatis transeat; (per 2 hujus.) Erit in plano per illam rectam (per 3 hujus) adeóque in illâ rectâ (quippe in trianguli plano, per 26 Cap. 4.) Centrum Gravitatis.

Similiter ostendetur; de Figuræ cujusvis Planæ Diametro; (ut Parabolæ, Hyperbolæ, Ellipseos, Circuli, Parallelogrammi, Plani Regularis, &c.) eâ nempe, quæ omnes parallelas rectas, planum complentes, bisecat.

B Cúmque sint hujusmodi Diametri, in Triangulo tres, (nempe, à singulis angulis ad opposita latera;) in Parallelogrammo, quatuor, (nempe diagonales duæ, & duæ quæ oppositorum laterum media jungunt;) in Polygono regulari, tot quot sunt Anguli, vel Latera: nempe, si laterum numerus par sit; tum à singulis angulis ad angulum oppositum, tum à medio lateris cujusvis ad medium lateris oppositi

positi, ducentur hujusmodi diametri; sin laterum numerus sit impar, a quovis angulo ad oppositum Latus: in Circulo, & Ellipsi, diametri numero infinitæ: In singulis his figuris (aliisque quibuscunque quæ plures habent diametros ut sunt irregulares multæ,) in duarum quarumvis concursu, est Centrum Gravitatis. Per 26 Cap. 4.

In figuris solidis, quæ Axem habent, per Planorum Parallelorum omnium Centra Gravitatis transeuntem; (quales sunt Prisma, Cylindrus, Pyramis, Conus, Pyramidoides, Conoides, Sphæra, Sphæroides, aliæque multæ;) idem similiter ostenditur. Quippe Plana omnia per hos Axes (sive erectos sive inclinatos ad ordinatim-applicata Plana) sunt Plana Æquilibrii; (ut quæ, tum singula Parallela Plana per quorum centra gravitatis transeunt, tum propterea quod ex his conflatur solidum, in partes æquiponderantes dividunt;) Adeoque ipsi Axes, Axes Æquilibrii: Et propterea, in illis Centrum Gravitatis. per 15 Cap. 4. C.

Cúmque sint in Parallelepipedo, Sphærâ, Sphæroide, (aliisque multis figuris solidis,) hujusmodi plures Axes: in duarum quarumvis concursu, est Centrum Gravitatis. per 26 Cap. 4. D.

Corollarium ultimum; satis per se patet, ex hac & Prop. 1. E.

PROP: VI.

Lineæ rectæ, Parallelogrammi, Prismatis, Cylindri, Trianguli, Parabolæ, Paraboloidis; Complementi Parabolæ, Paraboloidísve; Pyramidis, Coni, Conoideos Parabolici, vel Paraboloidici; & cujuscunque demum figuræ ex parallelis rectis planísve secundum seriem infinitam (ab o inchoatam, & dato terminatam) Primanorum, Secundanorum, Subsecundanorum, (aliorúmve in def. 1. Cap. hujus definitorum,) constantis: A.H.

Magnitudo, est ad magnitudinem Parallelogrammi, vel solidi Prismatici, super æquali Base, æque alti; *ut 1 ad indicem Seriei unitate auctum:* Et *Centrum Gravitatis* in eâ à vertice distantiâ quæ Diametrum vel Axem ita dividit

vidit, ut *pars ad Basin*, sit ad partem quæ est *ad verticem*; ut 1 *ad Indicem Seriei Unitate auctum*: Vel (quod eodem recidit) in eâ quæ est ad *Basis distantiam*; ut *Index ille Unitate auctus*, ad *eundem Binario auctum*.

B. Hoc est; ut pars ad Basin, ad partem quæ est ad verticem; sit in Linea Rectâ, Parallelogrammo, Prismate, & Cylindro, (intelligendo verticem in utrovis extremo,) ut 1 ad 1.

C. In Triangulo, superficie erecti Coni vel Pyramidis (demptâ base,) & Conoide (vel Pyramidoide) Parabolico; ut 1 ad 2.

D. In Complemento Parabolæ, Pyramide, vel Cono; ut 1 ad 3.

E. In Complemento Paraboloidis Cubici, ut 1 ad 4: Biquadratici; ut 1 ad 5: &c.

F. In Parabola; ut 1 ad $1\frac{1}{2}$; sive, ut 2 ad 3.

G. In Paraboloide Cubicali; ut 1 ad $1\frac{1}{3}$; sive ut 3 ad 4: in Biquadratico; ut 1 ad $1\frac{1}{4}$, vel ut 4 ad 5. &c.

B. Sive, (quod eodem recidit;) Distantia Centri Gravitatis à Plano per Verticem basi parallelo, ad distantiam Basis ab eodem Plano: (Quod & in Semicono, Semicylindro, Semi-Parabola, &c. aut quæ horum instar sunt; non minùs valet, atque in figuris integris:) est,

In Lineâ Rectâ, Parallelogrammo, Prismate, vel Cylindro; (facto vertice ut priùs;) ut 1 ad 2.

C. In Triangulo, & Conoide (vel Pyramidoide) Parabolico; ut 2 ad 3.

D. In Pyramide, Cono, & Complemento Parabolæ; ut 3 ad 4.

E. In Complemento Paraboloidis Cubici; ut 4 ad 5: Biquadratici; ut 5 ad 6, &c.

F. In Parabolâ; ut $1\frac{1}{2}$ ad $2\frac{1}{2}$; vel 3 ad 5.

G. In Paraboloide Cubicali; ut $1\frac{1}{3}$ ad $2\frac{1}{3}$; vel 4 ad 7: Biquadratico; ut $1\frac{1}{4}$ ad $2\frac{1}{4}$; vel 5 ad 9, &c.

Et

Et similiter in aliis hujusmodi figuris quibusvis.

Et quidem in Figuris Integris, utrinque ad Diametrum vel Axem positis; datur ipsum Axis vel Diametri punctum in quo est Centrum Gravitatis: In Dimidiatis, excavatis, &c. saltem Centri illius à vertice distantia. A. I.

Unde & Frusti figuræ ejusmodi, (parallelis basi rectis planísve truncatæ) Centrum Gravitatis habetur; ejúsve à Base Verticisve plano distantia. K.

Aut etiam hujusmodi Figuræ utcunque multatæ figurâ cujus tum Magnitudo nota sit, tum Centrum Gravitatis. per 27 Cap. præced.

Item, quæ ex hujusmodi totis, vel harum frustis componitur. L.

Et, speciatim, figuræ cujusvis planæ rectilineæ, & solidæ Planis terminatæ; Centrum gravitatis habebitur, ex eadem 27 Cap. præced.

NAm, si intelligatur Axis motûs, per A verticem transiens, Basi BB parallelus: Quæcunque sit series particularum (putà, Punctorum, Rectarum, Planorum,) ex quibus conflatur linea, figuráve, (putà series Æqualium seu Nullanorum, Arithmetice-proportionalium seu Primanorum, vel ut horum Quadrata, Cubi, &c. Radices quadraticæ, Cubicæ &c. hoc est Secundanorum, Tertianorum, &c. Subsecundanorum, Subtertianorum, &c. aliáve quæcunque ex definitis in def. 1. hujus;) Cum sint in distantiis ab axe motûs, ut 0, 1, 2, 3, &c. Arithmetice proportionalibus, (propter æqualem singularum crassitiem:) Erit series Momentorum (quippe quæ sunt in ratione ex Ponderum & Distantiarum rationibus compositâ) uno gradu altior quam est series Particularum; sive, series illa cujus Index sit unitate major quam Index seriei Particularum: Unde habetur tum magnitudo figuræ, tum summa Momentorum; per 1 hujus; adeóque Distantia Centri Gravitatis à plano per Verticem; per 24 Cap. 4. Ea quam habet propositio. Et quidem, ubi per præced. Centrum Gravitatis est in Diametro vel Axe, datur propterea ipsum Diametri vel Axis Punctum. A. Fig. 129.

Putà; Cum Linea recta, ut AD, (propter æqualia Puncta;) Parallelogrammum: ut BB∆ (propter rectas æquales;) vel circa hoc constructum Prisma, vel Cylindrus, (propter æqualia plana;) sit B.

Series

P. P. P. P.------P.
$0d.\ 1d.\ 2d.\ 3d.$------D.
$0dP, 1dP, 2dP, 3dP$,---DP.

$\frac{1}{2}NDP = NP \times \frac{1}{2}D.$

Series Æqualium ſeu Nullanorum; (puta ut P, P, P, &c.) cujus Index 0; (eſtque igitur ad ſeriem totidem maximo æqualium, hoc eſt, illam ipſam, ut 1 ad 0 + 1;) ſintque Diſtantiæ, ut $0d$, $1d$, $2d$, &c. quarum maxima, D: erit ſeries momentorum infinita, ut $0dP$, $1dP$, $2dP$, $3dP$, &c. uſque ad D P; Series Primanorum, cujus Index 1: Adeóque ſimul omnium momenta, (per 1 hujus;) ut $\frac{1}{2}NDP = NP \times \frac{1}{2}D$. Adeóque diſtantia Centri Gravitatis, $\frac{1}{2}$D. per 24 Cap. 4.

$0p, 1p, 2p, 3p$,---P.
$0d, 1d, 2d, 3d$,----D.
$0dp, 1dp, 4dp, 9dp$,---DP.

$\frac{1}{3}NDP = \frac{1}{2}NP \times \frac{2}{3}D.$

C Item: Cum Triangulum ABB (propter rectas, Baſi BB parallelas, diſtantiis à vertice proportionales,) & ſuperficies Coni Pyramidiſve (propter perimetros planorum ſimilium baſi parallelorum, diſtantiis à vertice proportionales;) Et Conoides (vel Pyramidoides) Parabolicum, ſuper Parabolâ BAB conſtructum, (cujus parallela plana, propter ordinatim-applicatas in Parabolâ in ſubduplicatâ ratione diametrorum interceptorum, ſunt in diametrorum ratione, ſive diſtantiarum à vertice; quippe in duplicata ratione ordinatim-applicatarum in parabolâ circa quas fiunt illa ſimilia plana;) ſit ſeries Primanorum; putà, ut $0p, 1p, 2p, 3p$, &c. uſque ad P; cujus Index 1: adeóque omnium ſummâ, ut $\frac{1}{2}NP$; (nempe, in ratione ad totidem maximo æqualium; hoc eſt, ad Parallelogrammum, Cylindrum, aut Priſma, ſuper eadem baſe, æque altum; ut 1 ad 2, per 1 hujus:) Sintque in diſtantiis, ut $0d, 1d, 2d, 3d$, &c. quarum maxima D: Erunt Momenta, ut $0dp, 1dp, 4dp, 9dp$, &c. uſque ad D P; ſeries Secundanorum; cujus Index 2. Adeóque (per 1 hujus) ſimul omnia, ut $\frac{1}{3}NDP = \frac{1}{2}NP \times \frac{2}{3}D$. Adeóque, Diſtantia Centri Gravitatis à vertice eſt $\frac{2}{3}$D, per 24 Cap. 4.

$0p, 1p, 4p, 9p$-----P.
$0d, 1d, 2d, 3d$-----D.
$0dp, 1dp, 8dp, 27dp$----DP.

$\frac{1}{4}NDP = \frac{1}{3}NP \times \frac{3}{4}D.$

D Item; Cum Pyramis vel Conus, circa Triangulum A B B, (propter diametros Circulorum, vel latera ſimilium Planorum, in ratione diſtantiarum à vertice; adeoque eorum planum, in diſtantiarum ratione duplicatâ,) ſit infinita ſeries Secundanorum; (puta ut $0p, 1p, 4p, 9p$, &c. uſque ad P;) cujus Index 2; & omnium ſumma, ut $\frac{1}{3}NP$; (hoc eſt, Pyramis ſeu Conus, ad circumſcriptum Priſma vel Cylindrum, ut 1 ad 3;) per 1 hujus; Sintque, diſtantiæ ut $0d, 1d, 2d, 3d$, &c. uſque ad D: Erunt

momenta

Momenta, ut $0dp$, $1dp$, $8dp$, $27dp$, &c. uſque ad DP; ſeries Tertianorum: cujus Index 3. Adeóque (per 1 hujus) ſimul omnia, ut $\frac{1}{4}NDP = \frac{1}{3}NP \times \frac{3}{4}D$. Adeóque, Diſtantia Centri Gravitatis a vertice, $\frac{3}{4}D$. per 24 Cap. 4.

Similiter omnino, de Complemento Parabolæ dicendum: quæ ſeries eſt Secundanorum. *Complementum* autem *Semi-parabolæ*, appello, id quod cum ſemi-parabolâ complet parallelogrammum circumſcriptum; (cujus diameter, eſt parabolæ Tangens in vertice; & ordinatim-applicatæ, parallelæ diametro parabolæ;) quod, utrinque circa eandem ſui diametrum duplicatum, appello, *Complementum Parabolæ.* (Putà, quod continetur inter duas lineas Parabolicas convexas AB, AB, quas in communi vertice A, tangat AD, complementi diameter; baſinque huic ordinatim-applicatam BB; cui parallelæ intelliguntur rectæ figuram complentes.) Hujúſque ordinatim-applicatæ ad diametros ſuas; ſunt ut diametri interceptæ in Parabola, ad ſuas ordinatim-applicatas. Adeòque, in duplicatâ ratione Diametrorum, ſive Diſtantiarum à vertice. Cùm itaque ſit (ut Pyramis) Series Secundanorum: Momenta, ſunt Series Tertianorum: Adeóque ſimul omnia, ut $\frac{1}{4}NDP = \frac{1}{3}NP \times \frac{3}{4}D$: Et Centri gravitatis à vertice diſtantia; $\frac{3}{4}D$. Ut, de Cono & Pyramide, oſtenſum eſt,

Complementum Paraboloidis Cubici, (propter hujus Paraboloidis ordinatim-applicatas, in ſubtriplicatâ ratione diametrorum interceptarum; adeóque ordinatim-applicatas Complementi, in Triplicatâ ratione diametrorum, ſive diſtantiarum à Vertice Complementi;) eſt Series Tertianorum: putà, ut $0p$, $1p$, $8p$, $27p$, &c. uſque ad P; adeóque ſumma omnium ut $\frac{1}{4}NP$; per 1 hujus; (hoc eſt, ad Parallelogrammum circumſcriptum, ut 1 ad 4:) Cum itaque Diſtantiæ ſint ut $0d$, $1d$, $2d$, $3d$, &c. ad D: Momenta erunt, ut $0dp$, $1dp$, $16dp$, $81dp$, uſque ad DP. Et ſimul omnia (per 1 dujus) ut $\frac{1}{5}NDP = \frac{1}{4}NP \times \frac{4}{5}D$. Et Diſtantia Centri gravitatis; $\frac{4}{5}D$. per 24 Cap. 4. E.

$$\begin{array}{l} 0p,\ 1p,\ 8p,\ 27p \ldots\ldots P \\ 0d,\ 1d,\ 2d,\ 3d \ldots\ldots D \\ \hline 0dp,\ 1dp,\ 16dp,\ 81dp \ldots DP. \end{array}$$

$$\frac{1}{5}NDP = \frac{1}{4}NP \times \frac{4}{5}D.$$

Atque, ad eandem formam, mutatis mutandis, in aliis Paraboloidium Complementis, aut etiam ſolidis eorum converſione circa Axem ſuum factis: aliiſve ſecundum ejuſmodi alias ſeries.

Parabola, BAB, (propter ordinatim-applicatas in ſubduplicatâ ratione diametrorum,) eſt ſeries Subſecundanorum; cujus Index $\frac{1}{2}$: puta, $\sqrt{0p}$, $\sqrt{1p}$, $\sqrt{2p}$, $\sqrt{3p}$, &c. uſque ad P: Adeóque ſimul omnia, ut $\frac{2}{3}NP$; (nempe ad Parallelogrammum circumſcriptum, ut 2 ad 3,) F.

per 1 hujus. Et propter diſtantias, ut od, $1d$, $2d$, $3d$, &c. uſque ad D; Momenta erunt, ut $od\sqrt{p}$, $1d\sqrt{1p}$, $2d\sqrt{2p}$, $3d\sqrt{3p}$, &c. vel, ut $o\,d\sqrt{p}$, $d\sqrt{1p}$, $d\sqrt{8p}$, $d\sqrt{27p}$, &c. uſque ut DP: quæ eſt, ſeries Cuborum Subſecundanorum; cujus Index $1\frac{1}{2}$ vel $\frac{3}{2}$. Adeóque (per 1 hujus) omnia, ut $\frac{2}{5}NDP = \frac{2}{3}NP \times \frac{3}{5}D$.

$$\sqrt{op},\ \sqrt{1p},\ \sqrt{2p},\ \sqrt{3p}\ldots P$$
$$od,\ 1d,\ 2d,\ 3d\ldots D$$
$$od\sqrt{p},\ 1d\sqrt{p},\ 2d\sqrt{2p},\ 3d\sqrt{3p}\ldots DP.$$
$$d\sqrt{od},\ d\sqrt{p},\ d\sqrt{8p},\ d\sqrt{27p}\ldots DP.$$
$$\frac{2}{5}NDP = \frac{2}{3}NP \times \frac{3}{5}D.$$

Et diſtantia Centri gravitatis, $\frac{3}{5}D$.

G. Paraboloides Cubicale, (propter ordinatim-applicatas in ratione diametrorum ſubtriplicatâ,) eſt ſeries Subtertianorum; cujus Index $\frac{1}{3}$. puta ut $\sqrt{c\,op}$, $\sqrt{c\,p}$, $\sqrt{c\,2p}$, $\sqrt{c\,3p}$, &c. ad P. Et omnium ſumma, ut $\frac{3}{4}NP$; per 1 hujus. (hoc eſt, ad Parallelogrammum circumſcriptum, ut 3 ad 4.) Et, propter diſtantias, ut od, $1d$, $2d$, $3d$, &c. ad D: Momenta erunt, ut, $od\sqrt{c\,op}$, $1d\sqrt{c\,1p}$, $2d\sqrt{c\,2p}$, $3d\sqrt{c\,3p}$, &c. ad DP; ſive, ut $d\sqrt{c\,op}$, $d\sqrt{c\,p}$, $d\sqrt{c\,16p}$, $d\sqrt{c\,81p}$, &c. ad DP; ſeries Biquadratorum ſubtertianorum; cujus Index $1\frac{1}{3}$ vel $\frac{4}{3}$. Et ſumma omnium (per 1 hujus) ut $\frac{3}{7}NDP = \frac{3}{4}NP \times \frac{4}{7}D$. Et diſtantia Centri gravitatis, $\frac{4}{7}D$.

$$\sqrt{c\,op},\ \sqrt{c\,1p},\ \sqrt{c\,2p},\ \sqrt{c\,3p}\ldots P$$
$$od,\ 1d,\ 2d,\ 3d\ldots D$$
$$od\sqrt{c\,op},\ 1d\sqrt{c\,p},\ 2d\sqrt{c\,2p},\ 3d\sqrt{c\,3p}\ldots DP.$$
$$d\sqrt{c\,op},\ d\sqrt{c\,p},\ d\sqrt{c\,16p},\ d\sqrt{c\,81p}\ldots DP.$$
$$\frac{3}{7}NDP = \frac{3}{4}NP \times \frac{4}{7}D.$$

Et ſimiliter de aliis ſeriebus judicandum.

H. Nempe, univerſaliter; Si Index ſeriei, Ponderum ſit S; adeóque (per 1 hujus) ſumma totius, ut $\frac{1}{S+1}NP$: Index ſeriei Momentorum, erit $S+1$; adeóque horum ſumma, ut $\frac{1}{S+2}NDP$. Quæ per ſummam Ponderum $\frac{1}{S+1}NP$ diviſa; exhibet $\frac{S+1}{S+2}D$, diſtantiam Centri gravitatis à vertice; nempe ad diſtantiam maximam ut $S+1$, ad $S+2$: Adeóque reliquum diſtantiæ (quæ eſt diſtantia Centri gravitatis à Baſi) ut $\frac{1}{S+2}D$. Et propterea, Axis portio ad Verticem, ad portionem ad Baſem, ut $S+1$ ad 1. Quod erat demonſtrandum.

Quod-

Quodque de Figuris integris oſtenſum eſt; idem de Dimidiis, ſimiliter oſtendetur; (Putà, de Semi-Parabolis, Semi-paraboloidibus, & complementis; vel horum Solidis; &c.) quoad diſtantiam Centri gravitatis à Plano per verticem baſi parallelo. Quamquam enim ipſum Centri punctum non hinc innoteſcat, (quia hujuſmodi Dimidiatæ Figuræ, Diametrum non habent, quæ & linea recta ſit & ſingulas ordinatim-applicatas biſecet, quò propoſitio præcedens hic in ſubſidium advocetur ut ipſum Centrum determinetur;) tamen, quantum illud à verticis Plano diſtet, (quod eſt hujus Propoſitionis opus,) non minùs in dimidiatis, quàm in integris figuris, hinc innoteſcit; & demonſtratio ſimiliter quadrat; eadem utique eſt ordinatim-applicatarum ſeries ſive in integris, ſive in dimidiis figuris. Ut ex earum definitionibus patet: Dimidiorum enim atque Duplorum, eadem eſt inter ſe ratio; per 15 El. 5. I. Fig. 130.

Similiter; Idem obtinet; ſi non quidem Dimidiata figura (putà, ADB Semi-parabola,) ſed utcunque hujuſmodi ſeries una ex alterâ dematur; reſidui Centrum gravitatis (figuræ Diametrum vel Axem habentis,) vel ſaltem Centri Diſtantia à plano per verticem baſi parallelo. Putà; Si Semi-parabolæ ADB, eximatur ADb ſemi-parabola; reſidui AbB Centrum Gravitatis innoteſcit; ſaltem, quantum à Plano per A diſtat. Nam ejuſdem generis ſeries eſt, tum ADB tum AbB.

Imò verò; ſi non ejuſdem generis ſit ADb, atque ADB; ſed verbi gratia, ex ABD Paraboloide Cubico, auferatur AbD Parabola, aut Triangulum, aut alia figura quævis quæ ex aliquâ definitarum ſerie conflatur: Cognitis enim Totius & Ablati tum magnitudine, tum Centro Gravitatis; etiam Reſidui cognoſcitur; per 27 Cap. 4. Saltem cognitâ utriuſque Magnitudine, & Ponderatione reſpectu expoſiti plani; cognoſcitur Reſidui Ponderatio & Magnitudo; adeóque & Centri gravitatis diſtantia; per prop. 24. Cap. 4.

De Fruſtis item ſimiliter fiet judicium. Nempe, Propter datum vel ipſum Centrum Gravitatis, vel diſtantiam Centri Gravitatis, unà cum magnitudine; totius ADB vel AbB, & ablati ARF, vel AfF; dabitur & Fruſti reliqui, FRDB, vel FfbB, ut ante. Per 27, vel 24, Cap. 4. K.

Similiter; de figuris ex hujuſmodi pluribus conflatis, fiet judicium: Et ſpeciatim de Planis omnibus Rectilineis, (quippe in Triangula poſſe dividi, notum eſt;) & Solidis quæ planis terminantur; (quippe, hæ ſaltem in Pyramides dividi poterunt:) Datis utique partium Magnitudinibus, & Centris Gravitatis; dabitur Totius; per 27 Cap. 4. Vel datis ſaltem magnitudinibus, & diſtantiis centrorum (ab expoſito plano) adeóque Ponderationibus; dabitur etiam Totius Ponderatio L.

& Magnitudo; adeóque & Centri gravitatis diſtantia à plano expoſito.

Neque hæc de figuris Planis tantùm obtinent; ſed in Solidis non minùs. Putà, ſi Conoides Parabolicum, vel Paraboloidicum, vel Conus etiam, aut Pyramis, vel Cylindrus, aut Priſma, &c. Conicè excavetur; vel horum Fruſta, Cylindricè; aut aliàs mille modis: uti ex jam dictis ſatis demonſtratur.

SCHOLIUM.

HActenus itaque Centrum Gravitatis invenimus, in figuris omnibus Planis Rectilineis; & Solidis, quæ planis terminantur: Sed & in Planis Curvilineis, & Solidis curvis ſuperficiebus terminatis, non paucis; tum Magnitudinem tum & Centrum Gravitatis determinavimus. Et quidem longè pluribus quàm quò pertigerat doctrina Veterum. Atque, in ſequentibus, ad plura adhuc procedendum, ultrà quàm (quantum ſcio) quiſquam pertigit Recentiorum; ſaltem ultrà quàm à quoquam editum eſt, ante editam noſtram (unde hæc directâ methodo deducuntur) Arithmeticam Infinitorum.

Quod autem, de Figurarum Fruſtis, figuriſque Excavatis, aut aliàs multatis, & figurarum Aggregatis, &c. ad hanc propoſitionem oſtenſum eſt: Etiam in ſequentibus intelligendum erit. Utpote ex prop. 27. Cap. præced. deducendum.

Plura verò quæ huc ſpectant, videat (cui id lubitum erit) in noſtrâ *Arithmeticâ Infinitorum*; (ubi hæc Methodus fuſiùs traditur:) Et in noſtro *Commercio Epiſtolico*, (cum D Fermatio, aliiſque,) Epiſt. 16, ejúſque Appendice.

PROP.

PROP. VII.

Si intelligatur ex Rectis Planísve, secundum aliquam ex Reciprocis (in def. 2. hujus definitis, Indicem habentibus Negativum) seriem infinitam, (ab $\frac{1}{0}$ ipsâ seriei origine inchoatam, & dato terminatam,) Figura conflari: A.

Habebit hæc, ad Verticem, latitudinem Infinitam: B.

Finitam tamen, si, ex parte Verticis, intelligatur vel tantillum Plano parallelo abscindi; (adeóque figura saltem truncata magnitudinis erit finitæ:) C.

Aream verò; quæ sit ad Parallelogrammum, vel Solidum Prismaticum, super æquali Base æquè altum; ut 1, ad *Indicem Unitate auctum:* D.

Adeóque vel magnitudine Finitam; si Index sit major quam -1; (putà $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{4}$, &c.) G.

Vel Infinitam; si Index sit -1: E.

Vel Plusquam Infinitam; si sit Index minor quam -1; (putà, -2, -3, &c.) F.

Quæque sunt magnitudinis Infinitæ, (aut plusquam Infinitæ,) Centrum Gravitatis non habent. H.

Quæ sunt finitæ magnitudinis, siquod habent Centrum Gravitatis, in eâ habent à vertice distantiâ, quâ ita dividitur Diameter vel Axis, ut *pars ad Basin*, sit ad *partem quæ est ad Verticem*; ut 1, ad *Indicem seriei Unitate auctum.* I. L.

Habent autem Centrum Gravitatis hujusmodi Figuræ (magnitudinis finitæ) si sint Integræ, (hoc est, utrinque circa Diametrum vel Axem similiter positæ;) Nempe, in Axis illo puncto, quod, ita ut dictum est, distat. K.

Ex dimidiatis verò (vel quæ harum instar sunt) quæ habent, quæque non habent, in Propositione sequente dicetur. L.

Quæ,

M. Quæ, exemplis facile explicantur.

N. Deque his Figuris Truncatis, aut aliàs Mulctatis, vel Aggregatis; idem judicandum est atque de illis propositionis Præcedentis.

O. Atque hæ *Figuræ interminabiles* (planæ, solidæve;) ad *Paraboloidium* genera spectant, vel ad harum solida.

P. Ipsæ autem *Lineæ Curvæ*, ad quarum convexas adjacent Interminabiles hujusmodi Figuræ Planæ; ad *Hyperbolarum* seu *Hyperboloidium* genus referendæ sunt.

Q. Sed & quæ ad *Hyperboloidium* harum (ea sola excepta quæ est vera Hyperbole Appolloniana) *Concavas* adjacent *Figuræ planæ*, (concava & rectis terminatæ) tum quam magnitudinem habent hinc determinabitur; tum & Centrum gravitatis datum erit.

A. Fig.129. INtelligatur, ad Diametrum vel Axem AD, hujusmodi figura plana solidáve construi, A δ BD; cujus Basis DB; & huic parallelæ rectæ aut superficies planæ (figuram complentes) ordinatim-applicatæ, secundum seriem ex Reciprocis illis quamlibet.

Erit, propter seriei Directæ terminum primum o, seriei reciprocæ primus terminus ∞ infinitus: puta $\frac{1}{0} = \infty$. (Nam, ubi quantitas quælibet dividitur; si dividens sit o, quotiens erit ∞: quippe nulla quantitas finita, pro quotiente posita, dividentem o multiplicans, restituet dividendam.) Adeóque Recta Verticis Aδ erit interminabilis: Sive, figuræ latitudo, in Vertice, infinita.

B. Cùm vero Seriei directæ terminus post primum quilibet quantitatem habeat finitam; seriei reciprocæ reliqui omnes termini sunt finiti; adeóque figuræ infra verticem finita latitudo. (Nam, quantuluscunque sit ille post primum terminus seriei directæ; hic quantitatem finitam dividens, quotientem dabit finitum.)

C. Adeóque, utut tota à vertice ad basin figura, magnitudinis esset infinitæ (propter infinitam verticis latitudinem;) si tamen intelligatur, ex parte verticis, vel tantillum truncari plano basi parallelo; reliquum figuræ, magnitudinis erit finitæ. (Erit utique magnitudinis datæ, altitudo finita; sed & truncatæ latitudo vel amplitudo per jam ostensa; adeóque tota figura, sive plana sit sive solida, sic truncata, magnitudinis erit finitæ.)

Est

Eſt autem, à vertice ad baſin tota, ad Parallelogrammum, vel ſolidum Priſmaticum (ſive ſit Parallelepipedum, ſive aliud Priſma, ſive Cylindrus, vel iſtiuſmodi quodvis Solidum, ſuper quâcunque baſe, eandem ubique; per totam altitudinem, amplitudinem habens,) ſuper æquali baſe, æque altum; hoc eſt, ad ſeriem totidem ultimo æqualium, (per def. 1. Cap. 4.) ut 1, ad indicem ſeriei Unitate auctum; per 1 hujus. D.

Adeóque, (propter Reciprocarum Serierum Indicem negativum,) ſi Index, ſit -1; erit $-1+1=0$; adeóque ratio 1 ad 0, Infinita. Et propterea ſi ſeries illa ſit Reciproca primanorum, (quale eſt, complementum Hyperbolæ Apollonianæ, per prop. 95. Arithm. Infin.) figura erit magnitudinis infinitæ. (Quippe ad finitam datam, ut 1 ad 0.) E.

Si verò Index ſit minor quam -1, (hoc eſt, magis negativus,) putà, $-1\frac{1}{2}$, -2, -3, &c. etiam addito 1, manebit adhuc negativus; puta $-1\frac{1}{2}+1=-\frac{1}{2}$. $-2+1=-1$. $-3+1=-2$, &c. (per 8 Cap. 1.) adeóque, ratio 1 ad $-\frac{1}{2}$, 1 ad -1, 1 ad -2, &c. Nempe; ut Poſitivi ad Negativum; quæ eſt pluſquam infinita; (nam, 1 ad 0, eſt infinita; ergo, 1 ad minùs quam 0, eſt major quam infinita; per 8 El. 5.) Ergo, & Figura (quæ, ad datam, illam habeat rationem,) pluſquam Infinita. F.

Sin Index major ſit quam -1, (hoc eſt, minus negativus,) puta, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{4}$, &c. addito 1, fiet Poſitivus; puta $-\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4}$, $-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$. $-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$. $-\frac{2}{3}+1=\frac{1}{3}$ $-\frac{3}{4}+1=\frac{1}{4}$. &c. (per 8 Cap. 1.) Adeóque, ratio 1 ad $\frac{3}{4}$, 1 ad $\frac{2}{3}$, 1 ad $\frac{1}{2}$, 1 ad $\frac{1}{3}$, 1 ad $\frac{1}{4}$, &c. finita. Ergo, & Figura (ut quæ, ad datam finitam, finitam habet rationem,) magnitudinis finitæ; utut, latitudinis in vertice, infinitæ. G.

Quæ autem Magnitudinis ſunt Infinitæ, (aut pluſquam infinitæ,) Centrum gravitatis non habent. Quippe, ſi in ipsâ verticis rectâ, A δ, intelligeretur, (aut ſupra verticem; aut etiam per Baſin, aut infra Baſin:) Figura tota (reſpectu Plani baſi paralleli per Centrum illud tranſeuntis,) ad unas partes ponderaret; adeóque non eſſet Æquilibrium. Sin intra verticem & Baſin intelligatur; quantulacunpue ſit à vertice diſtantia; planum baſi parallelum per hoc tranſiens, Figuram dividet in ſegmenta duo; quorum illud ad baſin, Finitum erit, atque in diſtantiâ finitâ, (per jam oſtenſa;) illud autem ad verticem, Infinitum erit; (quippe, ſi à toto Infinito, Finitum auferatur: reliquum erit Infinitum: ſecùs enim, Finitum Finito additum, faceret Infinitum:) Adeóque, Infinitum hoc ad verticem (in quantulacunque diſtantiâ) Finito illi ad baſin, (in diſtantiâ quantacunque finitâ,) præponderabit: Adeóque non erit in illo plano Centrum Gravitatis. Nuſquam igitur. H.

I. Si verò sint magnitudinis Finitæ; puta, secundum seriem cujus Index
Fig. 131. sit $-S$, major quam -1, (ut jam ostensum est;) Ostendetur (ut in prop. præced.) totam figuram, sive seriei summam, esse $\frac{1}{-S+1}$ NP, (quæ, nempe sit ad parallelogrammum, vel solidum Prismaticum, NP, ut 1 ad $-S+1$;) & summam momentorum, sive momentum totius, (respectu plani per verticem Aδ, basi paralleli,) ut $\frac{1}{-S+}$ NDP, (nempe, ad momentum ipsius NP in distantiâ D suspensi, ut 1 ad $-S+2$; propter seriem Momentorum, uno gradu altiorem, quam est series Ponderum:) per 1 hujus. Adeóque, propter $\frac{1}{-S+2}$ $NDP = \frac{1}{-S+1} NP \times \frac{-S+1}{-S+2} D$, erit distantia Plani Æquilibrii (per 20 Cap. 3.) adeóque & Centri Gravitatis siquod est, (per 25 Cap. 4.) $\frac{-S+1}{-S+2} D$; adeóque reliquum distantiæ maximæ, (quæ baseos est,) $\frac{1}{-S+2}$ D. Hæc igitur ad illam, est ut 1 ad $-S+1$,
K. (in ratione finitâ; propter $-S+1$ quantitatem positivam:) Si itaque tota distantia D (basis à vertice,) ita dividatur putà in C; ut pars ad basin, CD, sit ad partem quæ est ad verticem, CA, ut 1 ad $-S+1$; planum per C transiens, basi parallelum, est Planum Æquilibrii. per 20 Cap. 3. Et quidem (si utrinque ad Diametrum vel Axem similiter construatur figura) in ipso Diametri vel Axis puncto C, (per 5 hujus.) Sin minùs; saltem siquod est Centrum Gravitatis, in eo plano est. per 24 Cap. 4.

L. Dico autem, *siquod est*; quoniam, in figurâ dimidiatâ (vel quæ istiusmodi est,) fieri potest, ut Centrum gravitatis, utut in Cβ infinitâ intelligatur, intelligenda tamen sit ab ipso C puncto in infinitâ distantiâ, (ut in prop. seq. ostendetur,) adeoque nusquam erit.

M. Exempli gratiâ. Si sit ADBβδ figura, ex serie reciprocâ subsecundanorum, conflata; (putà, cujus rectæ vel plana sint in reciprocâ ratione ordinatim-applicatarum in parabolâ:) cujus Index, $-\frac{1}{2}$. Adeóque, ad inscriptum Parallelogrammum vel Prisma

$$\frac{1}{\sqrt{0}}p.\ \frac{1}{\sqrt{1}}p.\ \frac{1}{\sqrt{2}}p.\ \frac{1}{\sqrt{3}}p\ \ldots\ldots P$$

$$0d.\ \ 1d.\ \ 2d.\ \ 3d\ \ldots\ldots D$$

$$\frac{0}{\sqrt{0}}dp.\ \frac{1}{\sqrt{1}}dp.\ \frac{2}{\sqrt{2}}dp.\ \frac{3}{\sqrt{3}}dp\ \ldots\ldots DP.$$

$$\sqrt{0}dp.\ \sqrt{1}dp.\ \sqrt{2}dp.\ \sqrt{3}dp\ \ldots\ DP.$$

$$\tfrac{2}{3}NPD = 2NP \times \tfrac{1}{3}D.$$

ma ADB△, (quod ſit N P,) ut 1 ad $-\frac{1}{2}+1$; hoc eſt, ut 1 ad $\frac{1}{2}$, vel 2 ad 1: nempe ut 2 NP. Momentorum ſeries, indicem habebit $-\frac{1}{2}+1$ vel $\frac{1}{2}$; (quippe uno gradu altior quam Ponderum, propter diſtantias arithmetice proportionales:) Adeóque totius momentum, ad momentum Parallelogrammi vel Priſmatis in diſtantiâ maximâ appenſi, (quod ſit NPD,) ut 1 ad $\frac{1}{2}+1$; hoc eſt, ut 1 ad $1\frac{1}{2}$, vel 2 ad 3: Nempe, $\frac{2}{3}$ NPD $=$ 2 NP $\times\frac{1}{3}$ D. Diſtantia itaque Plani Æquilibrii (&, ſiquod eſt, Centri Gravitatis,) à vertice, eſt $\frac{1}{3}$ D. ejuſdémque propterea à Baſi diſtantia, $\frac{2}{3}$ D. Adeóque hæc ad illam, (hoc eſt C D ad C A,) ut 2 ad 1: vel 1 ad $\frac{1}{2}$; hoc eſt, 1 ad $-\frac{1}{2}+1$. Fig. 129. Fig. 131.

Si ſit ex ſerie reciprocâ Tertianorum; cujus Index $-\frac{1}{3}$. Erit ſumma Ponderum, (propter $-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$; &, ut 1 ad $\frac{2}{3}$, ſic 3 ad 2;) $\frac{3}{2}$NP. Index ſeriei momentorum $-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$. Adeóq; (propter $\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}$; & 1 ad $\frac{5}{3}$, ut 3 ad 5) ſumma Momentorū, $\frac{3}{5}$NPD $=\frac{3}{2}$ NP $\times\frac{2}{5}$D. Adeóq; plani æquilibrii (&, ſi quod eſt, Centri Gravitatis) diſtantia à vertice, $\frac{2}{5}$D; à baſe, $\frac{3}{5}$D: Adeòque hæc ad illam, (nempe C D ad C A,) ut 3 ad 2; vel 1 ad $\frac{2}{3}$; hoc eſt, 1 ad $-\frac{1}{3}+1$. Atque in aliis ſimiliter.

$$\frac{1}{\sqrt{c}\,0}p.\quad \frac{1}{\sqrt{c}\,1}p.\quad \frac{1}{\sqrt{c}\,2}p.\quad \frac{1}{\sqrt{c}\,3}p.\ \ldots\ldots P$$
$$0d.\quad 1d.\quad 2d.\quad 3d.\ \ldots\ldots D$$
$$\frac{0}{\sqrt{c}\,0}dp.\ \frac{1}{\sqrt{c}\,1}dp.\ \frac{2}{\sqrt{c}\,2}dp.\ \frac{3}{\sqrt{c}\,3}dp.\ \ldots\ DP.$$
$$\sqrt{c}\,0dp,\ \sqrt{c}\,1dp,\ \sqrt{c}\,4dp,\ \sqrt{c}\,9dp\ \ldots\ DP.$$
$$\tfrac{3}{5}NPD=\tfrac{3}{2}NP\times\tfrac{2}{5}D.$$

Si itaque in eâ ratione dividatur A D in C; ſitque figurâ utrinque ſimiliter applicata, ad A D Diametrum vel Axem: erit C Centrum Gravitatis; per 5 hujus. Sin minùs; ſaltem planum per C eſt planum Æquilibrii; atque in hoc, ſiquod ſit, Centrum Gravitatis. N.

Porro; Habitis hoc pacto, tum figuræ totius ADBδ, tum abſciſſæ ut ACβδ, magnitudine, & Centro gravitatis; ſaltem magnitudine, & plano æquilibrii, plano per axem motûs Aδ parallelo; ſeu magnitudine & ponderatione: Habentur reſidui, ſive figuræ truncatæ CβBD, magnitudo & Centrū Gravitatis; ſaltem magnitudo & ponderatio; adeóq; diſtantia Centri Gravitatis, Planúmve in quo eſt, plano Baſis ſeu Plano huic parallelo per axem motûs, parallelum. Ut in prop. præced.

Et ſimiliter oſtendetur de figuris hujuſmodi alias mulctatis, vel aggregatis; atque in prop. præced.

Figuras autem has interminabiles, ego ad Paraboloidium genera refero; aut horum Solida: propter continuatam ſeriem ſimplicem, utut reciprocam, quâ diſponuntur ordinatim-applicatæ rectæ, vel figuræ planæ, ipſas complentes; ut in Paraboloidibus eorúmque ſolidis, ob- O.

Fig.129. observare est. Quâ de causâ, & communem sortem subeunt, cum iis
Fig.131. in propositione præcedente memoratis, (nisi quod ex his aliquæ sint magnitudinis infinitæ, & Centrum gravitatis non habeant.) Et quidem has in eâdem cum illis propositione comprehendissem, nisi quod in his (propter infinitatem) speciatim aliqua determinanda essent, quæ in illis absque aliquâ determinatione proponuntur. Quippe nulla est ex figuris illis quæ vel infinitæ sit magnitudinis, vel Centrum Gravitatis non habeat.

P. Ipsæ tamen Curvæ, ad quarum Convexas adjacent hujusmodi figuræ Planæ, ad Hyperbolarum, vel Hyperboloidium, familiam spectant.

Et quidem, quæ terminat figuram planam, ex serie reciprocâ Primanorum conflatam, (qualis est media Curvarum trium in figurâ adscriptâ,) est vera *Hyperbola*, Apolloniana; cujus Asymptotæ sunt A D, A δ. (ut prop. 91, 95, Arithm. Infin. ostensum est.) Atque perinde omnino est, sive, si ex parte D terminata, sit interminata versus δ; sive, ex parte δ terminata, interminata sit versus D. Utrovis enim modo evadet figura simpliciter infinita.

Reliquæ verò, quæ *Hyperboloides* dici poterunt; duabus item Asymptotis A D, A δ, interjacent: ita quidem ut quæ, versus D terminatæ & interminatæ versus δ, figuras terminant magnitudine finitas; eædem terminatæ versus δ, & interminatæ versus D, figuras terminabunt plusquam infinitas: Et contra. Quippe, si ad A D ordinatim-applicatæ, & ipsi A δ parallelæ sint, verbi gratiâ, in serie reciprocâ Subsecundanorum; ordinatim-applicatæ ad A δ, ipsi A D parallelæ, erunt reciproca series Secundanorum; Et figura ex illi constans non infinita; ex his verò, plusquam infinita. Et in reliquis similiter. Ut ad prop. 105. *Arithm. Infin.* ostendimus.

Q. Atque hinc etiam constat, hujusmodi Hyperboloidium figuras, Curvâ Concavâ terminatas, quadrandi methodus; & Centrum Gravitatis investigandi. Cùm enim Frusti C β B D, (ut hîc & prop. seq. ostensum est,) & Parallelogrammi D C β d, (ut notum est) tum Magnitudo, tum Centrum Gravitatis habetur: Habebitur & Hyperboloideos β B d, magnitudo & gravitatis Centrum. Atque hoc quidem sive figura adjacens convexæ, finita sit, sive plusquam infinita: quippe eadem est curva (utut secundum aliam diametrum considerata) quæ utramque terminat; ut modò ostensum est. At in verâ Hyperbolâ (eâque, ex jam traditis solâ,) non idem fiet; quippe ad cujus convexam adjacens figurâ interminabilis est & magnitudine infinita; sive A D, sive A δ, pro diametro habeatur.

SCHO-

SCHOLIUM.

Atque hactenus (ut de Rectilineis Planis, & figuris Solidis quæ planis terminantur, nihil addam,) ostendimus in Planis Curvilineis omnibus, quæ ad genus Parabolicum vel Paraboloidicum spectant, & horum Solidis; atque ex Reciprocis, & Solidis horum, quotquot Centrum Gravitatis habent; distantiam Centri Gravitatis à Vertice: Adeóque, si pro Diametro vel Axe Rectam habeant per omnium sive rectarum sive planorum, ex quibus (secundum def. 1. Cap. 4.) conflari intelligatur figura, centra gravitatis transeuntem; ipsum Gravitatis Centrum totius; utpote quod in ipsâ Diametro Axéve constitutum est; per 5 hujus.

In hujusmodi tamen figuris Dimidiatis (ut Semiparabolâ, Semiparaboloide, &c.) aliisque ejusmodi; utut de distantia Centri Gravitatis à vertice constet; de ipso Centri puncto, propter ipsius ab illâ Diametro Axéve distantiam nondum traditam, nondum constat.

Hujus igitur à Diametro Axéve distantia, propositione sequente tradetur, (atque, in solidis, tertium adhuc æquilibrii planum,) ut ipsum centri punctum determinetur.

PROP. VIII.

Semiparabolæ, Semiparaboloidis, aut Complementi utriusvis; Planíve Reciproci (centrum gravitatis habentis;) ad diametrum axémve adjacentis: *Distantia Centri Gravitatis ab illâ Diametro Axéve*, est, *ad distantiam inde puncti medii* (*vel centri gravitatis Basis,*) ut *Index seriei Unitate auctus*, ad *Duplum ejusdem Indicis unitate auctum.* A: Fig. 131.

In Solidis autem; pro *Basis puncto medio* (quod in planis est basis centrum gravitatis) sumendum est *Centrum Gravitatis Basis*; Erítque totius Centrum gravitatis, in eo per Diametrum Axémve plano quod per illud Basis Centrum-gravitatis transit; adeóque & per omnium Basi E.

Fig. 129. Fig. 131. parallelorum Planorum, (quæ ſimiliter poſita ſupponimus,) centra gravitatis.

(Quod quidem planum, in ſolidis ex Planorum ſemiconverſione (aliâve converſione quâvis imperfectâ) circa axem illum deſcriptis; (qualia ſunt, Semiconus; Semipyramis; Semi-conoides vel Semi-Pyramidoides Parabolicum, vel Paraboloidicum; Semi-ſolidum ex converſione figuræ Reciprocæ circa axem ſuum; & horum omnium ſegmenta quælibet, duobus per axem planis, interjecta:) illud eſt, quod Baſis arcum biſecat.)

Atque, pro Indicis ſeriei *Duplo*; ponendum erit *Seſquialterum ejuſdem Indicis.*

C. Adeóque; hujuſmodi Dimidiatarum figurarum Planarum
Fig. 132. (quotquot habent) omnium; & Solidarum circa illas conſtructarum, quarum Baſis Centrum-Gravitatis notum eſt; Centrum gravitatis determinatur.

D. Nempe; In Semiparabolâ; diſtat à Tangente Verticis, $\frac{3}{5}$ Altitudinis; à Diametro, $\frac{3}{8}$ Latitudinis (ſeu Baſeos) Parallelogrammi Circumſcripti, vel $\frac{3}{4}$ Semi-latitudinis.

In Semi-paraboloide Cubico; diſtat à Tangente Verticis, $\frac{4}{7}$ altitudinis; à Diametro, $\frac{4}{10}$ Latitudinis; vel $\frac{4}{5}$ Semi-latitudinis.

In Semiparaboloide Biquadratico; diſtat à Tangente Verticis, $\frac{5}{9}$ Altitudinis; à Diametro, $\frac{5}{12}$ Latitudinis; vel, $\frac{5}{6}$ Semi-latitudinis.

In Semiparaboloide Surdeſolidali; diſtat â Tangente Verticis, $\frac{6}{11}$ Altitudinis; à Diametro, $\frac{5}{14}$ Latitudinis; vel, $\frac{6}{7}$ Semilatitudinis. Et ſimiliter in Semiparaboloidibus ſequentibus, mutatis mutandis.

In Semiparabolæ Complemento; Diſtat à rectâ per Complementi verticem (quæ eſt parabolæ Diameter,) $\frac{3}{4}$ Altitudinis; à Diametro Complementi, (quæ eſt Parabolæ Tangens in vertice,) $\frac{3}{10}$ Latitudinis; vel $\frac{3}{5}$ Semi-latitudinis.

In

In Complemento Semiparaboloidis Cubicalis; Diſtat à vertice Parallelogrammi circumſcripti (vel Paraboloidis Diametro) $\frac{4}{5}$ Altitudinis; à Diametro (vel Paraboloidis Tangente in vertice,) $\frac{4}{14}$ Latitudinis; vel, $\frac{4}{7}$ Semilatitudins.

In Complemento Semiparaboloidis Biquadraticalis; diſtat à verticis rectâ, (baſi parallelâ,) $\frac{5}{6}$ Altitudinis; à Diametro ejus, $\frac{5}{18}$ Latitudinis, vel $\frac{5}{9}$ Semi-latitudinis.

In Complemento Semiparaboloidis Surdeſolidalis; diſtat à verticis rectâ, $\frac{6}{7}$ Altitudinis; à Diametro, $\frac{6}{22}$ Latitudinis; vel $\frac{6}{11}$ Semilatitudinis. Et in ſequentibus ſimiliter, mutatis mutandis.

Figuræ Reciprocæ dimidiatæ, ſecundum ſeriem cujus Index non eſt major, (hoc eſt, non minus negativus,) quam $-\frac{1}{2}$, conſtitutæ; Centrum Gravitatis non habent. Sin major ſit index quam $-\frac{1}{2}$; ſequuntur ſerierum directarum leges. Nempe, B. Fig. 133.

Si Index ſit $-\frac{1}{3}$; Centrum gravitatis diſtat à vertice figuræ, $\frac{2}{5}$ Altitudinis; ab ejus Diametro, $\frac{2}{2}$ Latitudinis (ſeu Baſeos) Inſcripti Parallelogrammi; vel $\frac{2}{1}$ Semi-latitudinis.

Si Index ſit $-\frac{1}{4}$; diſtat à Vertice, $\frac{3}{7}$ Altitudinis; à Diametro, $\frac{3}{4}$ Latitudinis; vel, $\frac{3}{2}$ Semilatitudinis.

Si Index ſit $-\frac{1}{5}$; diſtat à Vertice, $\frac{4}{9}$ Altitudinis; à Diametro $\frac{4}{6}$ Latitudinis; vel $\frac{4}{3}$ Semilatitudinis. Et ſic deinceps.

Si Index ſit $-\frac{2}{5}$; diſtat à vertice, $\frac{3}{8}$ Altitudinis; à Diametro, $\frac{3}{2}$ Latitudinis; vel $\frac{3}{1}$ Semi-latitudinis.

Si index ſit $-\frac{3}{7}$; diſtat à Vertice, $\frac{4}{11}$ Altitudinis; à Diametro, $\frac{4}{2}$ Latitudinis; vel $\frac{4}{1}$ Semi-latitudinis.

Si Index ſit $-\frac{4}{9}$; diſtat à Vertice, $\frac{5}{14}$ Altitudinis; à Diametro, $\frac{5}{2}$ Latitudinis; vel $\frac{5}{1}$ Semi-latitudinis. Et in reliquis ſimiliter, mutatis mutandis, fiet ex calculo judicium.

E. In Figuris Solidis, idem plane obtinet atque in Planis, secundum easdem series constructis; nisi quod, pro *Semi-Latitudine* in planis, ponenda erit in Solidis (in illo plano quod per diametrum axémve, & Centrum-gravitatis Basis, incedit,) *Distantia Centri-gravitatis* Basis, à Diametro vel Axe; vel, pro *Latitudine* in illis, *Dupla illa Distantia* in his. Atque, pro *Duplo Indicis*, Indicis *Sesquialterum*.

Putà; Si seriei Index sit, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, &c. 2, 3, 4, 5, &c. $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{5}$, &c. $-\frac{2}{5}$, $-\frac{3}{7}$, $-\frac{4}{9}$, &c. qui, in Planis (ut dictum est) exhibet $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{6}{14}$, &c. $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{14}$, $\frac{5}{18}$, $\frac{6}{22}$, &c. $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{6}$, &c. $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{5}{2}$, &c. *Latitudinis*; vel $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{7}$, &c. $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{6}{11}$, &c. $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, &c. $\frac{3}{1}$, $\frac{4}{1}$, $\frac{5}{1}$, &c. *Semilatitudinis*: Substituendum erit, in Figuris Solidis, $\frac{6}{7}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{10}{11}$, $\frac{12}{13}$, &c. $\frac{6}{8}$, $\frac{8}{11}$, $\frac{10}{14}$, $\frac{12}{17}$, &c. $\frac{4}{3}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{8}{7}$, &c. $\frac{6}{4}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{10}{6}$, &c. *Distantiæ* Centri gravitatis Basis, à Diametro vel Axe.

F. Habet autem Centrum Gravitatis Figura Solida, si seriei Index saltem major sit, quam $-\frac{2}{3}$.

G. Si quando igitur ad communem Rectam per Verticem, (aut aliam unam aliquam rectis per verticem parallelam,) contrario situ ponantur hujusmodi figuræ (planæ, solidæve,) similes & æquales: Erit Centrum Gravitatis in illa communi rectâ, atque in eâ à communi Diametro Axéve distantiâ, quam in singulis casibus jam determinavimus. Sin vel dissimiles vel inæquales vel dissimili situ positæ sint ejusmodi figuræ dimidiatæ; cognita tamen erit commune simul utriusque Centrum Gravitatis; per 27 Cap. 4.

Quódque de figuris Truncatis aut aliàs Mulctatis, vel Aggregatis, in duabus propositionibus præcedentibus dictum est: Et hic similiter intelligendum est.

A. ESto enim ad AD diametrum vel axem, adjacens istiusmodi Figura Plana dimidiata, cujus parallelæ rectæ figuram complentes, sint secundum seriem directam cujus Index sit S; vel reciprocam, cujus Index

dex $-S$. Cúmque singularum rectarum centra gravitatis sint ipsarum puncta media, (per 2 hujus,) atque perinde ponderant singulæ acsi ex illis punctis mediis suspenderentur totæ, (per 16 Cap. 4.) sintque dimidiæ totis proportionales (per 5 Cap. 1. vel 15 El. 5.) similis erit series Distantiarum centrorum gravitatis (à diametro vel axe) atque ipsorum Magnitudinum seu Ponderum; nempe cujus Index sit item S, vel $-S$. Cúmque Momentorum seu Ponderationum ratio, composita sit ex rationibus Ponderum & Distantiarum, (per 18 Cap. 4.) Erit Momentorum series, ea quæ Indicem habet $S+S$, vel $-S-S$; hoc est $2S$, vel $-2S$. Est ergo (per 1 hujus,) summa Ponderum seu Magnitudinum, hoc est Figura exposita; ad seriem totidem ultimo æqualium, hoc est ad Parallelogrammum super eadem Base æque altum; (puta NP;) ut 1 ad $S+1$; vel (in reciprocis) ut 1 ad $-S+1$, (adeóque, si $-S$ major quam -1, erit $-S+1$ affirmativus; & propterea figuræ magnitudo finita: secus; infinita, vel plusquam infinita:) nempe $\frac{1}{S+1}NP$, vel $\frac{1}{-S+1}NP$. Et summa Momentorum, ad totidem ultimo æqualium, (hoc est, Momentum figuræ expositæ ad momentum Parallelogrammi in distantia D suspensi,) ut 1 ad $2S+1$, vel ad $-2S+1$, (quod itaque finitum erit, si $-2S$ major sit quam -1, vel $-S$ major quam $-\frac{1}{2}$; secus, infinitum:) Nempe $\frac{1}{2S+1}NPD$, vel $\frac{1}{-2S+1}NPD$.

$$\frac{1}{S+1}NP\Big)\frac{1}{2S+1}NPD\Big(\frac{S+1}{2S+1}D$$

$$\frac{1}{-S+1}NP\Big)\frac{1}{-2S+1}NPD\Big(\frac{-2S+1}{-2S+1}D.$$

Hæc itaque summa, per illam divisa, distantiam exhibet Centri gravitatis ab AD, (per 24 Cap. 4.) Nempe; in seriebus directis, $\frac{S+1}{2S+1}D$: In Reciprocis, $\frac{-S+1}{-2S+1}D$. Quod erat propositum.

Requiritur autem, in Reciprocis, quò Centrum gravitatis habeant, B.
ut $-2S$ major sit quam -1; vel $-S$, major quam $-\frac{1}{2}$. Nam, nisi $-S+1$ sit terminus affirmativus; nullum erit Centrum gravitatis, per prop. præced. Atque, nisi & $-2S+1$ sit item affirmativus, (hoc est, $-2S$ major quam -1, per 8 Cap. 1.) nec-dum erit centrum gravitatis: quippe Affirmativi $-S+1$, ad $-2S+1$ qui

vel

vel o sit, vel Negativus; ratio erit vel infinita, vel etiam plusquam infinita; adeóque $\frac{-S+1}{-2S+1}$ D, distantia infinita, vel plusquam infinita; ipsúmque propterea Centrum gravitatis Nusquam. Unde patet determinatio.

C. Cúmque termini ultimi, (hoc est, Basis,) centrum gravitatis sit in ipsius puncto medio (ut ostensum est, ex 2 hujus,) ipsius Distantia D, erit semi-Latitudo figuræ, sive Parallelogrammi super eadem basi æquè alti. Unde constat particularium casuum Calculus, quod ad distantiam à diametro spectat.

D. Sed & Centri Gravitatis à Plano per verticem, distantia constat, ex 6 & 7 hujus. Ergo & ipsum Centri Gravitatis punctum; (per 26 Cap. 4.) Quod item erat Propositum. Idem nempe quod in singulis casibus designavimus: Ut ex Calculo patet; ne opus sit ut singulis casibus immoremur.

E. In figuris Solidis: De Centri gravitatis Distantiâ à Vertice, similiter constat atque in Planis; ex 6 & 7 hujus.

Quódque fit in Plano per Diametrum & Centrum Gravitatis Basis (adeóque & reliquorum basi parallelorum Planorum Centra Gravitatis; propter omnia, quod supponimus, plana similia, & similiter ad diametrum posita;) constabit ex 4 hujus.

Quód sit in eâ quam dicimus à Diametro vel Axe distantiâ; sic item constabit. In similibus Planis (ex quibus conflari Solidum intelligatur) Centra Gravitatis sunt similiter sita; (quod ex 4 Cap. 4. & 5 Cap. 1. demonstrabitur:) adeóque ab homologis punctis distant in ratione laterum homologorum; vel, rectarum utcunque in suis respectivè planis similiter positarum; (quod ex def. 1. & prop. 4. El. 6. demonstrabitur:) Cúmque, ob similem, quem supponimus, planorum ad Diametrum Axemve situm; homologa similium Planorum puncta sint in Diametro vel Axe constituta: Distantiæ Centrorum gravitatis à Diametro vel Axe, sunt in ratione laterum Homologorum, sive rectarum similiter positarum, in suis respectivè planis: Hoc est; (quod ex prop. 20. El. 6. demonstrabitur,) in subduplicatâ ratione Planorum. Adeóque; Si series Planorum, Indicem habeat S, vel $-S$; series Distantiarum, Indicem habebit $\frac{1}{2}S$, vel $-\frac{1}{2}S$: Et series Momentorum (ut quæ sunt in ratione ex rationibus Ponderum & Distantiarum Centrorum Gravitatis compositâ, per 18 Cap. 4.) Indicem habebit $S+\frac{1}{2}S$, vel $-S-\frac{1}{2}S$; hoc est $\frac{3}{2}S$, vel $-\frac{3}{2}S$. Est igitur (positis P, pro Pondere seu Plano ultimo; N, pro numero Planorum, ex quibus conflari intelligatur Solidum; D, pro distantia Centri gravitatis

Basis,

$\frac{1}{S+1}NP) \frac{2}{3S+2}NPD (\frac{2S+2}{3S+2}D$

$\frac{1}{-S+1}NP) \frac{2}{-3S+2}NPD (\frac{-2S+2}{-3S+2}D$

Baſis, à Diametro vel Axe;) $\frac{1}{S+1}NP$, vel $\frac{1}{-S+1}NP$, Solidum, ſive Planorum Ponderúmve Aggregatum: $\frac{1}{\frac{3}{2}S+1}NPD$, vel $\frac{1}{-\frac{3}{2}S+1}NPD$; ſive $\frac{2}{3S+2}NPD$, vel $\frac{2}{-3S+2}NPD$; ſumma Momentorum, ſive Solidi Momentum vel Ponderatio. Adeoque diviſâ ſummâ Momentorum, per ſummam Ponderum; prodibit $\frac{2S+2}{3S+2}D$, vel $\frac{-2S+2}{-3S+2}D$, diſtantia Centri gravitatis Solidi, à diametro vel axe: Nempe, ea quæ ſit ad D diſtantiam Centri Gravitatis Baſis, ut $2S+2$ ad $3S+2$, aut $-2S+2$ ad $-3S+2$; hoc eſt, ut $S+1$ ad $\frac{3}{2}S+1$, aut $-S+1$ ad $-\frac{3}{2}S+1$. Quod erat demonſtrandum.

Cúmque, in Figuris Reciprocis, quò Centrum gravitatis habeant, non ſolum requiratur, ut $-S+1$ ſit terminus poſitivus, (per prop. præced.) Sed & $-\frac{3}{2}S+1$, (ne ratio illius ad hanc ſit vel Infinita, vel pluſquam Infinita; adeóque, propter Infinitam, vel pluſquam infinitam diſtantiam, Centrum gravitatis nuſquam ſit:) major eſſe debeat (ſeu minùs negativus) $-\frac{3}{2}S$, quam -1; ſive $-S$, quam $-\frac{2}{3}$: inde conſtat determinatio. F.

Porro; quum, in Figuris Solidis, ſecundum ſeriem ſive Directam, ſive Reciprocam conſtitutis, oſtenſum ſit; tum, quantum diſtet Centrum gravitatis (adeóque & planum Æquilibrii) à plano per Verticem baſi parallelo; tum, in quo per axem plano reperiatur; tum denique, quantum in illo plano à diametro vel axe diſtat: Datur ipſum Gravitatis Centrum; dummodo Centrum Gravitatis baſis non ignoretur. (per 26 Cap. 4.) Quod erat propoſitum. Nempe illud ipſum quod in ſingulis caſibus deſignat propoſitio: Ut ex Calculo patebit. G.

Denique: Quod, de duabus hujuſmodi Figuris Dimidiatis, (ſimilibus & æqualibus,) utrinque ad eandem rectam contrario ſitu poſitis; dictum eſt: conſtabit ex 5 hujus. Quódque de iiſdem (planis ſolidiſve) figuris dimidiatis (aut quæ harum inſtar ſunt) truncatis, aliâſve mulctatis, vel aggregatis, additur, Conſtat ex 27 Cap. 4.

SCHOLIUM.

IN præcedentium aliquot propositionibus; in figuris Parabolicis omnibus, & Paraboloidicis, eorúmque Solidis, Centra gravitatis determinavimus. Neque hoc tantum in Figuris integris: Sed & (quod nescio an alii nobis priores fecerint) in Figuris Dimidiatis; ut Semiparabolis, Semi-paraboloidibus, &c. etiam in figuris Reciprocis (quotquot habent) Dimidiatis: Atque in horum omnium Semi-solidis; aut etiam, Solidorum portionibus quibusvis, duobus per axem planis, interjectis.

De Figuris autem Reciprocis (ut A D B β δ,) speciatim monendum est; Utut hæ naturâ suâ sint utrinque in infinitum continuabiles, (sunt utique A D, A δ, ad curvam B β, Asymptotæ;) nos tamen hic eas consideramus ut Base B D terminatas, ad Diametrum ordinatim-positâ (sicut & Parabolas aliásque figuras indefinitè continuabiles, Base pro arbitrio claudimus;) sed ad partes β δ indefinitè continuatas.

Cúmque harum aliquas magnitudinè simpliciter Infinitas ostendimus (nempe, cum Index seriei est — 1; quo casu B β curva, est vera Hyperbola, cujus Asymptotæ sunt A D, A δ;) Alias verò vel Finitas, vel plusquam Infinitas: sunt quidem hæ figuræ ad easdem curvas utræque terminatæ. Quippe, si A D B β δ, terminata basi B D, interminata verò ad partes β δ, sit Finita; eadem ex parte β δ terminata, & interminata ex parte B D, erit Plusquam-infinita: & contra. Quæ verò ad veram Hyperbolam ponitur (seriei indicem — 1 habens) utrâvis parte terminetur, (modo ne utrâque,) est pariter Infinita: Atque hæc sola. Quod prop. 105. Arithm. Infin. ostendimus.

Constat autem, ex his Figuris Reciprocis; (quæ inter Geometriæ miranda censentur;) Figuras longitudine Infinitas (Planas Solidásve) Magnitudine Finitas esse posse. Nempe, si A D B β δ ex parte β δ interminata, seriei Indicem habeat negativum quidem, sed majorem quam — 1.

Eadémque figura, (longitudine infinita, sed finita magnitudine,) si utrinque ad A D diametrum similiter ponatur; habebit (in ipsâ A D) Centrum gravitatis.

Eadem verò figura dimidiata A D B β δ, indicem habens negativum sed majorem quam — 1; utut magnitudine finita sit, centrum tamen

Gravi-

Gravitatis non habebit; nisi & major sit Index quam $-\frac{1}{2}$. Ne quidem quæ ex duabus hujusmodi dimidiatis utrinque ad infinitam A δ similiter positis conflatur. Distabit utique ab A versus δ, distantiâ saltem infinitâ, vel datâ quâvis majore.

Sin major sit Index quam $-\frac{1}{2}$, Centrum Gravitatis habebit, tum dimidiata illa figura, tum & ex duabus utrinque ad A δ positis conflata.

Item; Figura istiusmodi plana, magnitudine Finita esse potest; (nempe cum Index major est quam -1;) & Solida tamen, quæ hujus conversione fit, magnitudine Infinita: (Nempe, si non & major sit, Index quam $-\frac{1}{2}$.) Quippe, si series Rectarum, planum complentium, indicem habeat $-\frac{1}{2}$; series Planorum, quæ harum conversione circa AD fiunt, Solidum complentium, (propter Plana in ratione duplicatâ rectarum in illis similiter positarum,) Indicem habebit -1 $(=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}.)$ eritque propterea magnitudinis infinitæ. Sin series Rectarum Indicem habeat minorem quam $-\frac{1}{2}$; series Planorum habebit indicem minorem quam -1; adeóque Solidum erit magnitudinis plusquam infinitæ. Quæ omnia, ex supra demonstratis constant.

Contrà verò; Istiusmodi Figura Plana, non modo magnitudine finita quævis; sed & infinita, modò Index major sit quam -2; circa A δ conversa: Solidum exhibebit magnitudine finitum: Et quidem, modò Index major sit quam -1; quod Centrum habeat Gravitatis. Quod ex prop. seq. patebit.

PROP. IX.

A. Si Figura Plana (integra an dimidiata;) cujus ad diametrum vel axem ordinatim-applicatæ rectæ Planum complentes sint secundum seriem aliquam vel ex Directis (def. 1. hujus, definitis;) vel ex Reciprocis (def. 2. hujus, definitis;) cujus Index major sit quam —2; intelligatur, circa rectam per verticem ordinatim-positam, converti: Solidum conversione factum, erit magnitudinis finitæ. Nempe quod sit, ad Parallelepipedum, cujus basis sit parallelogrammum super eadem cum plano base æquè altum, altitudo verò æqualis Peripheriæ (integræ vel partiali, prout conversio fuerit vel perfecta vel imperfecta) Diametri vel Axis puncto quod in base est, descriptæ: ut 1, ad *indicem seriei in plano expositæ binario auctum.*

Fig.129, 131, 133.

B. Ejusque figuræ, si Integra sit (hoc est, utrinque ad Diametrum Axemve similiter posita; sitque conversio integra;) Centrum gravitatis erit ipsum Punctum verticis Diametri Axisve.

Si verò (figura plana) Dimidiata sit; ejúsque ordinatim-applicatæ sint, ad diametrum vel axem, ad angulos rectos; sitque Index vel affirmativus, vel saltem major quam — 1: Solidum illud, Centrum habebit Gravitatis. Nempe, in illâ, à plano ad expositum planum recto, perque ejus Axem incedente, distantiâ; quæ est, ad distantiam puncti medii in base plani expositi; ut *Index seriei, plani expositi, binario auctus*, ad *duplum ejusdem Indicis binario auctum.*

C. Sin major sit Index ille quam —2, sed non item major quam — 1: Habebit solidum illud magnitudinem finitam, sed non & centrum gravitatis.

Adeóque

Adeóque; ſi dimidiata illa figura Plana, ſit reciproca ſecundum ſeriem cujus Index -1; (quo caſu curva, eſt vera Hyperbola;) & convertatur circa verticem infinitum (quæ eſt Aſymptotarum una interminata) ſolidum converſione factum, erit magnitudinis finitæ, (eſtque Torricellii, *Solidum Hyperbolicum Acutum:*) Centrum autem gravitatis non habebit. Eſt utique ſolidum illud, æquale parallelepipedo, cujus Baſis ſit Parallelogrammum plano inſcriptum, altitudo æqualis cuivis ex peripheriis extimis Solidi: Vel; (quod eodem recidit) duplo Cylindri, parallelogrammo illo circa rectam verticis converſo deſcripti. Diſtantia verò Centri Gravitatis, à Plano per axem expoſiti plani, ſimpliciter Infinita. D.

Si Plani ſeries Indicem habeat $-\frac{1}{2}$: Solidum converſione factum, erit ad tale Parallelepipedum (vel duplum Cylindri, ut 1 ad $\frac{1}{2}$ ($=-\frac{3}{2}+2$;) vel, ut 2 ad 1. Diſtantia Centri Gravitatis, eſſet ad ſemi-latitudinem Parallelogrammi plano inſcripti; ut $\frac{1}{2}$, ad -1: pluſquam infinita. Quod itaque nuſquam erit. E.

Si Plani ſeries Indicem habeat $-\frac{1}{2}$; (quæ eſt Reciproca ſemi-parabolæ:) Solidum erit ad tale Parallelepipedum (vel Cylindri duplum,) ut 1 ad $\frac{3}{2}$ ($=-\frac{1}{2}+2$;) vel, ut 2 ad 3. Diſtantia Centri Gravitatis, ad ſemi-latitudinem Parallelogrammi; ut $\frac{3}{2}$ ad 1, ſeu ut 3 ad 2. F.

Si Plani ſeries Indicem habeat $\frac{1}{2}$; (quæ eſt ſemi-parabolæ:) Solidum eſt, ad Parallelepipedum (ſeu Duplum Cylindri, circumſcripto ſemi-parabolæ Parallelogrammo deſcripti,) ut 1 ad $2\frac{1}{2}$ ($=\frac{1}{2}+2$:) vel, ut 2 ad 5. Diſtantia Centri Gravitatis, ad ſemi-latitudinem Parallelogrammi; ut $\frac{5}{2}$ ad 3; ſeu, ut 5 ad 6. G.

Atque in reliquis ſimiliter. H.

Eritque Solidorum ejuſmodi, integrâ converſione deſcriptorum, Centrum Gravitatis (ſiquod eſt) in ipſo con- I.

verſionis

versionis Axe; ejúsque illo puncto quod distantia jam tradita designat.

K. Semi-solidorum verò, (aut aliàs imperfectâ conversione descriptorum,) Centrum gravitatis (siquod habent) est quidem in distantia jam assignata à plano quod ab axe plani expositi conversione describitur, & in illo per Axem conversionis plano, quod per Centrum Gravitatis figuræ planæ, expositi plani Axe descriptæ, transit:

L. Atque in illa ab axe conversionis distantiâ, quæ est, ad modò dicti Centri gravitatis inde distantiam; ut *Index* seriei expositi Plani *Binario auctus*, ad eundem *Indicem Ternario auctum*; vel (quod eodem recidit) ut Index seriei Solidi conversione facti Unitate auctus, ad eundem auctum Binario.

M. Quódque de Solidis conversione factis dictum est: idem similiter intelligendum erit, de figuris aliis; si, pro Circulis (eorúmve portionibus) conversione descriptis, intelligatur ex similibus figuris planis quibuslibet (circulis illis proportionalibus) similiter ad conversionis axem positis, Solidum conflari.

Quódque jam traditum est; supponendo ordinatim-applicatas in exposito Plano ad hujus diametrum vel axem ad angulos rectos constitutas; adeóque conversionis axem ad plana circa illum posita rectum esse: perinde verum erit, si ad axem utcunque inclinatum intelligantur similia illa plana parallela ordinatim-poni.

N. Item; Si ejusmodi exposita figura plana dimidiata, cujus ordinatim-applicatæ non sint ad angulos rectos, sed ad diametrum suam utcunque inclinatæ; conversione suâ solidum describere intelligatur: describet expositi Plani Diameter, (quæque huic sunt parallelæ rectæ,) non quidem circulum, (ut hactenus;) sed superficiem conicam (convexam concavâmve, prout angulus, quem cum conversionis axe facit Diameter illa, acutus obtu-

obtuſúſve fuerit:) ad quam tamen ſuperficiem Conicam accommodabuntur omnia (mutatis mutandis,) quæ de Circulo illo, ejúſve Plano tradita ſunt.

Denique: Quæ de figurâ, circa rectam in vertice ordinatim-applicatis parallelam conversâ, hic tradita ſunt; ad converſionem circa rectas alias, alio ſitu poſitas, facile accommodantur; Puta, circa Baſin, aliaſve huic parallelas, ſive infra ſive ſupra figuram poſitas; circa Axem, aut hic parallelas, ultra citrave figuram poſitas, ſive adjacentes, ſive utcunque remotas; aliaſque ſitu multis modis variato. Quibus caſibus omnibus, pro re nata, principia jam tradita facile accommodabit prudens Geometra. O.

Esto enim expoſitum Planum, cujus ordinatim-applicatæ ad AD A.
diametrum vel Axem, ſint ſecundum ſeriem directam ADB, Fig. 129,
cujus Index ſit ſ; vel ſecundum ſeriem reciprocam, ut ADBβδ, 131,
cujus Index ſit −ſ. Atque intelligatur circa rectam, ad eandem AD, 133.
in A, ordinatim-applicatam, puta Aδ; converti. Deſcribent rectæ ſic converſæ, ſuperficies curvas Cylindricas circa Aδ ut Axem; quæ quidem ſuperficies curvæ æquantur totidem Parallelogrammis quorum Baſes æquentur rectis converſis, altitudines verò peripheriis uno aliquo eorum puncto deſcriptis: (Quippe, curva Cylindrica, expanſa, cum hujuſmodi parallelogrammo coincidet.) Sunt igitur illæ ſuperficies Curvæ Cylindricæ, in ratione, ex rectarum converſarum, & peripheriarum ſic deſcriptarum, rationibus compoſitâ: (per 23 El. 6.) hoc eſt, (propter peripherias radiis proportionales,) ex rectarum converſarum, & earum à recta per verticem Aδ diſtantiarum, compoſita. Eſt autem (propter æqualem quam ſupponimus rectarum craſſitiem) ſeries hæc diſtantiarum, ſeries Primanorum, cujus index 1; adeòque (propter ſ, vel −ſ, indicem ſeriei Rectarum,) ſeries ſuperficierum Cylindricarum rectis deſcriptarum, (vel, his æqualium Parallelogrammorum,) Indicem habebit ſ+1, vel −ſ+1. Quæ itaque ſimul omnia, (hoc eſt, Solidum converſione factum,) ad totidem ultimo æqualium, (hoc eſt, ad Parallelepipedum ſuper AB parallelogrammum, altitudinem habens æqualem peripheriæ puncto D deſcriptæ; vel, quod Parallelepipedo illi æquale eſt, ad Duplum Cylindri,

dri, parallelogrammo illo circa Verticis rectam conversione descripti:) ut 1 ad $\int + 2$, vel ut 1 ad $- \int + 2$. (per 1 hujus.) Hoc est, (posito P pro uno ex æqualibus parallelogrammis, & N, pro omnium numero, adeóque NP pro Parallelepipedo,) $\frac{1}{\int + 2}$ NP, vel $\frac{1}{- \int + 2}$ NP. Quod quidem magnitudine finitum erit, si vel $\int$ sit Index Affirmativus, vel si Negativus $- \int$ major sit quam $- 2$. (Quippe tum ratio 1 ad $\int + 2$, vel ad $- \int + 2$, erit ratio finita: nempe ut terminus positivus ad positivum; non ut Positivus ad 0, vel minus quam 0.) Quæ erant demonstranda. Atque hinc particularium casuum calculus deducetur.

E. Porro; Si Figura plana sic conversa, dimidiata sit, (nam de Integrâ, dubium non est, quin Centrum gravitatis, absolutâ conversione, erit in A puncto:) sintque ad axem AD ordinatim applicatæ, ad angulos rectos: Erunt superficierum illarum curvarum Cylindricarum centra gravitatis in media illarum longitudine; (per 2 hujus.) adeóque (propter dimidiata integris proportionalia) in ratione rectarum in plano, quarum conversione hæ superficies Cylindricæ describuntur: Hoc est; in serie cujus Index est $\int$, vel $- \int$. Cúmque superficierum illarum, seu Ponderum, series Indicem habeat $\int + 1$, vel $- \int + 1$, (ut suprà ostensum est;) & series distantiarum Centrorum Gravitatis à Plano per AD, indicem habeat $\int$, vel $- \int$, (ut ostensum est modò:) Quæ ex utrisque oritur (per 18 Cap. 5.) Momentorum series, (respectu perpendicularis Plani per AD,) indicem habebit $2\int + 1$, vel $- 2\int + 1$. Adeóque (posito D pro distantiâ Centri gravitatis superficiei Cylindricæ rectâ DB descriptæ; quæ est semi-latitudo Parallelogrammi AB;) erit (per 1 hujus) $\frac{1}{2\int + 2}$ NPD, vel $\frac{1}{- 2\int + 2}$ NPD, simul omnium, hoc est, Solidi, Momentum. Quod quidem si per $\frac{1}{\int + 2}$ NP summam Ponderum, dividatur; prodibit $\frac{\int + 2}{2\int + 2}$ D, vel $\frac{- \int + 2}{- 2\int + 2}$ D, distantia Centri Gravitatis à Plano per AD. Quæ quidem distantia; si sit vel $\int$ Index Affirmativus, vel Negativus $- \int$ major quam $- 1$, adeóque $- 2\int + 2$ terminus affirmativus, (propter affirmativi ad affirmativum rationem finitam,) finita erit: atque, in illâ, Centrum Gravitatis. Quæ itidem erant demonstranda.

Sin

$$\frac{1}{ſ+2}NP)\frac{1}{2ſ+2}NPD(\frac{ſ+2}{2ſ+2}D$$

Fig. 132, 134.

$$\frac{1}{-ſ+2}NP)\frac{1}{-2ſ+2}NPD(\frac{-ſ+2}{-2ſ+2}D.$$

Sin major quidem $-ſ$ quam -2; non autem major quàm -1: Habebit quidem ſolidum illud magnitudinem finitam; (ut oſtenſum eſt:) Sed non & Centrum Gravitatis. Erit enim $-ſ+2$ ad $-2ſ+2$, ratio poſitivi, vel ad 0, vel ad negativum; adeóque diſtantia Centro Gravitatis debita, vel infinita erit, vel pluſquam infinita; quod igitur nuſquam erit. Quod item Affirmatum erat. C.

Quæque hinc, ad particulares caſus enumeratos (alióſve quotlibet) deducuntur: Ex calculo patent. D.

Puta: Si A D B β δ Plani ſeries indicem habeat -1, quæ eſt Trianguli reciproca; (quo caſu, curva B β, eſt Hyperbola; cujus Aſymptotæ ſunt A D, A δ: ut prop. 92, 95, Arithm. Infin. demonſtravimus: Adeóque, ſolidum iſtius converſione circa A δ deſcriptum, eſt Torricellii, *Solidum Hyperbolicum Acutum*; ut ex hujus apud Torricellium definitione conſtat:) Erit Planum illud Magnitudine Infinitum, (per 7 hujus.) Si tamen, circa A δ converſum; intelligatur Solidum deſcribere; erit hoc magnitudinis finitæ; tantæ ſcilicet quanta in Propoſitione deſignatur. Cúm enim, ſuperficies Cylindrica, rectâ D B deſcripta; vel, huic æquale, Parallelogrammum cujus Baſis D B, altitudo æqualis peripheriæ puncto D deſcriptæ; ſit P: atque huic æque-altum Parallelepipedum, ſuper parallelogrammum A B erectum; ſit N P: (cui quidem Parallelepipedo, æquatur Duplum Cylindri eodem Parallelogrammo circa A δ converſo deſcripti: Nam, quâ ratione circulus radio A D deſcriptus, æquatur ſemiſſi Parallelogrammi cujus Baſis eſt A D, altitudo æqualis Peripheriæ puncto D deſcriptæ; quod notum eſt: eâdem & Cylindrus parallelogrammo A B deſcriptus, eandem habens altitudinem, æquabitur ſemiſſi Parallelepipedi: propter ſingula hujus Parallelogrammia ſingulorum in illo Circulorum, reſpectivè ſumptorum, dupla: & communem altitudinem D B;) Sintque ſuperficies Cylindricæ rectis ipſi D B parallelis deſcriptæ; (vel, his æqualia Parallelogramma quorum baſes, eædem

rectæ; altitudines respectivis peripheriis æquales; (Series æqualium; propter $-\int+1=-1+1=0$: (vel etiam; quia tum peripheriæ sunt in ratione distantiarum ab A δ directâ, & rectarum conversarum in earundem distantiarum ratione reciprocâ, adeóque tum Parallelogramma invicem æqualia tum & Superficies Cylindricæ; per 6 Cap. I. vel 14 El. 6. Nempe, quod ob minorem basis peripheriam oritur decrementum, auctâ in eadem ratione altitudine compensatur; ut superficies Cylindricæ, rectis in A D B β δ plano ipsi D B parallelis descriptæ, sint invicem æquales:). Erunt simul omnes illæ superficies Cylindricæ, sive quod ex his intelligitur conflari Solidum; $\frac{1}{-\int+2}$ NP, hoc est $\frac{1}{-1+2}$ NP $=$ NP; æquale scilicet ipsi Parallelepipedo, vel Duplo Cylindri, quod per NP designavimus. At verò; propter Distantias (à plano recta AD descripto) Centrorum gravitatis harum superficierum Cylindricarum, rectis conversis proportionales; adeóque secundum seriem cujus index -1 ex constructione: erit Momentorum seu ponderationum series, indicem habens $-1=0-1$. (nempe qui ex Indice seriei superficierum cylindricarum, 0; & Indice seriei distantiarum, -1; aggregatur) Adeóque summa momentorum, $\frac{1}{-1+1}$ NPD; (nempe, quæ sit ad NPD, ut 1 ad $-1+1=0$; quæ ratio est infinita;) vel $\frac{1}{0}$ N P D; quod per N P (quod est omnium Pondus, ut modò ostensum est) divisum: distantiam exhibet, centro gravitatis debitam, $\frac{1}{0}$ D, infinitam. Quod igitur nusquam erit.

E. Similiter: Si Plani series Indicem habeat $-\int=-\frac{3}{2}$: (quod est magnitudine infinitum; per prop. 7 hujus.) Erit solidum, hujus Plani conversione factum, $\frac{1}{-\int+2}$ NP $=$ 2 NP; magnitudine finitum. Sed summa momentorum $\frac{1}{-2\int+2}$ N P D $=\frac{1}{-1}$NPD, plusquam infinita. Et distantia Centro gravitatis debita; $\frac{1}{-2}$ D, plusquam infinita. Quod itaque nusquam erit.

F. Item: Si Plani Series Indicem habeat $-\int=-\frac{1}{2}$; (cujus itaque ordina-

ordinatim-applicatæ, ſunt ordinatim applicatis in Parabolâ, reciprocè proportionales:) Planum hoc eſt magnitudine Finitum, (per 7 hujus.) Et Solidum converſione factum, item finitum; nempe $\frac{1}{-ſ+2}$ NP $= \frac{2}{3}$ NP. Eritque hujus Momentum, $\frac{1}{-2ſ+2}$ NPD $=$ NPD, finitum. Et diſtantia Centri gravitatis, $\frac{-ſ+2}{-2ſ+2}$ D $= \frac{3}{2}$ D; finita.

Item: Si Plani Series Indicem habeat $ſ = \frac{1}{2}$, (quæ eſt Semi-parabolæ:) Solidum converſione factum, erit $\frac{1}{ſ+2}$ NP $= \frac{2}{5}$ NP. Hujus momentum $\frac{1}{2ſ+2}$ NPD $= \frac{1}{3}$ NPD. Diſtantia Centri Gravitatis, $\frac{5}{6}$ D. G.

Atque ad eandem formam fiet judicium, quæcunque ſit expoſiti Plani ſeries iſtiuſmodi ex definitis in def. 1, 2, hujus. H.

Erit autem, in Solidis hiſce, integrâ converſione factis; Centrum gravitatis, in ipſo converſionis axe; per 5 hujus. Adeóque in ipſius illo puncto, quod diſtantia ab A, jam demonſtrata, deſignat. I. Fig. 123, 133.

Semi-ſolidorum verò, (quæ ſemi-converſione deſcribuntur,) aliarúmve portionum duobus per converſionis axem planis interjectarum, (putà, quæ converſionis integræ Triente, Quadrante, &c. deſcribuntur;) Centrum gravitatis erit in illo per converſionis axem plano quod per Centrum gravitatis figuræ planæ rectâ AD deſcriptæ (adeoque per reliquarum huic parallelarum, utpote ſimilium & ſimiliter ad axem poſitarum, Centra Gravitatis,) tranſit: quod probabitur ex 4 hujus. K. Fig. 132, 134.

Quódque ſit in eâ quam dicimus à converſionis axe diſtantiâ; ſic conſtat. Cum Superficies Cylindricæ ex quibus conflari intelligatur ſolidum, (ut ſupra oſtenſum eſt;) adeóque & harum portiones ſimiles quantacunque integræ converſionis parte deſcriptæ, (propter arcus ſimiles, peripheriis ſuis integris proportionales;) ſint ſeries indicem habens $ſ+1$, vel $-ſ+1$, (adeoque ſi extima dicatur P, erunt ſimul omnes ut $\frac{1}{ſ+2}$ NP, vel $\frac{1}{-ſ+2}$ NP;) ſintque earum ab axe converſionis diſtantiæ, adeóque (propter ſimilium figurarum L.

 Centra

Centra Gravitatis ſimiliter ſita) diſtantiæ ſuorum Centrorum gravitatis, rectarum in expoſito plano quibus deſcribuntur diſtantiis ab A δ proportionales; adeóque ut ſeries indicem habens 1, (ut ſupra oſtenſum eſt:) Erit momentorum ſeries (reſpectu axis converſionis A δ) indicem habens $\int + 2$ vel $-\int + 2$, (nempe $\int + 1 + 1$ vel $-\int + 1 + 1$;) Et ſimul omnium Momenta (poſito D pro diſtantiâ Centri gravitatis extimæ ſuperficiei, rectâ D B deſcriptæ à converſionis axe A δ,) ut $\frac{1}{\int + 3}$ N P D, vel $\frac{1}{-\int + 3}$ NPD: (per 1 hujus.) Quod, per $\frac{1}{\int + 2}$ N P, vel $\frac{1}{-\int + 2}$ N P, ſummam Ponderum, diviſum, exhibet $\frac{\int + 2}{\int + 3}$ D, vel $\frac{-\int + 2}{-\int + 3}$ D, diſtantiam Centri gravitatis (ſiquod eſt) ab axe converſionis A δ. Quod erat propoſitum.

M. Porro: Si pro circulis circa A δ axem converſione rectarum A D & huic parallelarum deſcriptis, dum ſit D A δ angulus rectus; adeóque, axis A δ ad illos rectus: Intelligantur totidem circuli, his reſpectivè æquales, circa eandem A δ ut axem inclinatum, quocunque applicationis angulos circumpoſiti; figuram ſolidam complere: Vel etiam; ſi, pro circulis, intelligantur aliæ figuræ planæ ſimiles & ſimiliter poſitæ, circulis illis proportionales: Eadem utcunque, quæ priùs, manebit demonſtrationum vis.

N. Vel denique; Si, propter D A δ angulum Acutum Obtuſúmve, converſâ circa A δ ut axem figurâ planâ A D B β δ; loco circulorum rectâ D A & huic parallelis deſcribendorum, deſcribantur conicæ ſuperficies Convexæ Concavæve: Similiter ad ſuperficiem hanc Conicam, recta D A deſcriptam; atque ad circulum eâdem, ut priùs deſcriptum; (& de reliquis ſimiliter huic parallelis;) eadem accommodabitur Demonſtrationum vis.

O. Denique, quemadmodum in Propoſitione hac egimus, de Solidis, converſione Planorum circa rectam per verticem Ordinatim-applicatis parallelam, deſcriptis; eorúmque Centris Gravitatis: Pronus eram idem præſtare in aliis Planorum converſionibus; putà, ſi Parabola, aliáve ex jam tractatis figuris, circa Baſem vel Axem, vel rectam Axi parallelam converſa, intelligatur figuram Solidam deſcribere; aliáque hujuſmodi. Abſtinui tamen; partim, quia ad jam traditorum modum poterit his ſimilia Lector ipſe pro libitu plura ſubjungere ſuo Marte: partim etiam, quia eadem, ſequentium aliquot propoſitionum ope luculentiùs & ſimul univerſalius tradentur: maximè verò ne tædium

dium crearem Lectoribus si nimius essem in hisce congerendis; præsertim cùm tanta seges hic se offerat, ut vel spicilegium carpenti nimis, intumescat Caput hoc De Calculo Centri Gravitatis.

SCHOLIUM.

TRadidimus hactenus, ea præsertim quæ figuras spectant, (planas solidasve,) ad quarum Diametros vel Axes, quæ ordinatim-applicantur (rectæ aut plana) sunt secundum ordinatam aliquam (ex iis quas def. 1 & 2 hujus capitis definivimus) seriem constituta. Quæ quidem ad centrum gravitatis in figuris innumeris determinandum viam aperiunt: Ex nostra *Infinitorum Arithmeticâ* plurimum petita: Quæ tamen adhuc facile ampliaabit peritus Geometra, & pluribus adhuc casibus innumeris accommodabit.

Quoniam vero non omnes figuræ ordinatam hanc constitutionem sortiuntur: quò aliis utut inordinatis consulatur; sequente propositione methodum adhuc magis generalem exhibemus; ordinatis juxta atque inordinatis pariter applicabilem.

PROP. X.

Si dividi intelligatur Libra quævis, in partes quotlibet æquales, (numero vel finitas vel infinitas,) in distantiis à motûs sui Centro vel Axe (aut perpendiculari per axem plano) ut 1, 2, 3, &c. arithmeticè proportionalibus positas; ponderibus, aut ponderum particulis, (æqualibus aut inæqualibus, ordinatis vel inordinatis,) utcunque gravatas: Eaque quibus gravantur pondera, seu ponderum particulæ, in suam quæque ab axe motus (seu plano per axem) distantiam ducantur; hoc est toties sumatur quæque particula quoto est ipsa loco ab axe motus; (Quod variis methodis, prout cuique casui videbitur maxime expedire, consequi licebit:) Habetur (respectu ejusdem axis) Momentum omnium; &

& hujus ope) cognita magnitudine) distantia Centri Gravitatis, ab illo per axem plano.

Fig. 135. INtelligantur, in A E librâ, partes invicem æquales, A B, B C, C D, &c. quarum distantiæ (aut mediorum in illis punctorum) à motus axe X, (aut, si partes intelligantur infinite exiguæ, ab ipso A puncto) sint ut 1, 2, 3, &c. arithmetice proportionales; suis quæque ponderibus (æqualibus aut inæqualibus) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. onustæ. Quorum quodque toties sumatur, quoto est ab axe motus loco.

Puta: 1α, 2β, 3γ, 4δ, &c. seu α, $\beta+\beta$, $\gamma+\gamma+\gamma$, $\delta+\delta+\delta+\delta$, &c. Hoc est (in partibus infinite exiguis) omnes onustæ rectæ B B, C C, D D, &c. Triangulum vel Ungulam A E E complentes.

Aut etiam, $\alpha+\beta+\gamma+\delta$, $\beta+\gamma+\delta$, $\gamma+\delta$, &c. Hoc est, (in partibus infinite exiguis) omnes onustæ rectæ A E, B E, C E, &c. idem A E E triangulum vel ungulam complentes.

Aut etiam, A E, A E − A B, A E − A C, A E − A D, &c. Hoc est, totidem A E demptis omnibus A B, A C, A D, &c. Hoc est, (in partibus infinite exiguis,) Parallelogrammum seu Prisma (onustum) A E E ϵ, minus (onusto) Triangulo vel Ungula contraria A E ϵ.

Aut etiam alio quocunque modo obtineatur aggregatum omnium toties respective sumptorum quoto est quodque loco ab axe motus remotum.

(Perinde autem est, sive ipsa α, β, γ, &c. quibus onerari censetur libra, sint lineæ rectæ, aut curvæ; sive superficies planæ, aut Curvæ, aut mistæ; sive solida cujuscunque figuræ; aut etiam vires, impetus, &c. aut qualiacunque demum invicem homogenea, quæ aut gravia sint aut tanquam gravia habeantur.)

Dico; his positis, haberi momentum simul omnium respectu ipsius axis motûs X: Adeóque (cognitâ etiam magnitudine simul omnium) distantiam Centri gravitatis ab X, seu perpendiculari plano super X motus axem erecto.

Cum enim (per prop. 12. Cap. 3. vel prop. 18. Cap. 4.) cujúsque momentum sit in ratione ex ponderum & distantiarum rationibus composita; hoc est, in ratione factorum ex ponderibus in suas singulis distantias ductis; Habito horum aggregato, habetur momentum, (per 18 Cap. 3. vel 22 Cap. 4. Adeóque; si porro habeatur magnitudo simul omnium, habebitur (momento per magnitudinem diviso) distantia Centri gravitatis à perpendiculari per axem plano: per prop. 24. Cap. 4.

SCHO-

SCHOLIUM.

His traditis: Monendum porro est, Hoc, quod *Centrum Gravitatis* dicimus punctum; etiam aliàs utile esse, quò, quæ ex se sunt Inæqualia, Æqualium instar, propter Æquipollentiam censeantur. Cujus specimen, in sequentibus aliquot Propositionibus exhibebimus.

PROP. XI.

Si, super Base quâvis Planâ, erigatur Cylindrus, Prisma, Solidúmve quodvis Prismaticum; Planóq; utcunq; ad Basin inclinato, obliq; secetur: Frustũ, plano basis, planóq; secanti, interjectum, (quæ *Ungula* dici solet) æquatur Solido, super eâdem vel æquali Base, tantæ altitudinis, quanta est altitudo rectæ in Frusto, quæ basis Centro gravitatis insistit similiter inclinata atque ipsum Solidum. A.

Frustíque Superficies, (exclusis Basibus oppositis, quibus interjacet) æquatur superficiei (exclusis item basibus oppositis) Solidi prismatici, super eâdem vel Isoperimetrâ Base, cujus latus tantæ sit longitudinis quanta est rectæ in frusto quæ perimetri basis Centro gravitatis insistit, similiter inclinata atque ipsum Solidum. D.

Atque hinc etiam, de Frusto, Frustíve superficie, duobus utcunque Planis Obliquis, interjecto; fiet judicium. C.

Intelligitur autem de Secante Plano, quod expositæ basis Plano occurrat vel extra figuram vel in ipsius saltem extremo; non, intra figuram. Quippe hoc casu Solidum Prismaticum expositæ basi insistens æquè-altum rectæ B.

Centro

Centro Gravitatis inſiſtenti; æquabitur duarum fruſti portionum Differentiæ, ſub & ſupra baſem expoſitam factarum, continuato Plano ſecante donec expoſitum Solidum Priſmaticum item continuatum totum tranſverſim ſecat. Et de fruſti Superficie ſimiliter.

E. Hinc autem *Ungularum*, quas vocant, omne genus, menſura colligitur.

F. Item Ungularum ſuper eodem Plano, Rectáve, aut Curvâ in Plano deſcripta, (cujus ſaltem magnitudo nota ſit) differentia, prout acies (ſeu planorum interſectio) propius aut remotius abſit.

Aut etiam differentia momentorum ejuſdem gravis; prout Axis Motûs propius abſit aut remotius.

G. Hinc ſpeciatim habetur etiam Trilinei vel Polygoni cujuſvis, in Superficie Cylindrica deſcripti (planis utcunque poſitis terminati) magnitudo. Quod & de aliis corporum Priſmaticorum Superficiebus figuriſque iiſdem ſic inſcriptis, intelligendum.

A. Fig. 136. INtelligatur baſis plana B D, (rectilinea, curvilinea, an mixta quælibet;) quæ (poſito oculo in eodem plano ad infinitam diſtantiam) projiciatur in B D rectam: (adeóque & huic parallela plana quælibet, in parallelas rectas projecta:) Super quâ erigatur corpus Priſmaticum quodvis, (puta, Cylindrus, ſi baſis illa ſit circulus; ſi rectilinea, Priſma Euclideum; ſaltem Solidum aliquod Priſmaticum ſeu Columnare, quod ex infinitis numero rectis parallelis æqualibus conflari intelligatur, quo ſenſu def. 1. Cap. 4. definivimus;) B D d b: ſitque ſuper baſis Centro gravitatis C, (quod propius remotiúſve à B vel D intelligendum erit, prout Baſis figura & ſitus poſtulaverit,) erecta C c, ipſis B b, D d, lateribus parallela. Intelligatur verò ſolidum hoc Priſmaticum, alio adhuc plano ad planum baſis obliquè inclinato ſectum; quod ſectionem faciat $\beta \kappa \delta$; rectæ C c occurrens in κ. Dico; fruſtum B D $\delta \beta$, æquale eſſe Solido Priſmatico ſuper eâdem baſe, (vel huic æquali; propter æqualia Priſmata & Cylindros quæ ſunt ſuper æqualibus baſibus æque-alta;) altitudinem habenti eam quæ eſt rectæ C κ; (nempe, huic rectæ æqualem, ſi C κ ſit ad baſin perpendicularis; vel ſaltem, æqualem perpendiculari à puncto κ demiſſæ ad planum baſis B D.) In-

Intelligatur utique Planorum B D, $\beta\delta$, communis sectio X recta; quæ in unicum X punctum projiciatur; adeóque & huic parallelæ rectæ, in totidem puncta. Pérque rectam X incedat Planum X P, plano X B D rectum: quod in X P rectam projiciatur. (Quam projectionis formam eo fine adhibemus, quem ad prop. 14. Cap. 4. insinuavimus; quò & phantasia plurium linearum confusione levetur, neque turbentur interim rationes: Quippe tantundem à plano X P distabunt singula Solidi puncta; atque, ab X P rectâ, eadem in plano projecta distant.) Fig. 136.

Ponatur porro; Planum X B D, planum Horizontale; recta X, axis motûs; adeóque Planum X P, perpendiculare Planum per motûs axem. Adeóque in eâ ratione Ponderant singula Basis puncta B, C, D, &c. quâ distant ab axe motûs X, vel à perpendiculari per hunc Plano X P; per 4 Cap. 4. Hoc est, in ratione rectarum X B, X C, X D, &c. Sed & (propter C centrum gravitais) tantundem simul omnia ponderant, atque si in C puncto intelligerentur omnia: per 16 Cap. 4. Adeóque (per 4 Cap. 4.) tantundem sunt simul omnes X B, X C, X D, &c. atque totidem ipsi X C æquales.

Sed &, (propter similia Triangula;) rectis X B, X C, X D, &c. proportionales sunt B β, C κ, D δ, &c. Adeóque (per 12 El. 5.) tantundem sunt simul omnes B β, C κ, D δ, &c. (frustum B D δ β complentes,) atque totidem C κ (complentes Solidum Prismaticum B D $\gamma\gamma$, ipsi C κ rectæ æquè altum:) Adeóque B D δ β Frustum, est solido Prismatico B D $\gamma\kappa\gamma$, æquale. Quod erat demonstrandum.

Atque perinde omnino valet hæc demonstratio, sive basi B D insistens solidum Prismaticum, ejúsve frustum, Rectum sit, sive Inclinatum: Dummodo eodem modo censeatur rectæ C κ altitudo, atque prismatis; nempe rectâ perpendiculari à puncto κ ad basis planum demissâ.

Supponit autem demonstratio, communem planorum sectionem X, extra figuram, (saltem non intra, sed in ipso forsan solidi extremo;) secùs enim, non erit eadem Integri & Frusti Basis, quod supponit Propositio. B.

Sin planum secans, plano Basis intra figuram occurrat; intelligendum erit eousque deorsum continuandum solidum, ut Frusti segmenta duo sint; alterum supra & alterum infra B D basim; duæque rectæ, C κ, duorum basis segmentorum Centris erectæ. De quibus intelligenda erit tum propositio, tum Demonstratio. Fig. 137.

Putà: Si Planum B D plano $\beta\delta$ secetur in X; sumptis utriusque segmenti B X, X D, centris gravitatis C, C; reliquisque ut priùs constructis:

ſtructis: Oſtendetur Fruſtum D X δ, æquale ſolido Priſmatic D X γ κ γ (ſuper eâdem baſe X D;) & fruſtum B X β, ipſi B X γ κ o

Fig. 138. Vel etiam, conjunctim: Retento communi totius Centro gravitatis C; Propter X D δ ſupernè (quod notetur ſigno +) & B X β infernè (quod ſigno — notetur) plano baſis B D & ſecanti β δ interjecta; & ſolidum priſmaticum B D γ κ γ ſupernè (ſigno + notandum:) Erit + X D δ — B X β = + B D γ κ γ. Quod ex præcedente Demonſtratione, mutatis ut res poſtulaverit ſignis + —, elicietur.

Vel, ſiquis ejuſmodi averſetur demonſtrationem; idem aliàs ſic oſtendetur: Ducto Plano β Δ ipſi B D parallelo; oſtendetur, ut ſupra, fruſtum δ β Δ æquale ſolido β Δ γ κ γ: Et, ablato utrinque β X D Δ, manebit δ X D æquale toti reſiduo β X D γ κ γ hoc eſt, duobus β X B + B D γ κ γ; Adeóque (ſubductis utrinque β X B) erit δ X D — β X B = B D γ κ γ. Quod erat oſtendendum.

C. Porro: Si duobus utcunque planis idem ſolidum Priſmaticum ſecetur, (ſive eadem ſit utriuſque cum expoſitæ baſis plano communis interſectio, ſive ſecus;) ſimile erit præcedentibus judicium: Fruſtum ſcilicet utriſque planis interjectum; iſtiuſmodi Priſmatum ſeu ſolidorum Priſmaticorum Aggregato vel Differentiæ (ut res poſtulaverit) æquabitur.

Fig. 139. Putà: Si ſolidum quodvis Priſmaticum, cujus expoſita baſis aliqua plana ſit B D, ejúſque Centrum gravitatis C, per quod tranſeat c κ C c: Quod duobus utcunque planis obliquè ſecetur; puta in β κ δ, & b c d. Ductis Planis γ κ γ, g c g, ipſi B C D parallelis: Oſtendetur, ut ſuprà, Fruſto B D δ β æquale ſolidum B D γ γ; item Fruſto B D d b, æquale ſolidum B D g g: Fruſtum igitur β δ d b (duorum B D δ β, B D d b, ſumma vel differentia, prout ex oppoſitis, vel iiſdem partibus ejuſdem B D ſumantur,) Solido Priſmatico γ γ g g (duorum ſimiliter B D γ γ, B D g g, ſummæ vel differentiæ,) æquabitur. Quod oſtendendum erat.

Fig. 140. Sin hæc duo Plana ſecantia, ſibi invicem intra Solidum occurrant: idem hic monendum (atque ſimiliter oſtendetur) atque prius. Putà; Si β δ, b d, plana ſe mutuò ſecent in X; erit γ γ g g ſolidum priſmaticum, æquale duorum δ X d, β X b, differentiæ. Adeóque de Fruſto duobus utcunque Planis interjecto, conſtat. Quod erat propoſitum.

D. Denique: De Superficie Fruſti, quod affirmatur; ſimiliter omnino demonſtrabitur atque de Fruſto ipſo: Hoc priùs animadverſo: Quod, Priſmatis Solidíve Priſmatici cujuſcunque magnitudo æſtimatur, ex ductu altitudinis in Baſin; Superficies verò Priſmatis, Cylindri, Solidi-

ve cujusvis Prismatici recti (exceptis basibus) Aream habet æqualem facto ex Lateris longitudine in Perimetrum Basis ducta. Unde, ut ex Solidi Prismatici Altitudine & Base cognitis, cognoscitur solidi magnitudo; quæque æquales habent tum Bases (utcunque dissimiles,) tum Altitudines (utcunque inæqualiter inclinata sint,) sunt inter se Æqualia: Sic, hujusmodi Solidorum Rectorum Superficies (exceptis basibus) Aream habent cognitam, si tum Lateris Longitudo, tum Basis Perimeter, notæ sunt; quæque tum Bases habent Isoperimetras, (utcunque dissimiles vel inæquales,) tum Latera longitudine æqualia, æquales habent areas. Quæ quidem ex Elementis nota supponimus, vel inde demonstrabilia.

Constructis igitur, ut prius; nisi quod C sit jam Centrum Gravitatis (non quidem Basis, sed) Perimetri Baseos: Quoniam singula perimetri puncta B, D, &c. in eâ ratione ponderant quâ distant ab X motûs axe; hoc est, in rectarum X B, X D, &c. ratione: quæ simul omnes (propter C Centrum gravitatis) tantundem sunt atque totidem X C æquales: Súntque (propter similia Triangula) rectis X B, X D, X C, &c. proportionales B β, D δ, C κ, &c. Tantundem itaque sunt (per 12. El. 5.) simul omnes B β, D δ, &c. (superficiem Frusti recti B D δ β complentes,) atque totidem C κ, complentes superficiem Solidi Prismatici (demptis basibus) B D γ γ. Quod erat demonstrandum. Fig. 136.

Si verò exponatur superficialis Ungula Scalena, cum ejusdem basis Prismaticâ, similiter inclinatâ (hoc utique supponimus in superficialibus, utut in solidis id non erat necesse,) comparanda: Similiter operabitur similis utrobique inclinatio, adeoque non destruet æqualitatem.

Vel etiam, (ut in Fig. 139.) præter duo plana Ungulam Scalenam terminantia, ut β κ δ, b c d; intelligatur tertium aliquod B C D, quod solidum secet ad angulos rectos; adeóque duas exhibeat Ungulas rectas (de quibus procedet præcedens demonstratio) quarum vel summæ differentiæ æquabitur exposita Scalena.

Reliquáque, eodem modo demonstrantur de Frusti superficie, atque de ipso Frusto demonstrata sunt. Adeoque constat Propositum.

Atque hinc *Ungularum*, quas vocant, omne genus (Cylindricarum, Parabolicarum, &c.) Mensuram, (cognito vel supposito Basis Centro gravitatis, vel hujus saltem à communi sectione plani basis, planique secantis, distantia;) quam magno molimine plures sunt aggressi; expeditius, simplicius, atque universalius, unâ vice absolvimus. E.

Hinc etiam patet; expositi Cylindri, Prismatis, Solidive cujusvis Prismatici, (ut B D d b,) segmentum B D δ β, quocunque plano, & quocunque situ posito, (dummodo totam figuram transversim secet, non basi intra figuram occurrat,) si per idem (in C c rectâ) punctum κ transeat; ejusdem magnitudinis esse.

Fig. 141. Quod & de Frusti Superficie (ita ut dictum est) pariter intelligendum est.

Hinc etiam innotescit differentia duarum Ungularum super eodem plano, rectâve (aut curvâ in plano descriptâ) cujus magnitudo nota sit; prout Ungulæ Acies (seu planorum intersectio) propiùs remotiúsve abfuerit.

Nempe, Si super V A (plano, rectâve, aut curvâ in plano descriptâ) Magnitudinis notæ; erigi intelligantur Ungulæ duæ, quarum altera aciem habeat V seu V B, altera α seu $\alpha\,\tau$ (ipsi V B parallelam;) sitque eadem utriusque inclinatio (puta angulus F V A, angulo f α A æqualis:) Manifestum est (propter parallelas sive lineas sive superficies V F, v f,) Ungularum V F A, V v f A, differentiam esse, superficiem solidumve V F f v, vel V v a A; hoc est, factum ex base V A in altitudinem V v: Quæ quidem altitudo V v est vel ipsi α V (distantiarum differentiæ) æqualis; nempe, si inclinationis angulus F V A, seu f α A, seu v α V, sit semiquadrantalis: vel illâ major minorve, in ea ratione quam postulat datus inclinationis angulus.

Adeoque, si Ungula F V A nota sit; addito V F f v, vel VvaA, (facto ex base V A in altitudinem V v,) habetur Ungula V v f A. Si nota sit V v f A, dempto eodem VFfv vel VvaA, habetur Ungula V F A.

Si vero ipsæ V B, $\alpha\,\tau$, acies, non sint parallelæ; si tamen sint in eodem plano, eademque utriusque Ungulæ inclinatio nota, atque innotescat saltem quanta sit distantiarum à basis Centro gravitatis differentia; idem similiter obtinetur: ut ex ante demostratis patet.

Quodque de Ungulis dictum est; Momentis gravium quorumvis accommodabitur. Cum enim gravis V A momentum æstimetur ex facto à magnitudine in distantiam Centri gravitatis ab V B, seu $\alpha\,\tau$, (intellige, a perpendiculari plano per axem, V B, seu $\alpha\,\tau$,) differentia harum distantiarum (hoc est distantia planorum parallelorum B V, $\alpha\,\tau$,) in eandem V A magnitudinem ducta, exhibebit Momentorum ejusdem VA differentiam respectu Axium B V, & $\alpha\,\tau$.

G. Atque hinc speciatim, Trilinei aut Polygoni cujusvis, in superficie Cylindricâ descripti, planis utcunque positis abscissi, (seu quod eodem recidit, rectis, circulis, ellipsibusve, quibuscunque terminati,) magnitudo colligitur. Quippe manifestum est, hujusmodi quamlibet figuram in superficie Cylindricâ descriptam, esse vel hujusmodi Ungulam, vel saltem in hujusmodi aliquot Ungulas divisibilem. Adeoque (si dari intelligatur arcûs circularis Centrum gravitatis, quod prop. 14. exhibetur:) istius sive Ungulæ, sive Ungularum aggregati, magnitudo hinc habebitur. Quod de aliis item Corporum Prismaticorum superficiebus, figurisque inibi descriptis, pariter intelligendum erit.

SCHOLIUM.

SCHOLIUM.

NOtandum interim, Quanquam universaliter procedat propositio, de quocunque plano XBCD cui intelligatur ut basi insistere Solidum Prismaticum; adeoque & quamcunque habeat ad basin suam inclinationem: Expedire tamen nonnunquam posse, illud ex omnibus Planum seligere, quod solidum rectè secet; cui itaque ad angulos rectos insistat solidum. Utut enim vel Frustum secet, vel ne attingat quidem, illud XBCD planum, idem interim de altitudine cκ (fig. 139.) intelligendum erit, quod de Cκ (fig. 136.) dictum est.

PROP. XII.

Si Figura plana circa rectam quamvis in eodem plano expositam (quæ expositam figuram non secet) conversa, Figuram solidam describat: Æquatur solidum hoc, solido Prismatico super eâdem vel æquali Base; altitudinem habenti æqualem Peripheriæ (perfectæ vel imperfectæ prout conversio perfecta fuerit vel imperfecta) quæ expositæ figuræ convertendæ Centro Gravitatis describitur. A; Fig. 142.

Idem intellige, de Lineâ rectâ (vel curvâ) in plano illo descriptâ, quæ conversa intelligatur superficiem describere. Æquabitur utique hæc superficies, superficiei super expositam lineam erectæ, altitudinem habenti æqualem peripheriæ quæ Centro gravitatis conversæ lineæ describitur. B.

Sin recta, circa quam convertitur, expositam figuram lineámve convertendam secuerit: intelligendum erit de Differentiâ descriptorum, ab illis conversi partibus, quæ utrinque ad rectæ secantis contrarias partes constituuntur. C.

Hinc

D. Hinc itaque; Datâ figuræ planæ, lineæve in plano, tum Magnitudine, tum Centro gravitatis, (hujúsve ab Axe conversionis distantiâ;) datur figuræ, expositâ conversione factæ, magnitudo.

E. Datâque tum conversæ, tum conversione expositâ factæ, magnitudine; datur distantia centri gravitatis conversæ, ab axe conversionis.

F. Datâ denique, tum magnitudine expositâ conversione factæ, tum Centri gravitatis conversæ distantiâ ab axe conversionis; datur conversæ magnitudo.

Conversionem autem *expositam* hîc dicimus, quæ quota vel quanta pars sit integræ conversionis, aut ipsa integra conversio, exponitur. Supponimus item, peripheriæ datæ longitudinem datam esse.

G. Estque Centrum Gravitatis Ungulæ (sive solidæ sive superficialis) in illo per aciem plano quod altitudinem bisecat; Solidi vero aut superficiei conversione facti, in illo plano quod conversionis angulum vel arcum bisecat.

H. Atque hinc constat generalis methodus exhibendi solidum figuræ planæ circa rectam quamvis in eodem plano descriptam (saltem quæ ipsam non secet) conversione factum; Superficiemve conversione lineæ cujusvis (rectæ aut curvæ) in eodem cum conversionis axe plano descriptæ.

I. Hinc utique colligitur; Solidum conversione semiparabolæ circa rectam in vertice Tangentem descriptum; ad Cylindrum qui simili conversione Parallelogrammi circumscripti circa eandem rectam Tangentem describitur; esse, ut 4 ad 5.

K. Similiter, si circa semiparabolæ basin convertatur, tum semiparabola, tum Circumscriptum Parallelogrammum: Solidum illius, ad solidum hujus conversione factum, invenietur, ut 8 ad 15.

Si,

Si, circa ſemiparabolæ Axvem, utrumque planum convertatur; ſolidum Semiparabolæ ad ſolidum parallelogrammi converſione factum; invenietur ut 1 ad 2. L.

Si, circa rectam baſi adjacentem, Axi parallelam, utrumque planum convertatur; invenietur ſolidorum ratio, ut 5 ad 6. M.

Et ſimiliter, Quæ eorundem converſione circa aliam quamvis in eodem plano expoſitam rectam (quæ figuram non ſecet) in quacunque diſtantia remotam, & quocunque ſitu poſitam, fiunt Solida; rationem inter ſe habebunt, hac methodo inveſtigabilem. Idemque in aliis figuris mille modis efficietur. N.

Hinc etiam ſequitur: Si converſarum tum Magnitudines, tum Centrorum-gravitatis Diſtantiæ, ſint vel utræque æquales, vel reciproce-proportionales; Figuras, ſimili converſione factas, æquales eſſe: Sin minus; ſaltem in ratione ex illarum Magnitudinum & Diſtantiarum rationibus compoſitâ. per prop. 6, 7, Cap. 1. O.

Item; Annulum quemvis, æqualem eſſe, Plano converſo, in Peripheriam Plani Centro gravitatis deſcriptam, ducto. Quod tum de Annulo integro, tum de ipſius partibus, perinde obtinet; prout Converſio integra fuerit, vel partialis.

Item; Circulum, æqualem eſſe, facto ex Radio ducto in ſemiſſem Peripheriæ; (nempe, in Peripheriam, Radii Centro gravitatis ſeu puncto medio deſcriptam; quæ Peripheriæ Radio deſcriptæ ſemiſſis eſt.) Quod tum in Circulo integro, tum ipſius Sectoribus, perinde verum eſt.

Item; Curvam Cylindri Superficiem, æqualem facto ex Latere (hoc eſt, rectâ circumductâ,) in Peripheriam ipſius puncto medio deſcriptam, (quæ Baſis peripheriæ æqualis eſt.) Idemque de Converſionibus dimidiis, aut Partialibus aliis, perinde obtinet atque de Integris. Et ſic in reliquis.

Item;

Item ; Cylindri Solidum, æquale, Parallelogrammo circumducto, ducto in peripheriam suo Centro gravitatis descriptam ; (quæ est Peripheriæ Basis dimidia, propter Parallelogrammi Centrum gravitatis in media sive longitudine sive latitudine.)

Item ; Curvam Coni recti Superficiem, æqualem Lateri (hoc est, rectæ circumductæ) ducto in Peripheriam ipsius puncto medio descriptam ; (quæ est dimidia peripheriæ Basis.) Quod & Trunci superficiei (plano Basi parallelo abscissi) etiam accommodabitur.

Item ; Conum Rectum, æqualem Triangulo circumducto, ducto in Peripheriam ipsius Centro gravitatis descriptam ; (quæ Peripheriæ Basis Triens est.) Quod & Trunco (plano Basi parallelo abscisso) accommodabitur.

Et in reliquis similiter.

A. Fig. 142. ESto exposita figura plana B C D (in B C D lineam rectam projecta, eâ projectione quâ in prop. præced. usi sumus.) quæ circa rectam in eodem plano X (in unicum X punctum projectam) extra (saltem non intra) figuram expositam conversa, describat B D d b figuram solidam ; (similiter in planum projectam ;) Adeóque basis Centrum gravitatis C describat C c peripheriam.

B. Vel etiam B C D recta vel curva linea quælibet in eodem plano, (similiter in B C D rectam projecta ;) quæ circa X conversa describat B D d b superficiem eodem modò in Planum projectam : Suòque Centro Gravitatis C, describat C c peripheriam.

A. B. Et super eandem basem erigatur Solidum Prismaticum, vel Prismatica Superficies ; cujus recta, Centro gravitatis C insistens, C κ, æqualis ponatur ipsi C c peripheriæ. Planóque X κ, abscindatur Frustum B D δ β.

Cúmque tum B b, C c, D d, &c. (similes arcus) sint radiis suis X B, X C, X D, &c. proportionales ; tum (propter similia triangula) iisdem X B, X C, X D, &c. proportionales rectæ B β, C κ, D δ : erunt hæ rectæ arcubus illis proportionales : Adeóque, propter C κ ipsi C c æqualem, per constructionem ; erunt & reliquæ reliquis æquales ; & omnes omnibus : Hoc est, B D d b figura (sive solida sive super-

ficiaria

ciarias conversione facta, ipsi B D δ β Frusto ; adeóque &(per præcedentem) ipsi B D γ κ γ figuræ Prismaticæ super eandem vel æqualem basin Altitudinem habenti C κ, ipsi C c æqualem. Quod erat demonstrandum.

Sin conversionis axis X, secet figuram lineámve convertendam : similiter ostendetur, segmentum Frusti X D δ, segmento facti ex conversione XDd ; & reliquum X B β, reliquo X B b : Ergo & differentia differentiæ æqualis ; Et utravis (per demonstrata ad prop. præced.) ipsi Prismatico (solido, vel Superficiei,) B D γ κ γ. Quod itidem erat demonstrandum. C. Fig. 147.

Itaque ; Datâ figuræ planæ lineæve expositæ (B C D) magnitudine quæ sit *B B*, vel *B* ;. atque Centri gravitatis C, ab X conversionis axe, distantiâ ; adeóque & peripheriæ C c longitudine, quæ sit *P* : datur expositâ conversione factæ magnitudo *P B B* , vel *P B*. Nempe, quod fit ex *B B*, vel *B*, in *P* ducto. D. Fig. 142.

B B	B
P	P
P B B	P B

Item ; datâ magnitudine factæ expositâ conversione ; putà *P B B*, vel *P B* ; ipsâque conversæ magnitudine *B B* , vel *B* : datur arcûs (specie expositi) longitudo *P* ; (nempe quod ex *P B B* vel *P B*, per *B B* vel *B* diviso emergit) adeóque & radii quo describitur : quæ est distantia Centri gravitatis C ab axe conversionis. E.

B B) P B B (P
B) P B (P

Item ; datâ *P B B* vel *P B* magnitudine figuræ conversione factæ ; & distantiâ centri gravitatis conversæ à conversionis axe ; adeóque & quæ ab hoc describitur Peripheriâ *P* : Datur conversæ magnitudo, *B B* vel *B*. Nempe, quod ex *P B B*, vel *P B*, per *P* diviso, emergit. F.

P) P B B (B B
P) P B (B

Denique ; Bisectis Dd in m, & D δ in μ ; ductisque per conversionis axem vel Ungulæ aciem X, planis X m, X μ : Erunt, in illo, Centra gravitatis singulorum arcuum ut B b, D d, conversione factorum ; in hoc, rectarum singularum ut B β D δ ungulam constituentium, (per 2 & 3 hujus :) Adeóque in illo arcuum commune omnium, (hoc est, superficiei vel solidi conversione facti ;) in hoc, commune omnium rectarum, (hoc est, Ungulæ superficialis solidæve,) centrum gravitatis : per 27 Cap. præced. Quæ erant ultimo demonstranda. G. Fig. 142, 143, 144, 145, 146.

Atque hinc constat generalis Methodus exhibendi Solidum conversione figuræ planæ (lineæve in plano) circa rectam in eodem plano descriptam : Saltem quæ ipsam non secet. H. Fig. 148.

Exempli gratiâ. Sit A D B semiparabola ; cujus magnitudo ad magnitudinem parallelogrammi circumscripti A D B δ est ut 2 ad 3 ; I.

Centrum verò gravitatis à Vertice A ♂ distat $\frac{3}{5}$ Altitudinis, per 6 hujus; Parallelogrammi centrum à vertice distat, $\frac{1}{2}$ Altitudinis: Ergo illius ad hujus distantiam, ut $\frac{3}{5}$ ad $\frac{1}{2}$; vel, ut 6 ad 5. Adeóque propter plani magnitudinem ad magnitudinem, ut 2 ad 3; & Centri distantiam ad distantiam, ut 6 ad 5: Erit solidum ex conversione semiparabolæ A B D ad Cylindrum ex conversione A D B ♂, circa eandem A ♂; in ratione ex illis compositâ, ut 12 ad 15, vel 4 ad 5.

$$\frac{2}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

K. Eadem si conversa intelligatur circa B D; (unde Centrum Gravitatis distat $\frac{2}{5}$ altitudinis; adeóque ad distantiam Centri Gravitatis parallelogrammi circumscripti, ut $\frac{2}{5}$ ad $\frac{1}{2}$; sive ut 4 ad 5; et magnitudo ad magnitudinem ut 2 ad 3;) Solidum conversione factum, ad circumscriptum Cylindrum, erit ut 8 ad 15.

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

L. Eadem circa A D conversa; (propter magnitudinem, ut prius, sicut 2 ad 3; & distantium Centri gravitatis ab A D, $\frac{3}{8}$ Latitudinis, adeóque ad distantiam inde Centri gravitatis parallelogrammi circumscripti, ut 3 ad 4: per 8 hujus:) solidum faciet, ad Cylindrum circumscriptum; ut 6 ad 12, vel 1 ad 2.

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

M. Eadem denique circa B ♂, (unde Centrum gravitatis distat $\frac{5}{8}$ latitudinis; adeóque ad distantiam Centri gravitatis parallelogrammi ut 5 ad 4; & magnitudo ut prius;) solidum faciet, ad circumscriptum Cylindrum, ut 10 ad 12; vel 5 ad 6.

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

N. Atque eodem planè modo faciendum esset, etiamsi rectæ A ♂, ♂ B, A D, D B, non adjacerent, sed in remotâ distantiâ, vel etiam obliquo quovis situ, utcunque in eodem plano; dummodo figuram convertendam non secet expositus conversionis Axis.

Et similiter quæcunque exponatur figura plana, circa rectam quamvis in eodem plano (quæ illam non secet) utcunque positam convertenda

tenda. Quódque de figurâ planâ dictum, de lineâ quâvis in plano descriptâ, similiter convertendâ intelligatur.

Reliqua consectaria, in ipso propositionis curriculo satis demonstrantur. O.

SCHOLIUM.

HAnc methodum cum ante plures annos inveneram (nescius id priùs innotuisse) inveni tandem Torricellio, aliisque post illum, priùs fuisse, notam.

Si verò Figura conversa, non sit Plana, vel non in eodem Plano cum conversionis Axe, (quod & de Lineis similiter intellige:) pro conversâ, substituenda est alia (in eodem plano cum Axe) in quam, Conversa, sic projecta intelligatur, ut utriusque respectiva Puncta singula tantundem distent à conversionis Axe.

PROP. XIII.

Si circa rectam quamvis, ut conversionis Axem feratur (conversione integrâ vel partiali) Linea recta terminata, in eodem (cum Axe) Plano utcunque posita, (modò ne axem secet, aut illi sit ad angulos rectos:) Quæ à conversa recta describitur Superficies Curva, æquatur Superficiei Cylindri recti, quæ simili conversione describitur à recta quæ æqualis sit Axis Portioni duabus rectis à conversæ rectæ extremis punctis ad axem perpendicularibus interjectæ, in illa ab axe distantiâ quæ æqualis sit perpendiculari, medio conversæ rectæ puncto insistenti, ad axem terminatæ, circumlatâ. A. B. C.

Quódque de unâ conversâ rectâ dicitur, pluribus similiter accommodabitur. D.

Adeoque; Si Semi-circumferentiæ Circuli, vel arcui minori, circumponatur ex continuis rectis (quæ mediis suis punctis peripheriam contingant) conflata linea: Quæ ab hac lineâ compositâ, circa istius circuli diametrum quamvis (quæ illam non secet) conversâ, describitur Superficies curva; æquatur Superficiei curvæ Cylin- E.

Cylindri recti, æque-alti, basin habentis exposito circulo æqualem.

F. Adeoque & ; Superficies curva quæ a Semi-perimetro (vel hujus portione, ex integris Lateribus quotlibet constante) *Polygoni regularis*, circa Polygoni illius diametrum (quæ illam non secet) conversâ describitur ; æquabitur superficiei curvæ Cylindri recti æquè-alti, basem habentis æqualem circulo qui Polygono illi inscribitur. Et Partes partibus respective sumptis.

G. Et, speciatim ; *Superficies Sphærica*, æquatur superficiei curvæ Cylindri recti circumscripti : Ejúsque Portiones, respectivis hujus portionibus ; sive Planis per Axem, sive planis ad Axem rectis, abscissis.

H. Atque hinc sequitur ; Superficiem Sphæræ, æqualem esse quatuor circulis in Sphæra maximis.

I. Item ; Superficiei Sphæricæ Segmenta, parallelis planis interjecta, Altitudinibus (vel abscissis Axis Portionibus) esse proportionalia.

K. Et ; Segmenti Superficiei Sphæricæ, duobus parallelis planis interjecti, Centrum gravitatis esse in Axis segmenti medio.

L. Quæ quidem Consectaria, etiam *Sinibus Rectis*, & *Subtensis* arcuum (mutatis mutandis) accommodanda sunt (utpote illorum in Superficie Sphærica Circulorum Radiis & Diametris.) Nempe,

Summa Sinuum Rectorum totius sive Quadrantis sive Semicirculi ; adeoque & summa Chordarum vel Subtensarum arcuum totius sive Semicirculi sive Circuli integri ; æquatur Parallelogrammo circumscripto. Et partes partibus respective sumptis, quæ parallelis planis abscinduntur. Nempe,

Summa

Summa Sinuum Rectorum integri Quadrantis, æquatur Quadrato Radii: Summa Sinuum rectorum totius Semicirculi; vel Subtensarum arcuum in Semicirculo; duobus Quadratis Radii: Et Summa Subtensarum in Circulo integro, Quadrato Diametri, seu quatuor Quadratis Radii. M.

Item (in partibus horum) Summa Sinuum rectorum cujusvis Arcûs particulis (in suo situ) convenientium, æquatur Parallelogrammo æque-alto, basem habenti Radium Circuli. (Summaque Subtensarum correspondentium, hujus dupla.) N.

Adeoque; Summæ partiales, sunt Altitudinibus (seu Axis particulis interceptis) proportionales. O.

Et; Summæ (sive Partialis, sive Totalis,) Centrum-gravitatis, in mediâ Altitudine; Subtensarum quidem, in ipso Axis medio; Sinuum, saltem æque-altum. P.

Hinc eadem etiam transferuntur ad *Superficiem curvam Ungulæ*, super Semicirculum, ejúsve Portionem erectæ, cujus Acies sit Diameter Semicirculum terminans. Nempe, Q.

Si plani secantis ad circuli planum Inclinatio, sit graduum 45, seu Semi-quadrantalis, (adeóque altitudo maxima, æqualis maximo Sinuum;) Curva Superficies æquatur Summæ Sinuum rectorum; (& partes partibus respectivè sumptis.)

Si verò Altitudo maxima, sit ad maximum Sinuum, ut Peripheria vel Semiperipheria ad Radium; erit Ungulæ Curva Superficies, æqualis curvæ superficiei Sphæræ vel Hemisphærii eisdem planis (Axi rectis) interjectæ. Atque in aliis Altitudinibus proportionaliter. R.

Et Centrum Gravitatis (quæcunque sit Ungulæ altitudo) in perpendiculari Plano medio inter extremos Sinus. S.

Atque hæc eadem, ad *Figuram Sinuum Rectorum*, sive M,N,T.

Qua-

Quadrantis unius ſive totius Semicirculi, (quæ quidem nihil aliud eſt, quam illa Semiquadrantalis Ungulæ Semicylindri Curva Superficies in planum expanſa,) ſimiliter accommodantur. Nempe; Figuram illam Sinuum rectorum unius Quadrantis, æqualem eſſe Quadrato Radii; totius autem Semicirculi, æqualem duobus Radii Quadratis; & Segmentum quodvis duobus ſinibus interjectum, æquale facto ex Radio in Diametri Circularis Segmentum duobus correſpondentibus in Semicirculo Sinibus interjectum ducto. (Unde & alia ejuſdem portio quælibet, curvæ hujus particulâ & rectâ rectíſve terminata, ſimiliter data erit.)

V. Eadémque porro ampliantur, ad *Summas Quadratorum*, *Cuborum*, *Biquadratorum*, aliarúmve poteſtatum, eorundem *Sinuum Rectorum*. Nempe; Ut *omnes Sinus Recti*, Segmento cuivis Semicirculi (parallelis Sinibus interjecto) reſpondentes, æquantur facto ex Radio in Diametri Segmentum interjectum ducto: Sic & eorundem *Sinuum Quadrata omnia*, æquantur Radio in omnes ordinatim-applicatas (eâdem ab invicem diſtantiâ ſumptas, quâ diſtant in arcu circulari Sinus ipſi) ſegmentum illud complentes ducto: Et Sinuum illorum *Cubi omnes*, æquantur Radio in harum Ordinatim-applicatarum Quadrata: Sinuúmque *Biquadrata*, Radio in harum Cubos ducto: & ſic deinceps.

W. Atque hinc porro habetur, Momentum Superficiei Ungulæ iſtius Semicylindri, ejúſve ſegmenti, reſpectu (aciei ſuæ) Diametri circularis. (Nempe, in Semiquadrantali Ungula, Sinuum illorum Quadratorum Summæ æquale: in aliis, pro altitudinum ratione.) Ipſumque gravitatis Centrum.

X. Item; Figuræ Sinuum Rectorum, ejúſve Segmenti, Momentum

mentum respectu rectæ cui adjacent Sinus illi: Vel, Semiquadrantalis Ungula (unde & de aliis Ungulis fiet judicium pro altitudinum ratione,) Figuræ Sinuum Rectorum, ejúsve Segmenti, aciem habens rectam illam cui adjacent. (Nempe, Semissis Summæ Quadratorum eorundem Sinuum.) Adeoque, Centri gravitatis Plani distantia ab ipsa cui adjacet rectâ.

Item; Hujus Ungulæ Momentum, respectu ejusdem adjacentis rectæ, aciei suæ. (Nempe, Triens summæ Cuborum eorundem Sinuum.) Adeoque, Centri gravitatis inde distantia. (Intellige: Si priùs cognoscatur, tum ordinatim-applicatarum illarum Summa, hoc est, ipsum Semicirculi Segmentum; tum summa quadratarum earundem ordinatim-applicatarum: Quorum utrumque methodis jam notis cognoscuntur: atque hic infra docentur.) Y.

Circa Axem X S, recta t t (in eodem plano constituta) convertatur; cujus medio Puncto T insistens perpendiculars T C, axi occurrat in C: Ab extremis autem punctis t, t, perpendiculares ad axem ducantur t d, t d; atque, à T medio, T D. A. Fig. 149.

Si sit t T t axi parallela: Manifestum est, tum T C, T D, eandem esse rectam, tum d D d, t T t, (parallelas parallelis terminatas,) rectas æquales; adeoque constare propositum.

Sin parallela non sit; occurrat Axi in A: Eritque (propter parallelas, & similia triangula,) t T t, ad d D d; ut A T ad A D; hoc est, (propter similia triangula,) ut C T, ad T D. Adeóque, factum ab extremis, t t in T D; æquabitur facto à mediis, d d in C T. Et (propter, similes Peripherias, radiis suis proportionales,) Factum ex t t in peripheriam radio D T descriptam, ad factum ex d d in similem peripheriam descriptam radio C T, vel qui huic æqualis sit. Adeóque (per prop. præced.) Superficies curva quæ à conversâ t t (cujus centrum gravitatis est T, ejúsque ab axe distantia T D) describitur; æqualis erit curvæ superficiei Cylindri, quæ rectâ d d vel huic æquali describatur, in distantia ab axe quæ sit ipsi C T æqualis. Quod erat demonstrandum.

Nempe; quâ ratione C T longior est quam D T, eâdem brevior est d d quam t t.

Dico

B. Dico autem; *modò ne Axem secet*; quoniam (ut ad prop. præced. dictum est,) hoc casu, duarum curvarum differentiæ, æqualis esset illa Superficies Cylindrica.

C. Item; *ne sit ad axem ad angulos rectos:* quoniam, hoc casu, non Curvam sed Planam superficiem describeret conversa recta; cui in Curvâ superficie Cylindricâ nihil responderet. Nec, de illâ procederet demonstratio.

D. Fig. 150. Quodque de unâ conversâ rectâ dictum est; pluribus similiter accommodabitur; ductis, a singularum punctis mediis, ad axem, respectivis rectis. Quippe si in omnibus eadem sit, vel æqualis, recta T C; ejusdem Superficiei Cylindricæ segmentis æquales erunt quæ à t t rectis describentur: Sin minus; diversarum.

E. Putà; Si circa Semiperipheriam (arcúmve adhuc minorem) circumponatur, ex rectis conflata t t t linea; quarum singularum puncta media T, T, sint in T T peripheria; adeóque T C, T C, invicem æquales: rectis autem t t, t t, æque-altæ d d, d d, axis portiones; atque his æquales δ δ, δ δ; quarum ab axe distantia d δ sit æqualis ipsi T C, (quæ cum sit inscripti circuli radius; eundem tanget δ δ δ.) Ostendetur, ex jam demonstratis, Superficies rectis t t, t t, descriptas, sigillatim æquales eis esse quæ rectis δ δ, δ δ, describuntur. Ergo; quæ totâ t t t describitur, toti descriptæ à δ δ δ. Quod itidem probandum erat.

F. Adeoque; Si t t t sit tota Semi-Perimeter Regularis Polygoni: De hac item constat. Sin ipsius saltem aliqua latera; De superficie saltem his lateribus descriptâ constat. Sin forte, ad complendam Semiperimetrum, desit Semi-latus, ut t d; quod perpendiculare sit ipsi d d Axi; (vel etiam utrinque inter lineæ compositæ t t t extrema, & axem, simile sit interstitium:) saltem tota superficies Curva quæ à Semiperimetro describitur, æqualis jam ostensa est descriptæ Cylindri Curvæ à δ δ δ. Quippe quæ à t d describitur, plana erit: nec magis hìc in considerationem venit, quam Cylindri Bases. De Curvis utique Superficiebus procedit Propositio.

(Atque hinc facile deducerentur, non modò ea prope omnia quæ ab *Archimede*, de *Sphæra & Cylindro*; sed & eorum plurima quæ à *Torricellio*, de *Solidis Sphæralibus*, demonstrantur.)

G. Fig. 151. Denique; Cum Circulus aliud non sit quam Polygonum regulare laterum numero infinitorum; sitque Semiperipheria, istius Polygoni Semi-

Semiperimeter; (juxta def. 1. Cap. 4.) etiam hîc ſpeciatim verum erit quod de omnibus demonſtratum eſt. Hoc eſt; Quæ Semiperipheriæ D T D circa axem D D converſione deſcribitur Superficies Spærica, æquatur ſuperficiei Curvæ Cylindri æquè-alti à rectâ δ δ deſcriptæ; Et portiones illius portionibus hujus reſpective ſumptis; puta, quæ à curva D T deſcribitur, illi quæ à recta δ d æque-alta; item, quæ ſemiconverſione unius, illi quæ à ſemiconverſione alterius; (& in aliis ſimiliter converſionibus imperfectis.) Quæ itidem erant demonſtranda.

Atque hinc ſequitur, Superficiem Sphæræ, quatuor circulis maximis æqualem eſſe. Eſt utique Circuli in Sphæra maximi peripheria, æqualis peripheriæ baſis expoſiti Cylindri (propter æquales utriuſque radios:) eáque ducta in latus Cylindri, quod æquatur Diametro Sphæræ,) exhibet Cylindri ſuperficiem curvam, ut notum eſt; (vel, quod eodem recidit, recta δ δ in peripheriam ipſius puncto medio deſcriptam, quæ eadem eſt cum peripheria circuli in Sphæra maximi, eandem exhibet ſuperficiem curvam Cylindri, per prop. præced.) Cum itaque quod fit ex Semidiametro in Semicircumferentiam æquetur Circulo, (ſive, quod fit ex Semidiametro in peripheriam ipſius puncto medio deſcriptam, quæ dimidia eſt peripheriæ totâ deſcriptæ:) quod fit ex tota Diametro in totam Peripheriam, (hoc eſt, Curva ſuperficies Cylindri, adeoque & Sphæræ,) æquatur Quadruplo ejuſdem circuli maximi. Quod erat propoſitum. H.

Item Superficiei Sphæricæ Segmenta, parallelis planis abſciſſa, altitudinibus (ſive portionibus Axis abſciſſis) ſunt proportionalia. Æqualia ſcilicet reſpectivis ſegmentis Superficiei Curvæ Cylindricæ; quæ ſunt altitudinibus proportionalia. Quod itidem demonſtrandum erat. I.

Adeoque; ut Superficiei Curvæ Cylindricæ, (per prop. 1 & 5 hujus,) ſic & Segmenti Sphæricæ, parallelis planis abſciſſi, Centrum gravitatis eſt in Axis Medio. Nam, quotcunque planis parallelis, utraque ſecetur ſuperficies curva; æqualia erunt reſpectiva hujus atque illius Segmenta; & (ſi intelligantur numero infinita, juxta def. 1. Cap. 4.) æqualiter à medio plano remota, adeoque & æqualiter reſpectu ejuſdem ponderantia. Eſt igitur in plano medio (baſibus parallelo) per 4 hujus; eſtque in Axe, per 5 hujus; ergo in Axis puncto medio, per 26 Cap. 4. Quod erat etiam demonſtrandum. K. Fig. 152.

L. Quæ quidem Sinibus rectis, & Arcuum Subtensis sive Chordis, facilè accommodantur.

Fig. 153. Intelligantur enim, tum à singulis punctis sive particulis infinitè-exiguis Diametri circularis sive Axis A α, Ordinatim-applicatæ, ad δδ Tangentem circuli parallelam pertingentes, (parallelogrammum circumscriptum complentes:) tum à Semicircularis arcûs A D α singulis punctis, sive particulis infinitè-exiguis (particulis illis Diametri æqualibus) Sinus recti ad Diametrum vel Axem A α demissi: (Quorum itaque numerus seu multitudo, reputanda erit ad numerum seu multitudinem ordinatim-applicatarum, ut est Longitudo Semipheriæ ad Diametrum Circuli.)

Cum itaque singulæ arcûs Particulæ; seu earum Tangentes, cum particulis illis exiguis quasi coincidentes; sint (ut jamjam ostensum est) in eâ ratione magis Obliquæ, seu minus Altæ, quâ Breviores sunt Sinus recti inde demissi: adeóque, Arcus æque alti, in eâdem ratione Longiores, indéque Sinus demissi eò plures in eadem altitudine quò breviores sunt; (& quidem eò plures quàm sint in eâdem altitudine ordinatim-applicatæ expositæ, quò breviores sunt quam illæ ordinatim-applicatæ Radio æquales:) Erunt ubique, in eâdem altitudine, omnes simul Sinus recti, omnibus simul ordinatim-applicatis, æquales: (supplente scilicet Multitudine quod in Longitudine deest.)

M. Adeóque; Omnes Sinus recti Quadrantis A C D, omnibus Ordinatim-applicatis Quadrati A C △ δ.

Fig. 155. Hoc est; (Si intelligatur Arcus A D in rectam extendi; eique ad angulos rectos insistere Sinus recti in suis respective punctis; & per eorum omnia extrema puncta duci curva, Figuram terminans, quæ *Figura Sinuum Rectorum* dicatur;) Figura Sinuum rectorum totius Quadrantis, A C D, Quadrato Radii æqualis erit.

Fig. 153. Item; Omnes Sinus recti, in A α D Semicirculi, omnibus Ordinatim-applicatis in Parallelogrammo A α δ δ.

Fig. 155. Hoc est, Figura Sinuum rectorum totius Semicirculo, A C α; duobus Quadratis Radiis.

Adeoque; Si, continuatis Sinibus, compleantur Subtensæ duplorum Arcuum; manifestum est (propter Subtensas Sinuum duplas) Omnes Subtensas Semicirculi, æquari duobus Quadratis Radii, & Omnes Subtensas totius Circuli, quatuor Quadratis Radii, sive Quadrato Diametri. Quod erat etiam probandum.

N. Cúmque hoc ubique obtineat; Idem in partibus non minus valet. Putà

Putà, omnes Sinus Recti in portionibus Circularibus A B E, E B C D, Fig. 154. E B F G, G F H K, &c. æquales omnibus Ordinatim-applicatis, in Parallelogrammis A B ε δ, ε B C Δ, ε B F γ, γ F H κ, &c.

Hoc est, (expansis Arcubus in Rectas, erectisque Sinibus, & com- Fig. 154, pletâ ut prius figurâ) Figura figuræ æqualis. Puta E B F G in figura 155. Sinuum, æqualis Parallelogrammo ε B F γ: Et sic in cæteris. Quod etiam erat probandum.

Sed &, Si Axis A α in Circulo, jam consideretur ut Libra, (in O. situ Horizontali positâ;) similiter ostendetur ipsius particulas æqua- Fig. 153. les singulas, insistentibus (in suo situ) Sinibus rectis, æqualiter gravatas esse; non minus quam, ex oppositâ parte, Ordinatim-applicatis.

Adeoque; (sive tota A α, sive pars ut B F consideretur,) Cen- P. trum Æquilibrii erit in assumptæ Libræ medio; (per prop. 2 & 4 Fig. 154. hujus.) Putà, Summæ Sinuum portionis E B F G, in altitudine mediâ inter E B & F G, (sive ad easdem, sive ad oppositas centri partes ponantur ipsæ E B, F G.) Quod erat itidem demonstrandum.

Dico autem, *In suo situ*: Quoniam si intelligatur (ut in figura Sinuum, fig. 155.) Arcus in rectam extendi: rem secus esse, (ob variatas sinuum distantias,) manifestum est. Nisi cum E B, G F, utrinque à Centro æqualiter distant.

Totúmque hoc quod de Sinibus Rectis (Arcuúmve Subtensis) hic traditur, eodem planè principio nititur, atque illud de Superficie Sphæricâ, ejúsque partibus. Quippe Sinus Recti, Arcuúmque Subtensæ, in suo situ existentes, non sunt nisi Radii Diametrique Peripheriarum, æqualibus ab invicem distantiis remotarum, superficiem illam Sphæricam complentium. Atque ut illæ omnes Peripheriæ, omnibus Cylindricam superficiem complentibus Peripheriis æquantur: Sic & Illarum omnes Radii, & Diametri, omnibus item Radiis, & Diametris, Harum. Quod & in partibus obtinet respectivè sumptis pariter utrobique.

Eadem Curvæ Superficiei Ungulæ sic accommodantur. Q.

Si super A α D Semicirculo, vel ipsius Segmento quovis, ut E B F G, Fig. 154. (rectis E B, G F, quibusvis, quæ sint ad angulos rectos Axi A α, interjecto,) erigatur Ungula, cujus Acies (seu communis intersectio Basis Planique secantis) sit in A α; sitque Planorum (Basis scilicet, Planique secantis, seu Ungulam abscindentis,) Inclinatio, Semi-quadrantalis: (quam *Semi-quadrantalem Ungulam* appellamus:) Rectis E B,

EB, GF, reliquísque hisce parallelis,) insistet Triangulum Rectangulum, & quidem (propter Inclinationem Semi-quadrantalem) Isosceles. Adeoque (cum hoc ubique obtineat) singulis Peripheriæ A D α, vel E G, punctis, insistent rectæ (curvam Ungulæ Superficiem complentes) suarum distantiis ab A α, seu Sinibus rectis, æquales.

Fig. 155. Eritque, propterea, Curva Superficies Ungulæ, æqualis summæ Sinuum rectorum; sive (extenso in rectam arcu A D α, vel E G, erectísque Sinibus, & completâ ut prius figurâ,) correspondenti Figuræ Sinuum rectorum, ejúsve portioni correspondenti. (Est utique Figura illa Sinuum Rectorum A α C, nihil aliud quam istius Ungulæ Superficies curva, in planum expansa.)

Fig. 154. Hoc est, per modò demonstrata, Parallelogrammo α A δ (fig. 154.) si Basis Ungulæ sit A α D: vel, Parallelogrammo B F γ ε, si Basis si E G. Et partes partibus respectivè sumptis æquales.

Fig. 154, 155. Nempe, Quæ insistet arcui E G curva superficies Ungulæ Semiquadrantalis (aciem habentis B F) æqualis erit superficiei planæ E B G F in figura Sinuum; hoc est B F γ ε Parallelogrammo. Et sic ubique.

R. Si verò (pro alia Plani secantis ad Basin Inclinatione) alia sit altitudo: putà, altitudo in E, ad distantiam E B, (& sic ubique) ut Peripheria vel Semiperipheria ad Radium: Pro Sinubus, Sumendæ erunt Peripheriæ vel Semiperipheriæ his Radiis descriptæ, (saltem Rectæ his Peripheriis vel Semiperipheriis æquales;) adeóque Ungulæ curva Superficies, æqualis erit Superficiei Sphæricæ, vel Hemisphæricæ, (hujusve Portioni respectivæ,) ejusdem Arcûs A D α, vel E G, conversione vel semiconversione (circa A α) descriptæ. Atque in aliis altitudinibus proportionaliter. (per prop. 11 & 12 hujus.)

Fig. 154.

Adeóque, pro Parallelogrammis α A δ, B F γ ε, sumenda erunt alia æque-alta; sed quorum Bases, ad Basin A δ vel C Δ, (Radio Circuli æqualem,) sint in ea ratione quæ est Altitudo in E (vel aliæ Peripheriæ puncto,) ad hujus ab A α distantiam.

S. Eritque, propter eandem rectæ E B, rectæque ipsi in E insistentis, (& de reliquis similiter,) distantiam à Plano Sphæram tangente in α, (vel huic parallelo quovis;) Centrum Gravitatis in eâdem ab illo Tangente Plano (Planóve illi parallelo) distantiâ, quâ est Centrum gravitatis Summæ Sinuum, vel Superficiei Sphæricæ, (ejúsve portionis,) correspondentis. Hoc est, in Plano inter extremos Sinus, (puta inter E B, G F,) medio. Quæ itidem erant demonstranda.

Hujus

Hujus autem Figuræ Sinuum rectorum A α C (quam totam duobus Radii quadratis æqualem ostendimus,) si portionem aliquam, duabus utcunque rectis Basi perpendicularibus interjectam, libeat mensurare; puta E B F G: Sumptis in Semicirculo (huic respondente) A D α (fig. 154.) Sinibus rectis E B, G F; quæ æquales sint, & similiter siti ipsis E B, G F, in figura Sinuum (fig. 155.) Interjecta Diametri Circularis portio B F, in ejusdem Circuli Radium ducta; exhibebit Rectangulum, expositæ portioni E B G F in figura Sinuum, æquale: ut in supra demonstratis ostensum est. T. Fig. 155.

Si verò aliam quamvis ejusdem portionem, rectis utcunque abscissam, (utut non sint basi perpendiculares,) mensurare libeat: id fiet additis vel ablatis (hujusmodi Portioni perpendicularibus interjectæ) spatiis rectilineis; prout casus expositus postulaverit.

Sciendum porro est; Summam Sinuum rectorum, portioni Circulari ut E F B G respondentium, dici posse alio atque alio modo complere tum E B F G in figura Sinuum, tum E B F G in Semicirculo; sicut eandem portionem Circularem complere dicantur, tum illa Sinuum summa, tum summa Ordinatim-applicatarum, ipsis E B, G F, interjectarum. V. Fig. 154, 155.

Intelliguntur utique tum Sinus omnes ipsis E B, G F, interjecti in figura Sinuum tum omnes Ordinatim-applicatæ ipsis E B, G F, interjectæ in portione Circulari; æqualibus ab invicem distantiis remotæ & quasi æqualiter crassæ seu latæ: sive (quod eodem recidit) exiguis quidem sed æqualibus basis vel axis particulis insistentes; quarum itaque æqualium particularum non alia ratio haberi solet (in methodo Indivisibilium) quàm quod simul-omnes toti æquentur. Fig. 153, 154, 155.

Sed in E B F G portione Circulari, Sinus recti (propter Arcum, non Axem, in æquales partes divisum) inæqualibus ab invicem intervallis removentur; adeóque inæqualibus axis particulis insistunt; (minoribus prope polos, quàm longiùs inde:) quarum itaque habenda ratio.

Æqualibus utique Tangentibus t t, t t, (quas *T* dicemus,) sive Peripheriæ Particulis (quæ, cum infinite-exiguæ supponantur, cum ipsis Tangentibus reputandæ sunt coincidere;) inæquales respondent Axis Particulæ d d, d d, (quas *d* dicemus,) quibus insistere intelligantur Sinus recti respectivè sumpti. Fig. 150.

Hac autem consideratione interpositâ, non minùs dicetur Summa Sinuum, quàm summa Ordinatim-applicatarum, complere expositam

tam portionem Circularem. Tam enim omnes-ſinus s, in ſuas reſpectivè d ducti, quàm omnes Ordinatim-applicatæ (quas o dicemus) in ſuas ſingulæ I particulas æquales ductæ, eandem portionem Circularem complent. (Supponimus autem, quod & prius dictum eſt, particulas Peripheriæ quibus reſpondent Sinus recti, particulis Diametri ſeu Axis quibus reſpondent Ordinatim-applicatæ, æquales eſſe.) Hoc eſt, Omnes $s\,d$ æquales omnibus $o\,T$, (iiſdem E B, G F, interjectis,) portionem E B F G in Semicirculo, pariter complentes.
Fig. 153, 154, 155. Omnes autem iidem Sinus s, in Arcûs ſui, Rectæve, E G, Particulas T; hoc eſt, Omnes $s\,T$; æquales ſpatio E B F G in figura Sinuum: adeoque Parallelogrammo (ut ſupra probatum) ϵ B F γ, portioni Circulari E B F G (vel huic ſimili & æquali e B F g) æque-alto, baſin habenti Radio æqualem. (Differentia quæ extenſo Arcu in Rectam oritur, eſt e g $\gamma\,\epsilon$.) Sic, in portione Circulari G F H K, Omnes Sinus recti s, in ſuas reſpectivè d, portionem complentes; æquantur Omnibus Ordinatim-applicatis o in T ductis, quæ complent (illi ſimilem & æqualem) portionem g F H k: Omnes autem iidem s in T ducti, (complentes ſpatium G F H K in figura Sinuum,) æquantur Parallelogrammo γ F H $\varkappa$; excedenti ſpacium Circulare g F H k, ſpatio γ g k $\varkappa$. Et ſic ubique.

Similiter; Sumptis tum Sinuum omnium, tum omnium Ordinatim-applicatarum, Quadratis, Cubis, &c. erunt *Omnes* s^2d æquales *Omnibus* o^2T: Item, *Omnes* $s^3d =$ *Omnibus* o^3T: & *Omnes* $s^4d =$ *Omnibus* o^4T. &c.

Fig. 149. Quanta autem ſit d in ſingulis, ſic colligitur. Cùm ſit (ut in hac prop. § A. demonſtratum eſt) t t ad d d, ut C T ad T D; Hoc eſt, T ad d, ut R ad s; Adeóque $sT = dR$: Erit $d = \frac{sT}{R}$.

Adeoque; $sd = \frac{s^2T}{R}$: Et *Omnes* $s\,d$, hoc eſt, *Omnes* $o\,T$, æquales *Omnibus* $\frac{s^2T}{R}$: Et *Omnes* s^2T, æquales *Omnibus* $o\,T\,R$: Sive, *Omnes* s^2, æquales *Omnibus* $o\,R$. Hoc eſt; Summa Quadratorum Sinuum Rectorum in ſpatio Circulari E B F G; æqualis,
Fig. 154. *Omnibus* $o\,R$; hoc eſt, ipſi ſpatio E B F G in radium R ducto. Et ſic ubique.

Item, *Omnes* $o^2T =$ *Omn.* $s^2d =$ *Omn.* $\frac{s^3T}{R}$. Adeoque *Omnes* $o^2R =$ *Omn.* s^3.

Item; *Omnes* $o^3 T = Omn.\ s^3 d = Omn.\ \frac{s^4 T}{R}$. Adeoque *Omnes* $o^3 R = Omn.\ s^4$. Et sic deinceps. Quæ oſtendenda erant.

Atque hinc porro habetur Momentum Curvæ Superficiei Ungulæ Semi-cylindri, Semicirculo A D α, ejúſve Segmento cuivis B E G F, inſiſtentis, (Aciem habentis A α,) reſpectu aciei ſuæ. Cùm enim omnes Rectæ ſuperficiem illam complentes, ſint Sinibus rectis qui eiſdem arcus punctis reſpondent Æquales, (nempe, ſi Planorum Inclinatio ſit Semi-quadrantalis,) vel ſaltem Proportionalis, (quæcunque ſit Plani ſecantis ad Baſin inclinatio;) ſintque earundem ab A α diſtantiæ, iidem Sinus Recti: Erunt earundem Momenta, ut Sinuum horum Quadrata; & Summa Momentorum, hoc eſt, Momentum Superficiei Curvæ, ut Summa Quadratorum illorum: Nempe huic ſummæ æqualis ſi Inclinatio Ungulæ ſit Semiquadrantalis; vel ad illam ſaltem ſummam eam habebit rationem quam habet rectarum quævis ſuperficiem illam curvam complentium ad ſuam reſpectivè ab A α diſtantiam. W. Fig. 154.

Quod quidem Momentum, per Magnitudinem (jam traditam) diviſum, exhibet diſtantiam centri gravitatis à Plano per Aciem A α, rectis ſuperficiem curvam complentibus parallelo. Sed & in eo per aciem Plano eſſe conſtat, quod Rectas ſuperficiem curvam complentes biſecat; per prop. 11. hujus. Atque in Plano inter rectarum illarum extremas medio, ad axem recto, jam oſtenſum eſt. § S. Ergo, ipſum Centrum datur. per prop. 26. Cap. 4.

Item; Momentum Figuræ Sinuum Rectorum A C α, ejúſve Segmenti ut B E G F, reſpectu rectæ cui adjacent A D α: Seu (quod eodem recidit) Semi-quadrantalis Ungula ejuſdem Figuræ Sinuum, ejúſve Segmenti, aciem habens eandem A D α rectam. Cum enim (propter cujuſque Rectæ Centrum gravitatis in medio ſui) cujuſque Sinuum Momentum, ſeu Triangulum eidem inſiſtens, ſit ejuſdem Semiquadratum, (ducto ſcilicet unoquoque Sinuum in ſemiſſem ſui:) erit ſemiſumma Quadratorum, ipſum Plani Momentum, ſeu Semi-quadrantalis Ungula. (Unde & de aliis Ungulis, ſervatâ Altitudinum ratione, fiet judicium.) X. Fig. 155.

Atque hoc Momentum, per Magnitudinem (jam inventam) diviſum, exhibet Centri gravitatis diſtantiam, ab ipſa A α rectâ.

Denique; Hujus Ungulæ Momentum, hinc etiam habetur. Cum enim cujuſque Triangulorum horum Centrum gravitatis, à recta A α, communi omnium Acie, aut huic potius inſiſtente perpendiculari Plano Y.

diſtat,

distat, duobus Trientibus istius cui insistit Sinûs; sitque ipsum Triangulum (uti jam ostensum est) Semissis Quadrati; Erit (propter $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$) Cujusque Trianguli Momentum, Cubi Triens: Adeoque Triens Cuborum Sinuum illorum omnium, est ipsum Ungulæ (Semiquadrantalis) Momentum.

Atque hoc Momentum, per Magnitudinem (modo inventam) divisum, exhibet Centri-gravitatis Ungulæ, ab ipso, in A α, erecto Plano.

Cùm verò, pro inveniendâ Summa Quadratorum, *Omn.* s^2; & Summa Cuborum, *Omn.* s^3; habenda erunt *Omn.* $o\,R$, & *Omn.* o^2R, (per § V. hujus:) hoc est, Summa Ordinatim-applicatarum, & Summa Quadratorum ex illis, (in *R* ducenda:) Hæc quò habeantur nihil impedit; cùm & jam notis methodis, haberi possint; & methodis à nobis infra tradendis.

SCHOLIUM.

POsset quidem hæc Propositio, prout Superficiem curvam ex circumducto Arcu Circuli ortam spectat, ab illâ quæ sequitur (aliunde demonstratâ) inferri. Nam datâ Arcûs Magnitudine, ejúsque Centro gravitatis; habetur tum Ungulæ superficies curva, (sive, quod eodem recidit, Summa Sinuum Rectorum;) tum Superficies curva illius conversione facta: per prop. 11 & 12 hujus. Sed perinde est sive hæc ab illâ, sive ab hac illa, inferatur; dummodo harum saltem altera aliunde probetur. Ego hanc potiùs præmisi, propter sequentis ex hac demonstrationem perspicuam, & quidem simpliciorem quàm apud alios hactenus viderim. Illa enim (meâ methodo) directè sequitur & immediatè, à demonstratis olim ab Archimede, & post illum aliis.

Quæ autem hic tradita sunt de Curva superficie Ungulæ Semi-cylindri, aciem habentis Diametrum basis circularis; seu, quod eodem recidit, Arcûs Momento respectu istius Rectæ: facile (per ea quæ ad prop. 11. tradidimus) transferri poterunt ad Ungularum aliarum Cylindricarum Superficies curvas, alios habentes Axes; seu Arcuum Momenta respectu rectarum aliarum. Cúmque omnes in superficie Cylindricâ Figuræ, planorum sectionibus terminatæ, resolvi possint vel in curvas figuras Cylindraceas, vel saltem Ungulares hujusmodi: poterunt propterea ejusmodi Figuræ omnes in Superficie Cylindraceâ, hac methodo, ad certas mensuras revocari. Quod cùm solius calculi

opus

opus sit; atque etiam in sequentibus aliquantò fusiùs tradendum: non erit necesse ut hic pluribus exponam.

Ea verò Linea Curva, quæ *Figuram Sinuum rectorum* (modo memoratam) terminat, A C α fig. 155. alia non est quàm Semi-ellipsis, sectione Semi-Cylindri facta, in planum expansa. (Quod olim docui in meo *de Cycloide* Tractatu; & in subjunctâ illi Epistola, pag. 99.) Fig. 155.

Quippe si super A α D Semicirculo (fig. 154.) erigatur Semi-cylindrus, altitudinem habens, in D, æqualem ipsi D C; pérque punctum ipsi D (in ea altitudine) imminens, Basisque diametrum A α, transeat Planum (Ungulam Semi-quadrantalem abscindens;) Sectionem illam, Plano secanti & Superficiei Cylindricæ communem, Semi-ellipsem esse constat. Eadem verò abscissæ Ungulæ curva superficies, in planum expansa; est ipsa quam *Figuram Sinuum rectorum* vocamus, A α C. Ipsaque A C α illam terminans, eadem est linea jam in planum expansa, quæ, in Superficie Cylindri, fuerat Semi-ellipsis.

Sin porro, Planum idem (quod Ungulam hanc ex Semi-cylindro abscindit) continuetur per totum Cylindrum, integram Ellipsin sectione perficiens; eaque integra Ellipsis, eodem modo quo hæc semi-ellipsis, expansâ in planum superficie curvâ, expandatur: Continuata curva A C α in A & α, exhibebit (utrinque à C) curvam eam (quam *Ellipsin expansam* pridem nominavimus) quæ *Figuram Sinuum versorum* terminabit. Quod in Tractatu de Cycloide fusiùs ostendimus; quæque in istius Tractatus Fig. 7 & 30. exhibetur; Et in sequentibus ulterius considerabitur, ad prop. 17 hujus.

PROP. XIV.

A,B. Arcûs Circuli, Centrum gravitatis, eſt in Axis ſui eo Puncto, cujus diſtantia à Centro Circuli, eſt ad Radium,
C. ut expoſiti arcûs Chorda, ad Arcum ſuum: Et quidem, in Semiperipheria, ut Circuli Diameter ad Semiperipheriam; ſeu ut Duplum Radii, ad Peripheriæ Semiſſem.

D. (Adeoque; Datâ ratione Chordæ cujuſvis ad Arcum ſuum; datur Arcûs Centrum gravitatis: Et, Dato Arcûs cujuſvis, totâ Peripheriâ minoris, Centro gravitatis; datur Arcûs ad Chordam ſuam ratio: Et, conſequenter, Circuli Quadratura, ſeu ratio Diametri ad Perimetrum.)

E. Eſtque Diſtantia Centri-gravitatis, Superficiei Solidíve, converſione (perfecta vel imperfecta) facti, ab Axe converſionis ſuæ; ad Diſtantiam Centri-gravitatis, correſpondentis Ungulæ (Superficialis Solidæve,) à Plano per ipſius Aciem tranſeunte (rectis in ipſius Curva ſuperficie parallelo;) ut eſt, ad converſionis Ar-
F. cum, Chorda ſua: Et quidem, in Semiconverſione, ut Diameter ad Semiperipheriam; ſeu, ut Duplum Radii, ad Peripheriæ ſemiſſem.

G. Atque hinc habetur, Superficiei Sphæricæ, Zonæ dimidiæ (aliúſve imperfectæ) Centrum gravitatis.

A. Fig. 156. ESto Arcûs circularis B A B, qui non ſit major Semiperipheria; Chorda B B; à cujus extremis punctis B, B, demiſſæ (ad parallelam Diametrum D C D) Perpendiculares ſint B b, B b. Adeoque, ſi circa D C D ut Axem, converti intelligatur D A D ſemiperipheria; quæ à D B deſcribitur portio ſuperficiei Sphæricæ, æqualis erit facto ex b D in Circuli Peripheriam, (atque hoc utrinque;) quæque à

B A B

B A B deſcribitur, æquabitur facto ex b b, hoc eſt B B, in eandem circuli Peripheriam: (per §. G, H, I, prop. præced.) Hoc eſt, ſi Chordæ ſeu Baſis B B magnitudo ponatur c; &, integræ Peripheriæ, P; erit, quæ ab Arcu deſcribitur curva Superficies, cP.

Eſt autem, quæ ab illo Arcu deſcribitur Superficies curva; æqualis facto ab Arcu in Peripheriam Centro gravitatis deſcriptam; per prop. 12 hujus.

Ergo; ſi per magnitudinem Arcûs, ut a, dividatur cP; prodibit $\frac{c}{a}P$ peripheria centro gravitatis deſcripta. Adeoque pro Peripheria P, ſubſtituendo Radium, ut R; erit $\frac{c}{a}R$ (cui æqualis ponatur G) Diſtantia centri gravitatis à D C D diametro.

$$a)\,cP\,(\frac{c}{a}P. \qquad a)\,cR\,(\frac{c}{a}R = G. \qquad a.c :: R.G.$$

Eſt autem, in Arcûs Axe A C; per prop. 3 hujus. Ergo, in illius eo Puncto quod à Diametro D C D, ejúſve puncto C, (circuli centro,) ita diſtat. per prop. 26. Cap. 4. Nempe, ut a ad c, ſic R ad G. Hoc eſt, ut Arcus B A B, ad B B Chordam; ſic C A Radius, ad Centri Gravitatis à Centro Circuli diſtantiam, C G. Quod erat propoſitum.

Exponatur deinde, Arcus circuli Semiperipheriâ major, B α B. Invento, ut priùs, reſidui arcûs B A B centro gravitatis G: erit (propter totius Centrum gravitatis C, per prop. 5 hujus) expoſiti Centrum-gravitatis γ, in G C continuatâ: Atque ut B α B, ad B A B; ſic C G, ad C γ: (per prop. 27. Cap. 4.) ſive, ut $\alpha = P - a$, ad a; ſic $G = \frac{c}{a}R$, ad $\gamma = \left(\frac{a}{\alpha} \times \frac{cR}{a} =\right) \frac{c}{\alpha}R$. Adeoque ut α ad c, ſic R ad γ: Vel ut B α B Arcus, ad chordam ſuam B B; ſic Radius C α, ad C γ, diſtantiam Centri gravitatis arcûs expoſiti, à circuli Centro C. Quod erat propoſitum. B.

$$\alpha . a :: G = \frac{c}{a}R. \quad \gamma = \frac{c}{\alpha}R. \qquad \alpha . c :: R.\gamma.$$

Speciatim verò, in Semiperipheria, (quam ad utrumvis duorum caſuum referamus, perinde eſt;) cum ſit (propter $c = D$,) $cP = DP$; ſi C.

ſi hoc per Arcum $a = \alpha = \frac{1}{2} P$ dividatur; erit $\frac{1}{2}$P) D P (2 D peripheria Centro gravitatis deſcripta, cujus itaque Radius $\frac{2D}{P} R$, hoc eſt, $\frac{4R^2}{P}$, eſt Centri Gravitatis à Circuli Centro diſtantia; $CG = G = \frac{4R^2}{P}$.

$$a \cdot \epsilon :: \tfrac{1}{2} P. \ D = 2R :: R. \ G = \frac{4R}{P} R = \frac{4R^2}{P}.$$

D. Corollarium item patet. Cum enim eadem ſit ratio Arcus B A B ad B B chordam ſuam, quæ eſt Radii C A ad C G diſtantiam centri gravitatis in ipſa C A: Datâ rationum unâ, datur alterâ. Datâ verò unius Arcûs (cujus ratio ad totam Peripheriam nota intelligatur) ad Chordam ſuam ratione; dabitur ejuſdem, adeoque totius Peripheriæ, ad aliam quamvis Chordam, adeóque ad Diametrum ipſam.

E. Item illud de Ungulis, Solidíſque aut Superficiebus converſione
Fig.157. factis, ſimiliter patet. Si enim Superficiei Solidíve b d d b (converſione Lineæ Planíve B D facti) ſinguli Arcus b B b, d D d, (plano XBD biſecti) extendi intelligantur in totidem ſibi æquales rectas βBβ, δDδ, eiſdem plani X B D punctis ad angulos rectos inſiſtentes, atque ab eodem biſectas, (æqualem Ungulam, vel ex duabus compoſitam, complentes; per prop. 12 hujus:) Rectarum Centra Gravitatis in ipſis B, D, punctis conſtituta, ab axe converſionis X diſtabunt, reſpectivorum arcuum Semidiametris X B, X D. Ipſorum vero Arcuum ſingulorum (Rectis æqualium, & invicem ſimilium,) Centra gravitatis (propter curvationem) in eâdem ratione omnia (propter arcus ſimiles) propius admoventur ad converſionis Axem X; atque in eâdem ratione minuitur Momentum (reſpectu ejuſdem X axis) ſingulorum, adeóque & ſimul omnium; &, propterea, communis omnium Centri gravitatis diſtantia. Nempe (per modò demonſtrata) ut Arcuum unus quilibet b B b, ad b b Chordam ſuam; ſic Diſtantia Centri gravitatis, adeoque Momentum, tum ſingularum, tum ſimul omnium, Rectarum ββ, δδ, &c. Ungulam complentium; ad Diſtantiam centri gravitatis, & momentum, tum ſingulorum reſpectivè, tum ſimul omnium, Arcuum b B b, d D d, &c. (Superficiem Solidúmve converſione circa X factum, complentium,) ab eodem X converſionis Axe.

Axe. Putà, ut Arcus a, ad Chordam c; sic X G distantia illa, ad distantiam hanc Xγ. Quod item demonstrandum erat.

Hoc est; In Semi-conversione; ut $\frac{1}{2}P$ ad $2R$; seu ut P ad $4R$. F.

Porro: Cum ostensum sit (ad §. K. prop. præced.) In portione G. Sphæricæ Superficiei integræ, parallelis planis interjecta (quam *Zonam integram* appello,) putà, quæ Arcus E G circa B F conversione Fig. 154. integrâ describitur; Centrum gravitatis esse in Axe medio, (putà, in rectæ B F puncto medio:) Adeóque in *Zonis imperfectis*, (puta, quæ conversione dimidiatâ, aliâve imperfectâ, describuntur,) & correspondentibus Ungulis; Centrum Gravitatis in eo plano esse, quod tantundem distet à plano Sphæram in α tangente, seu, quod medium est inter B & F axi rectum:

Sítque (per prop. 12 hujus) in illo plano quod (per conversionis Axem vel Ungulæ Aciem A α incedens) bisecat, in superficie Ungulari, erectas omnes rectas illam constituentes; in Sphærali, omnes Arcus conversione factos: Quippe, in quo Plano sunt Omnium Centra gravitatis, in eodem est commune omnium. (Quod autem rectarum illarum unam bisecat, bisecat omnes; Arcuúmque unum bisecans, omnes bisecat: propter similia illic Triangula, hic Arcus similes; ob eundem Inclinationis Angulum ad Aciem vel Axem A α:) Adeoque in duorum illorum Planorum communi sectione:

Quò ipsum Centrum determinetur (in Ungulis hisce, & Zonis imperfectis,) Quærenda erit etiam ejusdem (in hoc plano per Axem transeunte) distantia ab Acie vel Axe A α. Quod sic habetur.

Intelligatur Arcui cuivis, ut E G, insistens Semiquadrantalis Ungulæ (aciem habentis B F) superficies Curva: Cujus singulas rectas arcui insistentes (superficiem curvam complentes) æquales esse respectivis Sinibus rectis (ad §. Q. prop. præced.) ostensum est; (adeoque superficiem illam Summæ Sinuum æqualem; hoc est, facto ex Altitudine B F, quam l dicamus, in Radium ductæ; hoc est, lR; per §. N. prop. præced.) Sed earundem distantiæ à perpendiculari plano per axem BF, sunt item iidem Sinus recti. Momenta itaque singularum (magnitudine in distantiam ductâ) sunt ut Sinuum Quadrata. Adeoque omnium Momenta (respectu rectæ B F) ut *omnia* s^2, summa Quadratorum Sinuum. Hoc est (per §. V. ejusdem) ut spatium E B F G in Radium ductum. Quod quidem spacium E B F G (cum satis innotescat) dicamus k^2; adeóque $k^2 R$ est Momentum expositæ superficiei curvæ Ungularis, respectu rectæ B F. Atque hoc Momentum

per

per Magnitudinem lR divisum; exhibet $\frac{k^2 R}{lR} = \frac{k^2}{l}$ distantiam Centri gravitatis à perpendiculari Plano super A α erecto.

Cúmque eadem sit ratio (hoc respectu) Ungularum cujuscunque sint Altitudinis; (utcunque enim auctâ Altitudine, adeoque & Magnitudine, & Momento; putà, in ratione P ad R; erit adhuc eadem distantia; $\frac{k^2 P}{lP} = \frac{k^2 R}{lR} = \frac{k^2}{l}$:) Erit cujuscunque Superficiei Ungularis, super Arcum Circuli erectæ, (Aciem habentis, Circuli Diametrum A α,) Distantia Centri gravitatis à perpendiculari plano per ipsam A α, $\frac{k^2}{l}$; hoc est, quæ oritur ex plano EBFG ad rectam BF applicato.

Eademque esset, (demptâ curvitate, quæ conversione oritur,) in Superficie conversione factâ, à conversionis Axe distantia; (propter singulos Arcus in hac, singulis in correspondentis Ungulæ superficie curva respectivis rectis, æquales; atque in eadem à conversionis Axe Distantia, qua sunt illæ à parallelo Plano per Aciem suam.) Sed, propter curvaturam conversione factam; minuenda est ea Distantia, pro Ratione quam habet Conversionis Arcus ad Chordam suam; ut jam ostensum est. Putà; in Semiconversione, ut Semiperipheria $\frac{1}{2}P$, ad Diametrum $2R$; in conversione Quadrantali, ut $\frac{1}{4}P$ ad $R\sqrt{2}$: Et, universaliter, ut Arcus a vel m, ad Chordam suam c vel n; sic distantia in Ungulâ (jam ostensa) $\frac{k^2}{l}$, ad $\frac{k^2 c}{la}$ vel $\frac{k^2 m}{ln}$ distantiam Centri gravitatis Zonæ imperfectæ, à conversionis Axe.

Sed & in duorum Planorum, priùs memoratorum, communi sectione reperiri, suprà ostensum est: Ergo, in hujus sectionis eo Puncto quæ sic (ut dictum est) distat. Datur igitur, tum in Ungulâ, tum in Zonâ utut imperfectâ, ipsum Gravitatis Centrum. Quod erat ultimò ostendendum.

PROP.

PROP. XV.

Sectoris Circuli (duobus Radiis & Arcu comprehensi) Centrum gravitatis est in Axis sui illo puncto, cujus à Centro Circuli distantia, est ad duos Trientes Radii, ut expositi Arcûs Chorda, ad Arcum suum. A. Fig. 158.

Adeoque, in Semicirculo; Ut Semiperipheria ad Diametrum, sic $\frac{2}{3}$ Radii ad distantiam Centri gravitatis Semicirculi à Circuli Centro.

Atque hinc etiam Segmenti circularis (recta abscissi) Centrum gravitatis colligitur: Atque de aliis Portionibus similiter. Cæteraque quæ hinc dependent. B.

Nempe; Si ponatur, in exposito circulo, Radius C A vel C B $= R$; Peripheria integra, P; Arcus B A $= a$, adeoque B A B $= 2a$; Chorda B A $= c$; Sinus rectus B V $= s$, adeoque Chorda B B $= 2s$: Sinus versus A V $= v$, reliquúsque V $\alpha = 2R - v = h$; à Centro Distantia V C $= x = R - v$ si V sit supra Centrum, vel V C $= x = v - R$ si infra, vel V C $= x = 0$ si in Centro: Item $a - s = e$; $a + s = f$; $R + v = z$. C. Fig. 159, 160.

Erit, totius Semicirculi A D α, Magnitudo, $\frac{1}{4} RP$: centrique gravitatis, sive à $\tau\alpha$, sive à T A, distantia, R; Momentum respectu $\tau\alpha$, vel T A, $\frac{1}{4} R^2 P$: Distantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{8R^2}{3P}$; Momentum respectu A α, $\frac{2}{3} R^3$. D. I. Q.

Sectoris B C A magnitudo $\frac{1}{2} aR$: Centri gravitatis distantia a D C, $\frac{2s}{3a} R$; à $\tau\alpha$, $R + \frac{2s}{3a} R$; à T A, $R - \frac{2s}{3a} R$; Momentum ejus, respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2} aR^2 + \frac{1}{3} sR^2$; momentum ejusdem respectu T A, $\frac{1}{2} aR^2 - \frac{1}{3} sR^2$: D, I.

Centri

Q.W. Centri gravitatis diſtantia ab $A\alpha$, $\frac{2vR}{3a}$; Momentum reſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{3}vR^2$.

E. K. Trianguli B C V, magnitudo $\frac{1}{2}sx$: Diſtantia Centri gravitatis à D C, $\frac{2}{3}x$; à $\tau\alpha$, $R \pm \frac{2}{3}x = \frac{5}{3}R - \frac{2}{3}v$; à T A, $R \mp \frac{2}{3}x = \frac{1}{3}R + \frac{2}{3}v$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}sxR \pm \frac{1}{3}sx^2 = \frac{5R - 2v}{6}sx$; reſpectu T A, $\frac{1}{2}sxR \mp \frac{1}{3}sx^2 = \frac{R+2v}{6}sx$. Diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{3}s$;

R.T. Momentum reſpectu $A\alpha$ $\frac{1}{6}s^2x$:

Semiſegmenti B V A, magnitudo $\frac{1}{2}eR + \frac{1}{2}sv$: Momen-

F. L. tum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}svR + \frac{1}{3}s^3$; reſpectu T A, $\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}svR - \frac{1}{3}s^3$: Diſtantia centri gravitatis a $\tau\alpha$, $R + \frac{2s^3}{3eR+3sv}$; a TA, $R - \frac{2s^3}{3eR+3sv}$; a D C, $\frac{2s^3}{3eR+3sv}$; a B V, $\frac{2s^3}{3eR+3sv} - R + v$; momentum reſpectu B V, $-\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}avR - \frac{1}{6}s^3$: Momentum reſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2v$

R.T.V. $= \frac{1}{6}v^2R + \frac{1}{6}s^2v$; diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{vR+s^2}{3eR+3sv}v$.

Trianguli B A V, magnitudo $\frac{1}{2}sv$: Diſtantia Centri gra-

F. N. vitatis a T A, $\frac{2}{3}v$; a $\tau\alpha$, $2R - \frac{2}{3}v$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $svR - \frac{1}{3}sv^2$; reſpectu T A, $\frac{1}{3}sv^2$: Diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{3}s$; Momentum

R. reſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{6}s^2v$.

Segmenti A B A, magnitudo $\frac{1}{2}eR$. Momentum reſpectu

G. N. $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{6}svR$; reſpectu T A, $\frac{1}{2}eR^2 - \frac{1}{6}svR$; diſtantia Centri gravitatis a D C, $\frac{sv}{3e}$; a $\tau\alpha$, $R + \frac{sv}{3e}$;

Q. a TA, $R - \frac{sv}{3e}$: Momentum reſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{6}v^2R$: diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{v^2}{3e}$.

Et

Et ſimiliter de ſegmento α B α, mutatis mutandis.

Trianguli B C α, magnitudo $\frac{1}{2} s R$: Centri gravitatis diſtantia a $\tau\alpha$, $R - \frac{1}{3}v$; a T A, $R + \frac{1}{3}v$; infra D C, $\frac{1}{3}v$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}svR$; reſpectu T A, $\frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{6}svR$: Diſtantia centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{3}s$; momentum reſpectu A α, $\frac{1}{6}s^2R$. H.M. S.T.

Trianguli B V α, magnitudo $\frac{1}{2}sh$: Diſtantia centri gravitatis a $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}h$; a T A, $2R - \frac{2}{3}h$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}sh^2$; reſpectu T A, $shR - \frac{1}{3}sh^2$: Diſtantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{3}s$; momentum reſpectu A α, $\frac{1}{6}s^2h$. H.M. S.T.

Sectoris B α A, magnitudo $\frac{1}{2}fR$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}fR^2 + \frac{1}{6}shR$; reſpectu T A, $\frac{1}{2}fR^2 - \frac{1}{6}shR$; diſtantia centri gravitatis a $\tau\alpha$, $R + \frac{sh}{3f}$; a T A, $R - \frac{sh}{3f}$; a D C, $\frac{sh}{3f}$: Momentum reſpectu A α, $\frac{1}{3}vR^2 + \frac{1}{6}s^2R$; Centri gravitatis inde diſtantia, $\frac{2vR + s^2}{3f}$. H.M. S.

Momenta autem eadem ſunt ubique & Semiquadrantales Ungulæ: Solidaque reſpectiva integrâ converſione facta, ſunt ad Ungulas illas, ut P ad R; & Semiſolida, eorum Semiſſes; quod & proportionaliter intelligendum eſt de Solidis aliis imperfectâ converſione factis. O.

Quæque de Momentis & Solidis reſpectu rectarum T A, $\tau\alpha$, D C, B V, dicta ſunt; facile transferentur ad alias rectas hiſce parallelas: Et, quæ reſpectu A α, ad alias huic parallelas: Aut (propter ipſa Centra gravitatis Planorum data) ad alias etiam rectas transferentur. O.P.X.

Quæque de Circulo dicta ſunt, ejúſque Portionibus; eadem Ellipſi, & portionibus hujus, facile accommodantur. Y.

INtelligatur Circuli Sector C B A B, vel C B α B, (major, minor, an æqualis Semicirculo, perinde eſt:) ex infinitis numero Sectoribus componi: Sive, quod (propter infinitatem) eodem recidit, ex A. Fig. 158.

 totidem

totidem triangulis, invicem æqualibus; (quorum communis vertex sit C Centrum:) per def. 1. Cap. 4. Quæ totidem rectis (ut eorundem Triangulorum Axibus) repræsententur, ut C B. Cúmque (per prop. 6 hujus) Centrum gravitatis in Triangulo, Altitudinis Triente a Base distet, (sive, à parallelo plano per Verticem, duobus Trientibus;) Si Radio C b $= \frac{2}{3}$ C B, describatur peripheria b b, (expositæ B B similis, & similiter posita) transibit hæc per Triangulorum singulorum Centra gravitatis. Cujus itaque cum singula puncta (æqualibus ab invicem distantiis remota) æqualiter onerentur (æqualibus utique Triangulis, quorum Centra gravitatis sustinere intelligantur:) idem erit arcûs b b sic onusti Centrum gravitatis, atque ipsius Sectoris B C B, per 16 Cap. 4. Facto itaque; ut chorda b b ad arcum suum, hoc est, ut Chorda B B ad arcum suum; sic C G, ad radium C b, hoc est, ad $\frac{2}{3}$ C B: (Hoc est, C G $= \frac{2}{3} \frac{s}{a} R$:) Erit G Centrum gravitatis Arcus b b, (per prop. præced.) adeoque & (per jam demonstrata) Sectoris B C B. Quod demonstrandum erat.

Hoc est, speciatim in Semicirculo; Ut Semiperipheria $\frac{1}{2} P$; ad Chordam suam, hoc est, ad Circuli Diametrum, $2 R$: sic duo Trientes Radii, $\frac{2}{3} R$; ad $\frac{8 R^2}{3 P}$ = C G, distantiam Centri gravitatis Semicirculi (in axe suo positi) à Circuli Centro C.

B. Corollarium, de Circuli Segmento; constat ex 27 Cap. 4. Quippe cognitis tum magnitudine, tum Centro gravitatis, Sectoris C B A B, vel C B α B, & Trianguli B B C: Cognoscitur inde tum Magnitudo tum Centrum gravitatis Segmenti B B A, vel B B α.

Idemque in aliis Circuli portionibus ostendetur.

C. Exempli gratia. In exposito Circulo, sit Radius C A (vel C B) $= R$: Integra Peripheria, P: Arcus B A $= a$: Adeoque B A B $= 2a$: Chorda B A $= c$: Sinus rectus B V $= s$; adeoque Chorda B B $= 2s$: Hujusque ab A vertice distantia, (hoc est, Segmenti B B A altitudo, vel expositi arcus B A sinus versus) V A $= v$: ejúsque Altitudo seu distantia à base, V α $= 2R - v = b$; ejusque à Centro C distantia V C $= x$. (eritque $x = R - v$, si V sit supra Centrum C, adeoque BAB minor quam Semiperipheria; vel $x = v - R$, si V sit infra Centrum, adeoque B A B major quam Semiperipheria; vel denique $x = 0$, si V sit in Centro, adeoque BAB Semiperipheria:) Item $a - s = e$; $a + s = f$; $R + v = z$.

Fig. 159, 160.

D. Est itaque Sectoris B C B A magnitudo $a R$, (nempe $\frac{1}{2}$BAB×CA,

per

per prop. 12 hujus;) ejusque Semissis BCA, $\frac{1}{2}aR$. Et, speciatim, totius Semicirculi, (propter $a=\frac{1}{2}P$,) $\frac{1}{4}RP$. Fig. 159, 160.

Item Trianguli BBC magnitudo $\frac{1}{2}$ BB × CV (per prop. 6 hujus;) E.
hoc est sx: (Nempe, $sR-sv$, si V fuerit supra Centrum; vel $sv-sR$, si infra:) Adeoque BCV $=\frac{1}{2}sx$: Hoc est, $\frac{1}{2}sR-\frac{1}{2}sv$, si supra; vel $\frac{1}{2}sv-\frac{1}{2}sR$, si infra.

Adeoque, Si à Sectore BCBA $=aR$, Auferatur Triangulum F.
BBC $=sR-sv$; vel Addatur Triangulum BBC $=sv-sR$; (prout fuerit V supra infrave Centrum:) utrovis casu habetur Segmentum BBA $=(aR\mp sx=)\ aR-sR+sv=eR+sv$. Adeoque BVA $=\frac{1}{2}aR\mp\frac{1}{2}sx=\frac{1}{2}aR-\frac{1}{2}sR+\frac{1}{2}sv=\frac{1}{2}eR+\frac{1}{2}sv$.

Hoc est: Si inscripto (in Circuli Segmento) Triangulo æquialto ABB ($=sv$) addatur Triangulum aliud ($aR-sR=eR$) cujus nempe Basis sit æqualis Circuli Radio ($=R$) & Altitudo ($=2a-2s=2e$) æqualis excessui Arcûs supra subtensam: Habetur Segmenti BBA magnitudo; $aR-sR+sv=eR+sv$. Ejusque Semissis, Semisegmentum BVA $=\frac{1}{2}aR-\frac{1}{2}sR+\frac{1}{2}sv=\frac{1}{2}eR+\frac{1}{2}sv$.

Adeoque, duo simul Segmenta abscissa AB, AB, (quæ, cum G.
inscripto Triangulo, complent Segmentum BBA,) æquant $aR-sR=eR$, & eorum utrumvis $\frac{1}{2}aR-\frac{1}{2}sR=\frac{1}{2}eR$.

Hoc est; Si ($a-s=e$) excessus Arcus BA supra suum Sinum rectum BV, ducatur in ($\frac{1}{2}R$) Semissem Radii: Habetur magnitudo Segmenti BA; $=\frac{1}{2}aR-\frac{1}{2}sR=\frac{1}{2}eR$.

Si verò Segmento BBA ($=eR+sv$,) adjiciatur Triangulum H.
BBα ($=hs$:) Habetur Sector BαBA (angulum habens BαB in peripheria, & BAB arcum,) $eR+sv+sh$; hoc est (propter $v+h=2R$,) $eR+2sR$; vel (propter $e=a-s$,) $aR+sR=fR$. Adeoque BαA $=\frac{1}{2}aR+\frac{1}{2}sR=\frac{1}{2}fR$.

(Idem proveniret, si Sectori BCBA $=aR$, adderentur duo Triangula BCα, BCα; quorum communis Basis est C$\alpha=R$, & utriusvis Altitudo BC $=s$: adeoque simul utraque sR. Hoc est, BαBA $=aR+sR=fR$: Et BαA $=\frac{1}{2}aR+\frac{1}{2}sR=\frac{1}{2}fR$.)

Hoc est; Si ($a+s=f$) aggregatum Arcus BA, & Sinus Recti BV; ducatur in Semissem Radii ($=\frac{1}{2}R$:) Habetur Sector BαA $=\frac{1}{2}aR+\frac{1}{2}sR=\frac{1}{2}fR$.

Similiter de Centro Gravitatis procedendum. I.

Nempe, (per jam demonstrata ad hanc propositionem § A,) Sectoris BCBA (sive Semicirculo major sit, sive minor, sive ipsi æqualis) Centrum gravitatis est in CA rectâ, supra Centrum C, quantum est

Fig. 159, 160. $\frac{2s}{3a}R$. Nempe eâ ratione ad $\frac{2}{3}R$, quæ est Chordæ $BB = 2s$, ad arcum $BAB = 2a$; sive ut s ad a:) Adeoque illius, à puncto α, seu $\tau\alpha$ tangente, distantia est $R + \frac{2s}{3a}R = \frac{3a+2s}{3a}R$. Adeoque à TA (tangente verticis) $R - \frac{2s}{3a}R = \frac{3a-2s}{3a}R$. Eademque est, ab eisdem $\tau\alpha$, TA, distantia Centri gravitatis semisectoris BCA; Propter dimidias BV & huic parallelas semisectorem complentibus, totis BB & huic parallelis complentibus Sectorem integrum, proportionales, & in eisdem cum illis distantiis sive à $\tau\alpha$, sive à TA. (Quod & similiter intelligendum erit de Semi-conis, Semi-segmentis, &c. quorum Centra gravitatis sive à Basis plano, sive à Plano verticis basi parallelo, tantundem distant, quantum inde distant Centra gravitatis integrorum suorum sive Conorum, sive Segmentorum, &c. Quod semel monitum esto, ne opus sit idem sæpius repetere.) Et, speciatim, Semicirculi ADα, Centri gravitatis (utpote in DC jacentis) distantia sive à $\tau\alpha$, sive à TA, est $R = C\alpha = CA$.

Adeoque (propter magnitudinem Sectoris $BCBA = aR$, & $BCA = \frac{1}{2}aR$,) Momentum (respectu rectæ $\tau\alpha$ ut Axis Libræ) Sectoris BCBA, est $\frac{3a+2s}{3}R^2$, (magnitudine scilicet in distantiam ductâ;) & Semisectoris BCA, $\frac{3a+2s}{6}R^2$. Et, respectu rectæ TA, Momentum Sectoris BCBA, est $\frac{3a-2s}{3}R^2$, & ipsius BCA, $\frac{3a-2s}{6}R^2$. Et speciatim, totius Semicirculi ADα, momentum sive respectu $\tau\alpha$, sive respectu TA, (propter $a = \frac{1}{2}P$, & $s = 0$,) est $\frac{1}{4}R^2P$.

K. Estque (per 5 & 6 hujus) Trianguli BBC, Centrum gravitatis in CV, ejusque à C Centro distantia $\frac{2}{3}CV = \frac{2}{3}x$. Adeoque à $\tau\alpha$, $R \pm \frac{2}{3}x$; prout infra suprave Centrum fuerit; (nempe $R + \frac{2}{3}x$ si supra; $R - \frac{2}{3}x$ si infra Centrum;) Hoc est (propter $x = R - v$ si supra Centrum, & $x = v - R$ si infra Centrum,) utroque casu, $\frac{5}{3}R - \frac{2}{3}v$. Adeoque ejusdem à TA distantia, $R \mp \frac{2}{3}x = \frac{1}{3}R + \frac{2}{3}v$.

Est autem (ut supra, § E,) magnitudo Trianguli $BBC = sx$; (hoc est, $sR - sv$ si supra, vel $sv - sR$ si infra Centrum.)

Quod ductum in Centri gravitatis distantiam à $\tau\alpha$, $R \pm \frac{2}{3}x = \frac{5}{3}R - \frac{2}{3}v$; exhibet ejusdem, respectu rectæ $\tau\alpha$, momentum $sxR \pm \frac{2}{3}sx^2 =$

$= \frac{5R - 2v}{3} sx$; Hoc est $\frac{5sR^2 - 7svR + 2sv^2}{3}$, vel $\frac{-5R^2 + 7svR - 2sv^2}{3}$; Fig. 159, 160.
prout supra infrave fuerit.

Idemque ductum in ejusdem à T A distantiam, $R \mp \frac{2}{3}x = \frac{1}{3}R + \frac{2}{3}v$; exhibet ejusdem B B C Trianguli momentum respectu rectæ T A, $sxR \mp \frac{2}{3}sx^2$; hoc est $\frac{sR^2 + svR - 2sv^2}{3}$ vel $\frac{-sR^2 - svR + 2sv^2}{3}$, prout supra infrave Centrum fuerit.

Aut etiam (propter A α, A B, A V; hoc est $2R, c, v$; continue proportionales: adeoque $2vR = c^2 = s^2 + v^2$:) Illic quidem $\frac{5sR^2 - 3svR - 2s^3}{3}$, vel $\frac{-5sR^2 + 3svR + 2s^3}{3}$: Hic vero $\frac{sR^2 - 3svR + 2s^3}{3}$, vel $\frac{-sR^2 + 3svR - 2s^3}{3}$; prout supra infrave Centrum fuerit hoc Triangulum.

(Atque hic monendum duxi; quod oppidò notandum velim, ne sit opus idem sæpius repetere: Hanc reductionem in sequentibus sæpissime occurrere. Nempe, propter $2vR = c^2 = s^2 + v^2$; quoties occurrit c^2 vel v^2; pro c^2 substitui $2vR$; &, pro v^2, substitui $c^2 - s^2$, hoc est $2vR - s^2$. Omnino enim expedire compertum habeo, ut unam aliquam formam designandi eandem quantitatem adhiberem; ad quam æquipollentes aliæ reducantur quum opus fuerit; ne symbolorum varietas confusionem pareret. Quod memineris velim, ne, in reductionibus à nobis subinde crebrò faciendis, aliquando hæreas.)

Atque hoc Trianguli Momentum, respective Subtractum Additumve, (prout supra Centrum infrave fuerit,) Momento Sectoris BCBA, (nempe, $aR^2 + \frac{2}{3}sR^2$ respectu rectæ $\tau\alpha$, & $aR^2 - \frac{2}{3}sR^2$ respectu rectæ T A,) exhibet (utroque casu) Momentum Segmenti B B A respectu rectæ $\tau\alpha$, $aR^2 - sR^2 + svR + \frac{2}{3}s^3 = eR^2 + svR + \frac{2}{3}s^3$; & semisegmenti BVA, $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{2}svR + \frac{1}{3}s^3 = \frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}svR + \frac{1}{3}s^3$: Et, respectu rectæ T A, Momentum Segmenti B B A, $aR^2 - sR^2 + svR - \frac{2}{3}s^3 = eR^2 + svR - \frac{2}{3}s^3$; & semisegmenti B V A, $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{2}svR - \frac{1}{3}s^3 = \frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}svR - \frac{1}{3}s^3$. L.

Quæ quidem momenta, per magnitudinem segmenti B B A $= eR + sv$, aut semisegmenti B V A $= \frac{1}{2}eR + \frac{1}{2}sv$, (respective,) divisa: exhibent Segmenti, aut Semisegmenti, distantiam à $\tau\alpha$ $R + \frac{2s^3}{3eR + 3sv}$: Atque à T A, $R - \frac{2s^3}{3eR + 3sv}$: Adeoque illius altitudinem supra Centrum C, aut C D rectam, $\frac{2s^3}{3eR + 3sv}$, hoc est $\frac{2s^3}{3aR - 3sR + 3sv}$: Et supra rectam BB, seu BV,

$2s^3$

Fig. 159, 160. $\frac{2s^3}{3eR+3sv} - R + v = \frac{2s^3}{3aR-3sR+3sv} - R + v.$

Atque hæc demum, à BV, distantia; in magnitudinem ducta, exhibet momentum, respectu rectæ B V, Segmenti B B A, $\frac{2}{3}s^3 - aR^2 + sR^2 + avR - {}^2svR + sv^2 = -eR^2 + avR - \frac{1}{3}s^3$. Et semisegmenti B V A, $-\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}avR - \frac{1}{6}s^3. = \mp\frac{1}{2}exR + \frac{1}{6}szv.$

M. Deinde, Trianguli B B α, aut B V α, distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, est $\frac{2}{3}h = \frac{4}{3}R - \frac{2}{3}v$: adeoque à T A, $2R - \frac{2}{3}h = \frac{2}{3}R + \frac{2}{3}v$. Quæ in magnitudines $(sh, \frac{1}{2}sh,)$ ducta; exhibet Trianguli B B α, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}sh^2 = \frac{8}{3}sR^2 - \frac{8}{3}svR + \frac{2}{3}sv^2 = \frac{8}{3}sR^2 - \frac{4}{3}svR - \frac{2}{3}s^3$; &, respectu T A, $2shR - \frac{2}{3}sh^2 = \frac{4}{3}sR^2 + \frac{2}{3}svR - \frac{2}{3}sv^2 = \frac{4}{3}sR^2 - \frac{2}{3}svR + \frac{2}{3}s^3$, & Trianguli BV$\alpha$, momentum respectu rectæ $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}sh^2 = \frac{4}{3}sR^2 - \frac{2}{3}svR - \frac{1}{3}s^3$; &, respectu rectæ TA, $shR - \frac{1}{3}sh^2 = \frac{2}{3}sR^2 - \frac{1}{3}svR + \frac{1}{3}s^3$.

Quæ quidem momenta, addita respectivis momentis Segmenti B B A, & Semisegmenti B V A, (§ L inventis) exhibent Sectorum B α B A, B α A, momenta respectu earundem $\tau\alpha$, T A. Nempe, Sectoris B α B A momentum respectu $\tau\alpha$, $aR^2 + \frac{5}{3}sR^2 - \frac{1}{3}svR = fR^2 + \frac{1}{3}shR$; & respectu rectæ T A, $aR^2 + \frac{1}{3}sR^2 + \frac{1}{3}svR = fR^2 - \frac{1}{3}shR$: Et Sectoris B α A, momentum respectu rectæ $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}fR^2 + \frac{1}{6}shR$; & respectu T A, $\frac{1}{2}fR^2 - \frac{1}{6}shR$.

Eodem modo; Trianguli B C α, Centrum gravitatis est in recta $\alpha\beta$, quæ à puncto α ad medium rectæ B C ducitur, ejusdem $\alpha\beta$ duas tertias versus α abscindens. Est autem ipsius medii puncti β, eadem altitudo supra $\tau\alpha$, quam habet rectæ C V medium punctum γ; nempe $\alpha\gamma = R \pm \frac{1}{2}x$ (prout supra infrave Centrum fuerit V punctum;) hoc est, (utroque casu) $\alpha\gamma = \frac{3}{2}R - \frac{1}{2}v$. Adeoque distantia Centri gravitatis Trianguli B C α, à $\tau\alpha$ est $\frac{2}{3}\alpha\gamma = R - \frac{1}{3}v$; atque à T A, $R + \frac{1}{3}v$.

Adeoque (propter magnitudinem Trianguli unius B C $\alpha = \frac{1}{2}sR$, & simul amborum 2 B C $\alpha = sR$,) erit unius momentum respectu rectæ $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}svR$, & simul utriusque $sR^2 - \frac{1}{3}svR$: Et, respectu rectæ T A, momentum unius $\frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{6}svR$; & simul utriusque $sR^2 + \frac{1}{3}svR$.

Quæ quidem addita momentis Sectorum B C A, & B C B A, nempe $\frac{1}{2}aR^2 \pm \frac{1}{3}sR^2$, & $aR^2 \pm \frac{2}{3}sR^2$ (per § I.) exhibent momentum, respectu rectæ $\tau\alpha$, Sectoris B α A, $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{5}{6}sR^2 - \frac{1}{6}svR = \frac{1}{2}fR^2 + \frac{1}{6}shR$; & sectoris B α B A, $fR^2 + \frac{1}{3}shR$: Et respectu rectæ TA, momentum Sectoris BαA, $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{6}sR^2 + \frac{1}{6}svR = \frac{1}{2}fR^2 - \frac{1}{6}shR$; & Sectoris B α B A, momentum $fR^2 - \frac{1}{3}shR$, ut prius.

Atque hæc demum momenta, per ſuas reſpective planorum magnitudines ($\frac{1}{2}fR$, fR,) diviſa; exhibent utriuſvis Sectoris BαA, BαBA, Centri gravitatis diſtantiam à $\tau\alpha$, $R+\frac{sh}{3f}$; & à TA, $R-\frac{sh}{3f}$; Adeoque altitudinem ejus ſupra Centrum C, vel CD rectam, $\frac{sh}{3f}=\frac{2sR-sv}{3a+3s}$. Fig. 159, 160.

Similiter, Trianguli A B V, magnitudo, eſt $\frac{1}{2}sv$; diſtantia centri gravitatis à TA, eſt $\frac{2}{3}v$; adeoque, à $\tau\alpha$, $2R-\frac{2}{3}v$; & propterea ejuſdem momentum reſpectu $\tau\alpha$, $svR-\frac{1}{3}sv^2=\frac{1}{3}svR+\frac{1}{3}s^3$: &, reſpectu T A, $\frac{1}{3}sv^2=\frac{2}{3}svR-\frac{1}{3}s^3$. N.

Quæ quidem momenta, ſubducta ex reſpectivis momentis Semiſegmenti BVA, (nempe, $\frac{1}{2}aR^2-\frac{1}{2}sR^2+\frac{1}{2}svR\pm\frac{1}{3}s^3$, per § L.) relinquit Segmenti A B A momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}aR^2-\frac{1}{2}sR^2+\frac{1}{6}svR=\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{6}svR$; &, reſpectu T A, $\frac{1}{2}aR^2-\frac{1}{2}sR^2-\frac{1}{6}svR=\frac{1}{2}eR^2-\frac{1}{6}svR$.

Atque hæc momenta, diviſa per ſectoris A B A magnitudinem, $\frac{1}{2}eR$ (per § G.) exhibent diſtantiam Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $R+\frac{sv}{3e}$; & à T A, $R-\frac{sv}{3e}$; adeoque ſupra D C, $\frac{sv}{3e}=\frac{sv}{3a-3s}$.

Pariter, de Segmento αBα judicandum; puta, pro arcu A B $=a$, ſubſtituendo arcum reliquum ad Semicirculum α B $=\alpha=\frac{1}{2}P-a$: & pro ſinu verſo A V $=v$, ſubſtituendo α V $=h=2R-v$; item pro T A tangente contermino arcui A B, ſubſtituendo $\tau\alpha$ tangentem conterminum ipſi α B; &, vice verſa, T A pro $\tau\alpha$. Quippe ſic momentum Segmenti αBα, reſpectu Tangentis oppoſiti T A, erit $\frac{1}{2}\alpha R^2-\frac{1}{2}sR^2+\frac{1}{6}shR$; &, reſpectu Tangentis contermini $\tau\alpha$, erit $\frac{1}{2}\alpha R^2-\frac{1}{2}sR^2-\frac{1}{6}shR$.

Aut etiam, ex $\frac{1}{4}PR^2$ momento totius Semicirculi A D α, reſpectu Tangentis utriuſvis $\tau\alpha$ vel T A, auferendo $\frac{1}{2}aR^2+\frac{5}{6}sR^2-\frac{1}{6}svR$ momentum ſectoris BαA reſpectu ipſius $\tau\alpha$ (per § M.) habetur reſidui ad ſemicirculum Segmenti αBα reſpectu ejuſdem $\tau\alpha$ momentum $\frac{1}{4}PR^2-\frac{1}{2}aR^2-\frac{5}{6}sR^2+\frac{1}{6}svR$; hoc eſt (propter $\frac{1}{2}P-a=\alpha$, & $v=2R-h$,) $\frac{1}{2}\alpha R^2-\frac{1}{2}sR^2-\frac{1}{6}shR$: Atque ſimiliter inde ſubducendo ejuſdem BαA ſectoris momentum reſpectu T A, $\frac{1}{2}aR^2+\frac{1}{6}sR^2+\frac{1}{6}svR$; habetur ſegmenti αBα, reſpectu ejuſdem T A, momentum $\frac{1}{4}PR^2-\frac{1}{2}aR^2-\frac{1}{6}sR^2-\frac{1}{6}svR$; hoc eſt (propter $\frac{1}{2}P-a=\alpha$, & $v=2R-h$,) $\frac{1}{2}\alpha R^2-\frac{1}{2}sR^2+\frac{1}{6}shR$. ut prius.

Et

O. Et ſimili ratione, mutatis mutandis, eorundem expoſitorum om-
Fig. 159, 160. nium Planorum momenta reſpectu alius rectæ ipſis $\tau\alpha$, T A, B V, parallelæ; cujus diſtantia infra vel ſupra harum aliquam datur.

Quodque de horum Planorum Momentis reſpectu rectarum $\tau\alpha$, T A, B V, aut hiſce parallelarum, dictum eſt; pariter intelligendum eſt de Ungulis ſuper eadem plana erectis, quæ plano abſcindantur per eaſdem reſpective $\tau\alpha$, T A, B V, vel hiſce parallelas, (quæ expoſitum planum non ſecent,) tranſeunte. Nempe; Si ſecantis plani ad expoſitum inclinationis angulus ſit Semiquadrantalis ſeu grad. 45, (quam *Semiquadrantalem Ungulam* dicimus;) eadem erit (per 11 hujus) Ungulæ atque Momenti deſignatio. (Erit enim Ungulæ altitudo, ſuper quodvis expoſiti plani punctum, eadem atque ejuſdem puncti ab illâ rectâ quæ eſt communis planorum interſectio quam *Ungulæ aciem* dicimus, diſtantia.) Sin major fuerit minorve Inclinationis Angulus; major erit minorve illa Ungula; & quidem in ratione Tangentium Anguli Inclinationis. Nempe Solido Priſmatico ſeu Columnari æquatur; cujus Baſis, ſit expoſitum Planum; Altitudo, æqualis altitudini rectæ Centro gravitatis inſiſtentis; (ut ad prop. 11. oſtenſum eſt;) Hoc eſt, (ſi angulus Inclinationis ſit Semiquadrantalis,) æqualis diſtantiæ Centri gravitatis ab illa recta quæ concipitur vel ut Axis motûs, vel ut planorum, expoſiti & ſecantis, communis ſectio, ſeu Acies Ungulæ.

Denique; Eadem quæ diximus Momenta, exhibent etiam Magnitudinem Solidi, quod expoſitorum Planorum circa expoſitas rectas converſione deſcribitur; (per 12 hujus.) Nempe, in ea ratione ad momenta ut jam deſignata, vel Ungulas Semiquadrantales, quam habet Peripheria (integra, vel dimidia, &c. prout converſio illa eſt integra vel dimidia, &c.) ad ſui Circuli Radium. Eſt enim diſtantia Centri gravitatis plani, ab expoſitâ rectâ, Radius iſtius Peripheriæ (ſive perfectæ, ſive imperfectæ) quæ converſionis Centri gravitatis circa illam rectam deſcribitur.

Puta, Sectoris B C A, reſpectu rectæ $\tau\alpha$ Momentum, vel Semiquadrantalis Ungula, eſt (ut ſupra, § I.) $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{3}sR^2$; & reſpectu rectæ T A, $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{3}sR^2$. Ergo Solidum Annulare, illius integra converſione circa $\tau\alpha$ factum, eſt, $\frac{1}{2}aRP + \frac{1}{3}sRP$; &, ſemiconverſione, $\frac{1}{4}aRP + \frac{1}{6}sRP$: Et, circa T A, integrâ converſione, $\frac{1}{2}aRP - \frac{1}{3}sRP$; & ſemiconverſione, $\frac{1}{4}aRP - \frac{1}{6}sRP$.

Item, Sectoris B α A, reſpectu rectæ $\tau\alpha$, momentum, vel Semiquadrantalis

drantalis Ungula, (ut § M.) eſt $\frac{1}{2}aR^2+\frac{5}{6}sR^2-\frac{1}{6}svR=\frac{1}{2}fR^2+\frac{1}{6}shR$; Fig. 159, & reſpectu rectæ TA, $\frac{1}{2}aR^2+\frac{1}{6}sR^2+\frac{1}{6}svR=\frac{1}{2}fR^2-\frac{1}{6}shR$. Ergo 160. Solidum illius integra converſione circa $\tau\alpha$ deſcriptum, eſt, $\frac{1}{2}aRP+\frac{5}{6}sRP-\frac{1}{6}svP=\frac{1}{2}fRP+\frac{1}{6}shP$; &, converſione dimidiâ, $\frac{1}{4}aRP+\frac{5}{12}sRP-\frac{1}{12}svP=\frac{1}{4}fRP+\frac{1}{12}shP$: Atque, circa TA, converſione integrâ, $\frac{1}{2}aRP+\frac{1}{6}sRP+\frac{1}{6}svP=\frac{1}{2}fRP-\frac{1}{6}shP$; &, converſione dimidia, $\frac{1}{4}aRP+\frac{1}{12}sRP+\frac{1}{12}svP=\frac{1}{4}fRP-\frac{1}{12}shP$.

Item, Semiſegmenti BVA, reſpectu ipſius $\tau\alpha$ momentum, vel Semiquadrantalis Ungula, eſt (per § L.) $\frac{1}{2}aR^2-\frac{1}{2}sR^2+\frac{1}{2}svR+\frac{1}{3}s^3=\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{2}svR+\frac{1}{3}s^3$; Et, reſpectu TA, $\frac{1}{2}aR^2-\frac{1}{2}sR^2+\frac{1}{2}svR-\frac{1}{3}s^3=\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{2}svR-\frac{1}{3}s^3$. Ergo Solidum illius integra converſione circa $\tau\alpha$ deſcriptum, eſt, $\frac{1}{2}aRP-\frac{1}{2}sRP+\frac{1}{2}svP+\frac{s^3P}{3R}=\frac{1}{2}eRP+\frac{1}{2}svP+\frac{s^3P}{3R}$; & converſione dimidiâ, $\frac{1}{4}aRP-\frac{1}{4}sRP+\frac{1}{4}svP+\frac{s^3P}{6R}=\frac{1}{4}eRP+\frac{1}{4}svP+\frac{s^3P}{6R}$: Ac, circa TA, converſione integrâ; $\frac{1}{2}aRP-\frac{1}{2}sRP+\frac{1}{2}svP-\frac{s^3P}{3R}=\frac{1}{2}eRP+\frac{1}{2}svP-\frac{s^3P}{3R}$; & converſione dimidiâ, $\frac{1}{4}aRP-\frac{1}{4}sRP+\frac{1}{4}svP-\frac{s^3P}{6R}=\frac{1}{4}eRP+\frac{1}{4}svP-\frac{s^3P}{6K}$.

Item, ejuſdem Semiſegmenti BVA, reſpectu rectæ BV, momentum, vel Semiquadrantalis Ungula, eſt (per § L.) $e-\frac{1}{2}R^2+\frac{1}{2}avR-\frac{1}{6}s^3$. Ergo Solidi illius circa BV, converſione integrâ, deſcriptum, eſt $-\frac{1}{2}eRP+\frac{1}{2}avP-\frac{s^3P}{6R}$; & converſione dimidiâ, $-\frac{1}{4}eRP+\frac{1}{4}avP-\frac{s^3P}{12R}$.

Quodque hic de Semiſolidis, (intellige, quæ converſione dimidiâ deſcribuntur,) oſtenſum eſt; quæ ſunt Integrorum dimidia: Similiter de aliis, quæ converſionibus aliis imperfectis, (puta Quadrantali, &c.) deſcribuntur; ſervatâ proportione, judicandum erit. Quod & in ſequentibus pariter intelligendum erit.

Quodque, de Solidis, Planorum horum converſione circa rectas $\tau\alpha$, TA, BV, oſtenſum eſt; ſimiliter ad alia, mutatis mutandis, accommodabitur, quæ eorundem planorum, circa aliam quamvis in eodem plano rectam illis parallelam (quæ planum convertendum non ſecet,) in quacunque ab illis diſtantiâ, infra ſuprave, poſitam, converſione deſcribuntur.

P. Fig. 159, 160. Atque jam quidem, quod ad Sectores integros BCBA, BαBA, & integrum Segmentum BBA, &c. quorum non modo Centri gravitatis altitudo, (puta quantum distat à $\tau\alpha$, TA, BV, vel CD, &c.) sed ipsa Centra jam determinantur (ut quæ sint, in altitudine designatâ, in ipso Axe, puta Aα rectâ, per 5 hujus:) Illorum Momenta, Ungulæ, & Solida conversione facta, satis determinantur; non modo respectu rectæ quæ sit ipsis $\tau\alpha$, TA, &c. parallela, sed respectu rectæ cujusvis expositæ utcunque in illo plano sitæ (saltem quæ convertenda Plana, seu, Ungulæ Basin, non secet. Nam, propter datum ipsum gravitatis Centrum, datur etiam ejusdem distantia à quavis sic expositâ rectâ: Unde reliqua consequuntur.

Quod etiam, de Sectore BCA, Segmentis ABA, αBα, Triangulis BVC, BCα, &c. similiter intelligendum est: utpote quorum ipsa Centra gravitatis non minus determinantur, quam ipsorum BCBA, BBC; quippe in illorum axe posita.

Sed Semisectoris BαA, & Semisegmenti BVA; quorum Centra Gravitatis nondum ipsa determinantur, sed ipsorum tantum à $\tau\alpha$, TA, vel quæ hisce parallelæ sunt rectis, Distantia: Momenta, Ungulæ, & Solida conversione facta, nondum determinantur, nisi respectu ipsarum $\tau\alpha$, TA, rectarum, aut hisce parallelarum. Quum verò eorum item Centrorum distantia ab Aα determinata fuerit (quod jam facturi sumus;) adeoque illorum Centra ipsa determinata; eadem etiam ad rectas ipsi Aα parallelas, aut etiam alias in eodem plano rectas, similiter transferentur.

Ut igitur, de his etiam, eadem universaliter determinentur: eorum ipsa Gravitatis Centra jam determinabimus, (per 26 Cap. præced.) exhibitâ eorum etiam ab Aα distantiâ, quæ ipsis $\tau\alpha$, TA, &c. parallela non est.

Q. Fig. 161, 162. Nempe; Centri gravitatis Sectoris BCA, à recta Aα, distantia, est $\frac{c^2}{3a} = \frac{2vR}{3a}$. Quod sic ostenditur. Bisectis BA, BA, arcubus in δ, δ; erit (propter arcum $\delta\delta$, æqualem arcui BA$=a$,) Chorda $\delta\delta$=BA$=c$; ejusque semissis $\delta\varepsilon = \frac{1}{2}c$. Item Sectoris BCA, Centrum gravitatis G, in rectâ Cδ; ejusque à Centro distantia CG$=\frac{2c}{3a}R$; (per hujus § A.) Atque (propter similia Triangula) ut C$\delta$$=R$, ad $\delta\varepsilon=\frac{1}{2}c$; sic CG$=\frac{2c}{3a}R$, ad G$e=\frac{c^2}{3a}$, distantiam Cen-

tri

tri gravitatis ab Aα; vel (propter $2vR = c^2$) $\frac{2vR}{3a}$. Et, ſpeciatim, in Semicirculo ADα, (propter $v = 2R$, & $a = \frac{1}{2}P$,) diſtantia Centri gravitatis ab Aα, eſt $\frac{8R^2}{3P}$. In Quadrante vero ADC, (propter $v = R$, & $a = \frac{1}{4}P$) diſtantia Centri gravitatis ab Aα, eſt ſimiliter $\frac{8R^2}{3P}$.

Eſt igitur, (propter magnitudinem, $\frac{1}{2}aR$, per § D.) Sectoris BCA, reſpectu rectæ Aα, momentum vel Ungula Semiquadrantalis, (ductâ magnitudine in diſtantiam,) $\frac{1}{6}c^2R = \frac{1}{3}vR^2$. Adeoque Solidum integrâ converſione circa Aα deſcriptum, $\frac{1}{6}c^2P = \frac{1}{3}vRP$; &, converſione dimidiâ, $\frac{1}{12}c^2P = \frac{1}{6}vRP$. Et, ſpeciatim, Momentum Semicirculi ADα reſpectu Aα, vel correſpondens Ungula, $\frac{2}{3}R^3$: Et ſolidum converſione circa Aα factum (nempe Sphæra integra) $\frac{2}{3}R^2P$; & Semiſolidum, ſeu Hemiſphærium, $\frac{1}{3}R^2P$. Fig. 159, 160.

Quæque Quadrantem ſpectant, ſunt eorum Semiſſes.

Sin, ex hoc Sectoris BCA momento $\frac{1}{6}c^2R = \frac{1}{3}vR^2$; auferatur momentum (reſpectu ejuſdem Aα) Trianguli ABC; hoc eſt (propter Baſin AC $= R$; altitudinem BV $= s$, adeoque à baſe AC diſtantiam, $\frac{1}{3}s$,) $\frac{1}{6}s^2R$: Habetur, ſegmenti ABA, momentum (reſpectu ejuſdem Aα) $\frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R = \frac{1}{6}c^2R - \frac{1}{6}s^2R = \frac{1}{6}v^2R$. Quod, per magnitudi- $\frac{1}{2}eR$ (per § G.) diviſum; exhibet Centri gravitatis ab Aα diſtantiam $\frac{v^2}{3e} = \frac{2vR - s^2}{3a - 3s}$. Solidumque ejuſdem integra converſione circa Aα, $\frac{1}{3}vRP - \frac{1}{6}s^2P = \frac{1}{6}v^2P$; & converſione dimidiâ, $\frac{1}{6}vRP - \frac{1}{12}s^2P = \frac{1}{12}v^2P$.

Et ſimiliter de ſegmento αBα, mutatis mutandis: Puta, ſubſtitutis α pro a, & h pro v.

Deinde, Trianguli BVC, diſtantia centri gravitatis ab Aα, (per 6 hujus) eſt $\frac{1}{3}$BV $= \frac{1}{3}s$. Adeoque (propter magnitudinem, ut prius $\frac{1}{2}sx$; hoc eſt, $\frac{1}{2}sR - \frac{1}{2}sv$, vel $\frac{1}{2}sv - \frac{1}{2}sR$, prout ſupra infrave Centrum fuerit;) ejuſdem, reſpectu rectæ Aα, momentum, vel Semiquadrantalis Ungula, eſt $\frac{1}{6}s^2x$; hoc eſt $\frac{1}{6}s^2R - \frac{1}{6}s^2v$, vel $\frac{1}{6}s^2v - \frac{1}{6}s^2R$, prout ſupra infrave fuerit. Adeoque Solidum integrâ converſione circa Aα factum, eſt, $\frac{s^2xP}{6R}$; (hoc eſt, $\frac{R-v}{6R}s^2P$, vel $\frac{v-R}{6R}s^2P$, prout ſupra infrave fuerit:) Et, ſemiconverſione, $\frac{s^2xP}{12R}$; hoc eſt (prout ſupra infrave fuerit) $\frac{R-v}{12R}s^2P$, vel $\frac{v-R}{12R}s^2P$. R.

Fig. 159, 160. Illudque Trianguli BVC momentum vel ſemiquadrantalis Ungula, momento vel Ungulæ ſemiquadrantali Sectoris BCA (reſpectu ejuſdem $A\alpha$ rectæ,) ſublatum ſi ſupra Centrum fuerit, vel additum ſi infra; exhibet momentum (reſpectu ejuſdem $A\alpha$) vel ſemiquadrantalem Ungulam correſpondentem, Semiſegmenti BVA. Hoc eſt, ſi momento Sectoris BCA, $\frac{1}{6}c^2R = \frac{1}{3}vR^2$ (per § Q.) auferatur $\frac{1}{6}s^2R - \frac{1}{6}s^2v$, vel addatur $-\frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2v$; habetur Semiſegmenti BVA momentum (vel Semiquadrantalis Ungula) reſpectu ipſius $A\alpha$, $\frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2v$. Adeoque Solidum illius integrâ converſione circa $A\alpha$ deſcriptum, $\frac{1}{3}vRP - \frac{1}{6}s^2P + \frac{s^2vP}{6R}$: & Semiconverſione, $\frac{1}{6}vRP - \frac{1}{12}s^2P + \frac{s^2vP}{12R}$. Centrique gravitatis, ejuſdem BVA Semiſegmenti diſtantia ab $A\alpha$, (diviſo Momento per magnitudinem § F inventam) erit $\dfrac{\frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2v}{\frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR + \frac{1}{2}sv} = \dfrac{2vR^2 - s^2R + s^2v}{3eR + 3sv}$.

Aut etiam, propter $2vR - s^2 = c^2 - s^2 = v^2$; Momentum erit $\frac{1}{6}v^2R + \frac{1}{6}s^2v$; Solidum converſione integrâ factum $\frac{1}{6}v^2P + \frac{s^2vP}{6R}$; &, converſione dimidiâ, $\frac{1}{12}v^2P + \frac{s^2vP}{12R}$; & diſtantia centri gravitatis ipſius Semiſegmenti BVA, ab $A\alpha$, $\dfrac{v^2R + s^2v}{3eR + 3sv} = \dfrac{vR + s^2}{3eR + 3sv}v$.

S. Si autem, ex hoc Semiſegmenti BVA momento $\frac{1}{6}v^2R + \frac{1}{6}s^2v$, auferamus momentum Trianguli BAV (reſpectu ejuſdem $A\alpha$) $\frac{1}{6}s^2v$ (eſt enim Baſis $AV = v$, altitudo $BV = s$, Centrique gravitatis à baſe diſtantia $\frac{1}{3}s$; adeoque momentum $\frac{1}{6}s^2v$:) relinquitur Segmenti ABA (reſpectu ejuſdem $A\alpha$) momentum, $\frac{1}{6}v^2R$. Ut prius.

Similiter; Diſtantia Centri gravitatis Trianguli $BC\alpha$, à recta $A\alpha$, eſt (per 6 hujus) $\frac{1}{3}BV = \frac{1}{3}s$; ejuſque magnitudo $\frac{1}{2}sR$. Ergo illius (reſpectu rectæ $A\alpha$) momentum, vel Semiquadrantalis Ungula, eſt $\frac{1}{6}s^2R$: Adeoque Solidum integrâ converſione circa $A\alpha$ factum, $\frac{1}{6}s^2P$; & converſione dimidiâ, $\frac{1}{12}s^2P$.

Trianguli que $BC\alpha$ momentum illud $\frac{1}{6}s^2R$, additum Sectoris BCA momento (§ Q reperto) $\frac{1}{3}vR^2 = \frac{1}{6}c^2R$: exhibet Sectoris $B\alpha A$ (reſpectu ejuſdem $A\alpha$) momentum, vel Semiquadrantalem Ungulam, $\frac{1}{3}vR^2 + \frac{1}{6}s^2R = \frac{1}{6}c^2R + \frac{1}{6}s^2R$: Solidumque integra converſione circa $A\alpha$ factum, $\frac{1}{3}vRP + \frac{1}{6}s^2P = \frac{1}{6}c^2P + \frac{1}{6}s^2P$; & Semiſolidum, $\frac{1}{6}vRP + \frac{1}{12}s^2P = \frac{1}{12}c^2P + \frac{1}{12}s^2P$.

Aut

Aut etiam; Propter Trianguli BVα magnitudinem $\frac{1}{2}sh = sR - \frac{1}{2}sv$; Fig. 159,
& Centri gravitatis ab Aα distantiam $\frac{1}{3}s$; erit ejusdem, respectu Aα, 160.
momentum $\frac{1}{6}s^2h = \frac{1}{3}s^2R - \frac{1}{6}s^2v$: Et solidum ejusdem circa Aα integrâ conversione factum, $\frac{s^2bP}{6R} = \frac{1}{3}s^2P - \frac{s^2vP}{6R}$; & Semisolidum, $\frac{s^2bP}{12R} = \frac{1}{6}s^2P - \frac{s^2vP}{6R}$.

Trianguloque BVα momentum illud $\frac{1}{3}s^2R - \frac{1}{6}s^2v$; semisegmenti BVA momento $\frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2v$ (§ R. reperto) additum; exhibet Sectoris BαA (respectu ejusdem Aα) momentum, seu semiquadrantalem Ungulam $\frac{1}{3}vR^2 + \frac{1}{6}s^2R$. Ut prius. Adeoque (ut prius) Solidum, $\frac{1}{3}vRP + \frac{1}{6}s^2P$; & Semisolidum $\frac{1}{6}vRP + \frac{1}{12}s^2P$.

Eritque (Momento per magnitudinem $\frac{1}{2}aR + \frac{1}{2}sR = \frac{1}{2}fR$, § H inventam, diviso,) Sectoris BαA distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{\frac{1}{3}vR^2 + \frac{1}{6}s^2R}{\frac{1}{2}aR + \frac{1}{2}sR} = \frac{2vR + s^2}{3f} = \frac{c^2 + s^2}{3f}$.

Determinavimus igitur (inter alia) tum Sectoris BCA, tum BαA, tum Semisegmenti BVA, Centra gravitatis, (per eorum tum à $\tau\alpha$, seu TA, seu BV, seu DC, tum ab Aα, distantias,) quæque hinc dependent.

Atque ad eandem formam, mutatis mutandis, de aliis circuli portionibus judicandum erit.

Possunt autem hæc eadem, quæ rectam Aα spectant, (§ Q, R, S, T. tradita,) hac adhuc aliâ methodo explorari.

Sunt utique (per Nostræ *Arithmeticæ Infinitorum*, prop. 111, 121, 123, &c.) Quadrata ordinatim-applicatarum in Quadrante, (vel Subtensarum in Semicirculo,) Series Æqualium mulctata serie Secundanorum. Puta, ut $R^2 - 0$, $R^2 - 1$, $R^2 - 4$, $R^2 - 9$, &c. usque ad $R^2 - R^2$. Hoc est, ut Plana Cylindri Conice excavati, (per prop. 113. ejusdem;) Vel, (per ejusdem prop. 112.) ut Rectæ in Semiparabolâ diametro parallelæ.

Si enim Quadranti ADC, circumscribatur AODC quadratum, quod Fig. 163.
Diagonali CO dividatur; ducanturque ordinatim-applicatæ VB, occurrentes ipsi DO in M, ipsique CO in N: Manifestum est, Quadratum ordinatim-applicatæ BV, æquari quadrato CB minus quadrato CV (per 47 el. 1. Euclidis:) Hoc est, Quadrato VM minus quadrato VN: sunt enim VM = CB, & VN = CV: & sic ubique.

Adeoque, Omnia quadrata BV complentium ADC quadrantem; æquantur omnibus quadratis VM complentium AODC quadratum, minus

Fig. 163. minus omnibus quadratis NV complentium ACO Triangulum. Et singula singulis respectivè sumptis.

Adeoque si ex Parallelepipedo ODCA (quod compleant omnia MVq;) eximi intelligatur Pyramis OCA (quam compleant omnia NVq;) quod reliquum est, æquabitur omnibus BVq.

Aut etiam (propter Circulos Quadratis Radiorum proportionales) Cylindrus ODDO, exempto Cono OCO; æquabitur Hæmisphærio, DAD.

Sed & (propter singula BVq, singulis MVq—NVq, æqualia,) etiam partes partibus respectivè sumptis æquantur.

Nempe; Parallelepipedum OMVA dempto pyramidis trunco ONVA (si V sit supra Centrum) vel dempta pyramide auctâ OCNVA (si infra Centrum;) hoc est, dempto OCA∓NCV: Æquatur quadratis ordinatim-applicatarum in ABV, segmento. Et sic ubique.

Et similiter: Cylindrus OMMO, dempto ONNO vel OCNNO (hoc est, dempto Cono OCO, mulctato vel aucto simili cono NCN, prout supra infrave Centrum fuerit punctum V) æquatur Segmento Sphærico ABB. Et sic ubique.

His positis; erit (propter MVq$=R^2$, & AV$=v$,) Parallelepipedum OMVA$=vR^2$.

Item; (propter OAq$=$ACq$=R^2$, & AC$=R$,) est Pyramis OCA$=\frac{1}{3}R^3$.

Item; (propter NVq$=$VCq$=x^2$, & VC$=x$;) Pyramis NCV$=\frac{1}{3}x^3$.

Est ergo, Summa Quadratorum omnium Ordinatim-applicatarum, (puta omnia o^2) complentium ipsum ABV semisegmentum; OMVA—OCA±NCV$=vR^2-\frac{1}{3}R^3\pm\frac{1}{3}x^3$.

Est autem, supra Centrum, $x=R-v$; infra Centrum, $x=-R+v$: Adeoque illic $x^3=R^3-3vR^2+3v^2R-v^3$; hic verò $x^3=-R^3+3vR^2-3v^2R+v^3$. Ergo (cum illo casu habeatur $+\frac{1}{3}x^3$; hoc verò $-\frac{1}{3}x^3$;) erit $vR^2-\frac{1}{3}R^3\pm\frac{1}{3}x^3=v^2R-\frac{1}{3}v^3$ (utroque casu) summa omnium o^2; seu Quadratorum ordinatim-applicatarum complentium ABV semisegmentum.

Vel etiam (propter $v^2=c^2-s^2=2vR-s^2$; adeoque $v^2R=2vR^2-s^2R$; & $\frac{1}{3}v^3=\frac{2}{3}v^2R-\frac{1}{3}s^2v=\frac{4}{3}vR^2-\frac{2}{3}s^2R-\frac{1}{3}s^2v$;) erit eadem Omnium o^2 summa $v^2R-\frac{1}{3}v^3=\frac{2}{3}vR^2-\frac{1}{3}s^2R+\frac{1}{3}s^2v$.

Sed & manifestum porro est; cujusque rectæ ut BV, (atque de huic parallelis, Semisegmentum BVA complentibus simile erit judicium,) momentum respectu rectæ Aα, æquari semiquadrato ejusdem, (propter Rectæ Centrũ gravitatis in ipsius medio; adeoque VB$\times\frac{1}{2}$VB$=\frac{1}{2}$VBq.)

Et

Et ſimiliter quæ ſemiquadrantalem Ungulam (aciem habentem Aα) complent plana, ipſis BV inſiſtentia, æquari ejuſdem BV ſemiquadrato; (nam, propter angulum in V ſemirectum; altitudo in B, æqualis erit ipſi BV baſi; ipſumque Triangulum Rectangulum Iſoſceles, erit Quadrati dimidium.) Et conſequenter, tum Semiſegmenti BVA momentum reſpectu ipſius Aα; tum ſemiquadrantalis Ungula eidem BVA inſiſtens, aciem habens Aα; æquabitur eorundem o ſemiſummæ; Hoc eſt, $\frac{1}{2}v^2R - \frac{1}{6}v^3 = \frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2v = \frac{1}{6}v^2R + \frac{1}{6}s^2v$. Idem quod ſupra (§ R.) repertum erat. Fig. 153.

Huic verò Semiſegmenti BVA momento (reſpectu rectæ Aα) ſic invento; Si addantur Triangulorum BVC, BVα, (reſpectu ejuſdem Aα) Momenta, (§ R, S, reperta:) Prodibunt Momenta (reſpectu ejuſdem Aα) Sectorum BCA, BαA: Cæteráque de Solidis converſione circa Aα factis, Centriſque gravitatis planorum ab Aα diſtantiis, ſimiliter elicientur atque prius. Ut non ſit opus eiſdem ulterius immorari.

At interim haud erit incommodum hic loci monuiſſe; eâdem etiam methodo Triangulorum BCV, BαV, BCα, momenta reſpectu ipſius Aα, haberi poſſe.

Cum enim ſingularum BV rectarum (ſeu huic parallelarum) Triangulum BCV complentium, momenta reſpectu Aα; ſeu Triangula eiſdem inſiſtentia, ſemiquadrantalem Ungulam (aciem habentem Aα) complentia; ſint earundem BV, &c. Semiquadrata: Quæ quidem Semiquadrata, Pyramidem complent, cujus Baſis eſt $\frac{1}{2}BVq = \frac{1}{2}s^2$, altitudo, $CV = x$; Erit ipſa Pyramis (per 6 hujus;) Hoc eſt, momentum illud, ſeu ſemiquadrantalis ungula BVC aciem habens Aα, $\frac{1}{2}s^2 \times \frac{1}{3}x = \frac{1}{6}s^2x$. ut prius § R.

Item, (pari de cauſa,) Momentum Trianguli BαV, ſeu huic inſiſtens Semiquadrantalis Ungula aciem habens Aα; Pyramis erit, cujus Baſis, $\frac{1}{2}BVq = \frac{1}{2}s^2$, altitudo $V\alpha = h$; adeoque ipſa Pyramis (hoc eſt, Momentum illud, ſeu ſemiquadrantalis Ungula,) $\frac{1}{2}s^2 \times \frac{1}{3}h = \frac{1}{6}s^2h$. Ut prius § S.

Eſtque Triangulum BCα; idem atque BVα dempto additove (prout ſupra infrave Centrum C, ſit V punctum,) BCV: Adeoque (reſpectu ipſius Aα) momentum Trianguli BCα; idem atque momentum BVα, dempto, additove, momento BCV: Adeoque Trianguli BCα momentum (reſpectu ipſius Aα) ſeu Semiquadrantalis Ungula eidem inſiſtens aciem habens Aα; eſt $\frac{1}{6}s^2h \mp \frac{1}{6}s^2x$. Hoc eſt, (propter $h = 2R - v$; &, ſupra Centrum, $x = R - v$, auferendum; infra vero, $x = -R + v$ addendum; adeoque $h \mp x = R$;) $\frac{1}{6}s^2R$. Ut prius, § S.

Eadem

V. Eadem item oſtendentur ex prop. 112. Arithm. Infin.

Fig. 154. Cum enim iſtic oſtendatur, Rectas in Semiparabola, Diametro vel Axi parallelas, eſſe ut Seriem Æqualium ſerie Secundanorum Mulctatam; (ſunt enim Omnes Vδ, parallelogrammum ACΔδ complentes, ſeries Æqualium; omneſque βδ, complentes Semiparabolæ complementum AΔδ, ſeries Secundanorum; Ergo, omnes reſiduæ Vβ, parabolæ diametro CΔ parallelæ, ſunt ſeries Æqualium mulctata ſerie Secundanorum:) Hoc eſt, Ut quadrata ordinatim-applicatarum in Circuli quadrante; ut modo oſtenſum eſt.

Si igitur, ſuper eadem Aα rectâ, (ut communi Baſe,) deſcribatur tum ADα Semicirculus, tum AΔα Parabola recta (cujus Axis CΔ æqualis ſit ipſi CD circuli Radio:) Et ordinatim-applicata in Semicirculo quælibet BV producta, occurrat Parabolæ in β: Erunt omnes Vβ Rectæ, omnibus Quadratis VB reſpective ſumptis proportionales.

Adeoque ductis omnibus Vβ rectis, (ſive totam Parabolam, ſive ipſius ſegmentum ut AVβ complentibus,) in communem altitudinem $R = C\Delta = CD$: Erunt omnia Vβ in *R* parallelogramma (Priſma Parabolæ, ejuſve portioni, inſiſtens complentia,) æqualia omnibus VB quadratis (& ſingula ſingulis reſpective ſumptis;) Hoc eſt (per ante demonſtrata) Duplo momenti Semicirculi, ejuſve cui inſiſtunt portioni, reſpectu rectæ Aα; ſeu, Duplo ſemiquadrantalis Ungulæ correſpondentis, aciem habentis Aα. (Sunt enim hæc Parallelogramma, propter communem altitudinem *R*, ipſis quibus inſiſtunt Rectis Vβ, proportionalia; adeoque, per jam oſtenſa, proportionalia ipſis VB quadratis: Sed & , propter $CD = C\Delta = R$, Parallelogrammum, CΔ in *R*, æquatur ipſi CD quadrato: Ergo & reliqua reliquis reſpective.) Eademque, Vβ in $\frac{1}{2}R$, (utpote illorum dimidia,) ipſi momento plani ABV reſpectu ipſius Aα; vel Semiquadrantali Ungulæ correſpondenti æquantur.

Si igitur, Parallelogrammo AVδδ; auferatur Aβδδ vel AΔβδδ (hoc eſt, Semiparabolæ Complementum AΔδ, dempto additove Δβδ, prout ſupra infrave Centrum fuerit V punctum;) habetur Parabolæ ſegmentum $AV\beta = AV\delta - A\Delta\delta \pm \beta\Delta\delta$.

Eſt autem (propter $AV = v$, & $V\delta = R$,) Parallelogrammum $AV\delta\delta = vR$.

Item; (propter Semiparabolæ Complementum, ſubtriplum circumſcripti Parallelogrammi, [illegible]. 23. *Arithm. Infin.* vel prop. 1. hujus; rectámque AC=C[illegible] complementum $A\Delta\delta = \frac{1}{3}R^2$.

Item

Item; (propter AC=CΔ;) Parabolæ Latus rectum erit æquale Fig. 164. ipſi $C\Delta=R$: Et (propter $\beta b=VC=x$) erit $\beta\delta=b\Delta=\frac{x^2}{R}$: Adeoque Semiparabolæ complementum $\beta\Delta\delta$ (utpote circumſcripti Parallelogrammi $\beta b\Delta\delta$ triens) $=\frac{x^3}{3R}$.

Ergo; Parabolæ Segmentum $AV\beta=AV\delta-A\Delta\delta\pm\beta\Delta\delta=vR-\frac{1}{3}R^2\pm\frac{x^3}{3R}$. Atque hoc demum in $\frac{1}{2}R$ ductum; exhibet $\frac{1}{2}vR^2-\frac{1}{6}R^3\pm\frac{1}{6}x^3$ Semiſegmenti Circularis ABV momentum reſpectu rectæ Aα; vel Semiquadrantalem Ungulam correſpondentem: Ejuſque duplum, $vR^2-\frac{1}{3}R^3\pm\frac{1}{3}x^3=v^2R-\frac{1}{3}v^3=\frac{2}{3}vR^2-\frac{1}{3}s^2R+\frac{1}{3}s^2v$; ut prius, § T.

Atque hinc ſimiliter elicientur, tum Sectorum BCA, BαA, momenta ſeu ſemiquadrantales Ungulæ reſpectu rectæ Aα, tum Centrorum gravitatis inde diſtantiæ; cæteraque ut prius.

Eadémque adhuc aliàs ſic inveſtigantur. W.

Si intelligatur Sphæra, vel Sector Sphæricus, (puta BCB ex converſione Fig. 159, Sectoris circularis BCA circa Aα factus,) ex numero-infinitis Pyrami- 160. dulis (juxta def. 1. Cap. 4.) conflari: Quorum omnium communis vertex ſit C Centrum; & communis altitudo Circuli Sphæræve Radius; Baſeſque compleant ipſam ſuperficiem Sphæricam, vel Sectoris Sphærici Superficiem curvam, (puta BAB quæ arcûs BA circa Aα converſione deſcribitur:) Erit (propter, Pyramides Priſmatum ſuper eiſdem baſibus æque altorum Trientes, per prop. 6 hujus;) Sector Sphæricus BCBA, æqualis ſuperficiei Sphæricæ ſegmento BAB in Trientem Radii ducto.

Habetur autem Superficiei Sphæricæ ſegmentum illud BAB, ſi ducatur Arcus $AB=a$, in Peripheriam ejuſdem arcûs Centro gravitatis deſcriptam, per 12 hujus. Eſt autem ejuſdem AB arcûs Centrum gravitatis, puta G (in fig. 161, 162.) in rectâ Cδ arcus axe; rectá- Fig. 161, que $CG=\frac{c}{a}R$, (per 14 hujus.) Rectaque $\delta\varepsilon=\frac{1}{2}c$, (ut § Q. 162. oſtenſum eſt:) Atque (propter ſimilia Triangula) Ut $C\delta=R$, ad $\delta\varepsilon=\frac{1}{2}c$, ſic $CG=\frac{c}{a}R$, ad $\frac{c^2}{2a}=G\varepsilon$ diſtantiam Centri gravitatis Arcûs AB, ab Aα; Adeóque $\frac{c^2P}{2aR}$ eſt Peripheria ejuſdem integrâ converſione circa Aα deſcripta. In quam itaque ſi ducatur $AB=a$, habetur

betur Sphæricæ Superficiei ſegmentum $BAB = \frac{c^2 P}{2R}$: vel (propter $c^2 = 2vR$,) Superficiei Sphæricæ ſegmentum $BAB = vP$.

Fig. 159, 160. Vel etiam (per 13 hujus;) Propter integram ſphæræ ſuperficiem quatuor Circulis maximis æqualem; hoc eſt, $2RP$: atque abſciſſum ſegmentum ABB, in ea ratione ad totam, qua eſt ipſius altitudo $AV = v$, ad $A\alpha = 2R$: Erit ut $A\alpha = 2R$, ad $AV = v$, ſic tota ſuperficies Sphærica $2RP$, ad ipſius ſegmentum $BAB = vP$, ut prius.

Quod itaque ſuperficiei Sphæricæ ſegmentum, in $\frac{1}{3}R$ ductum, exhibet Sectorem Sphæricum $BCBA = \frac{1}{3}vRP$: Adeóque Semiquadrantalem Ungulam, ſeu Plani BCA momentum reſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{3}vR^2$. Idem quod ſupra, § Q. repertum eſt. Cæteraque hinc, ut ibidem, deducentur.

X. Exhibuimus itaque Semicirculi Partiúmque ipſius expoſitarum, tum Magnitudines, tum Momenta reſpectu rectarum aliquot expoſitarum; eorúmque diſtantiam Centri gravitatis à rectis illis. Adeoque per prop. 26. Cap. præced. (propter datas eorum à duabus in eodem plano rectis, non invicem parallelis, diſtantias,) ipſa gravitatis Centra.

Eâdemque methodo, de aliis Circuli portionibus, eorúmque Momentis, & Solidis converſione factis fiet judicium. Puta, ſi pro ſectore $B\alpha A$, (ad verticem terminato) exponeretur ſector $D\alpha B$, aliúſve hujuſmodi: Cum enim tum Sectoris $B\alpha A$, tum $D\alpha A$, magnitudines & momenta (reliquaque quæ hinc dependent) jam exhibeantur; etiam ſectoris $D\alpha B$ (qui illorum vel differentia vel ſumma ſit) magnitudines & momenta (adeóque & quæ hinc dependent) facile exhiberi poterunt.

Item; eâdem methodo quâ momenta, verbi gratia, ſemiſegmenti BVA, à recta $\tau\alpha$, ad rectas TA, vel BV, transferuntur; poſſunt ſimiliter à recta $A\alpha$, ad $T\tau$, vel Ba, transferri. Eáque, quæ hic traduntur, mille modis aliis ampliari.

Y. Quæ autem de circulo ejúſque portionibus dicta ſunt: eadem ad ellipſin, hujúſque portiones, facile transferentur. Nempe, ſi intelligatur axium ellipſeos alter $A\alpha$, alter $D\Delta$: Manente, ut prius, $A\alpha = 2R$, (adeoque $AV = v$, $V\alpha = h$;) erit $D\Delta$ in ea ratione ad $2R$, quâ eſt ad $A\alpha$; adeoque BV in eadem ratione ad s. Adeoque ubicunque BV, aut huic parallelæ in calculum veniunt; pro s, ſubſtituenda erit quantitas quæ ſit, ad s, in ea ratione qua eſt $D\Delta$ ad $A\alpha$: (mâjore quidem,

ſi

ſi D △ ſit axium major; minore, ſi minor;) Adeoque, pro s^2; quantitatem quæ ſit ad hanc in duplicatâ ratione rectæ D△ ad Aα: & ſimiliter, mutatis mutandis, in reliquis ejuſdem poteſtatibus.

PROP. XVI.

Sectoris Sphærici Centrum gravitatis, eſt in Axis ſui illo puncto, quod à Centro Circuli diſtat Tribus Quadrantibus Radii, minus Tribus Octantibus altitudinis ſuperficiei Curvæ: Seu Tribus Quadrantibus Radii, minus Tribus Octantibus ſinus verſi: Seu, quod à Centro Circuli diſtat, Tribus Octantibus altitudinis reſiduæ ſuperficiei curvæ; ſeu Tribus Octantibus Sinus verſi reſidui. A. Fig. 165.

Hoc eſt, in Hemiſphærio; $\frac{3}{8}$ Radii.

Atque hinc Segmenti Sphæræ (plano abſciſſi) Centrum gravitatis colligitur: Et in aliis portionibus ſimiliter. Et quæ hinc dependent. B.

Fig. 159, 160.

Nempe; Si ponantur Symbola ut in propoſitione præcedente; erit, Semiquadrantalis Ungulæ totius ſemicirculi, aciem habentis Aα, (unde de Solidis converſione factis, & Semiſolidis fiet judicium,) Magnitudo $\frac{2}{3}R^3$; Diſtantia Centri gravitatis, ſive à τα, ſive à TA, R; Momentum reſpectu τα, vel T A, $\frac{2}{3}R^4$: Diſtantia Centri gravitatis ab Aα $\frac{3}{32}P$; Momentum reſpectu Aα, $\frac{1}{16}R^3P$. C. P.

Aciemque habentis τα, Magnitudo $\frac{1}{4}R^2P$; Momentum reſpectu Aα, $\frac{2}{3}R^4$; Diſtantia Centri gravitis ab Aα, $\frac{8R^2}{3P}$: Momentum reſpectu τα, $\frac{5}{16}R^3P$; reſpectu TA, $\frac{3}{16}R^3P$; Diſtantia Centri gravitatis à τα, $\frac{5}{4}R$; à TA, $\frac{3}{4}R$. I. T.

I. Aciemque habentis TA, Magnitudo $\frac{1}{4}R^2P$; Momentum
Fig. 159, 160. respectu $A\alpha$, $\frac{2}{3}R^4$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$,
T. $\frac{8R^2}{3P}$: Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{16}R^3P$; respectu TA, $\frac{5}{16}R^3P$; Distantia centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}R$; à TA, $\frac{5}{4}R$.

C. Semiquadrantalis Ungulæ, Sectoris BCA, aciem habentis $A\alpha$, (unde de Solidis conversione factis, & semisolidis, fiet judicium;) Magnitudo, $\frac{1}{3}vR^2$; Distantia Centri gravitatis à D C, $\frac{3}{8}b$; à $\tau\alpha$, $R+\frac{3}{8}b$; à TA, $R-\frac{3}{8}b$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}vR^3+\frac{1}{8}s^2R^2$; re-
P. spectu T A, $\frac{1}{3}vR^3-\frac{1}{8}s^2R^2$: Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{3e}{8v}R+\frac{3}{8}s$; Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{8}svR^2$.

I. Aciemque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo $\frac{1}{2}aR^2+\frac{1}{3}sR^2$; Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{3}vR^3+\frac{1}{8}s^2R^2$; Distantia Centri
X. gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{8vR+3s^2}{12a+8s}$: Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{8}aR^3+\frac{12}{24}sR^3-\frac{1}{8}svR^2$; respectu T A, $\frac{3}{8}aR^3-\frac{1}{8}sR^3+\frac{1}{8}svR^2$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{15aR+19sR-3sv}{12a+8s}$; à TA, $\frac{9aR-3sR+3sv}{12a+8s}$.

I. Aciemque habentis TA; Magnitudo, $\frac{1}{2}aR^2-\frac{1}{3}sR^2$; Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{3}vR^3-\frac{1}{8}s^2R^2$; Distantia Centri
X. gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{8vR-3s^2}{12a-8s}$. Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}aR^3-\frac{1}{8}sR^3+\frac{1}{8}svR$; respectu TA, $\frac{5}{8}aR^3-\frac{13}{24}sR^3-\frac{1}{8}svR^2$; Distantia Centri gravitatis, à $\tau\alpha$, $\frac{9aR-3sR+3sv}{12a-8s}$; à TA, $\frac{15aR-13sR-3sv}{12a-8s}$.

D. Ungulæ (Semiquadrantalem intellige) Trianguli BVG, aciem

aciem habentis $A\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{6}s^2x$; Distantia Centri gravitatis à DC, $\frac{1}{4}x$; à $\tau\alpha$, $R\pm\frac{3}{4}x$; à TA, $R\mp\frac{3}{4}x$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{6}s^2xR\pm\frac{1}{8}s^2x^2$; respectu TA, $\frac{1}{6}s^2xR\mp\frac{1}{8}s^2x^2$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}s$; momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{12}s^3x$. Fig. 159, 160. Q.

Aciemque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo $\frac{1}{6}sxR-\frac{1}{3}sxv$; Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{7}{24}s^2xR-\frac{1}{8}s^2vx$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{7R-3v}{20R-8v}s$: Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}sxR^2\pm\frac{2}{3}sx^2R+\frac{1}{4}sx^3$; respectu TA, $\frac{1}{2}sxR^2-\frac{1}{4}sx^3$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $R\pm\frac{4xR\pm3x^2}{6R\pm4x}$; à TA, $R\mp\frac{4xR\pm3x^2}{6R\pm4x}$. M. X.

Aciemque habentis TA; Magnitudo, $\frac{1}{6}sxR+\frac{1}{3}sxv$; Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{24}s^2xR+\frac{1}{8}s^2xv$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$ $\frac{R+3v}{4R+8v}s$. Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}sxR^2-\frac{1}{4}sx^3$; respectu TA, $\frac{1}{2}sxR^2\mp\frac{2}{3}sx^2R+\frac{1}{4}sx^3$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$ $R\pm\frac{4xR\mp3x^2}{6R\mp4x}$; à TA, $R\mp\frac{4xR\mp3x^2}{6R\mp4x}$. M. X.

Ungulæ Semisegmenti BVA aciem habentis $A\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{6}v^2R+\frac{1}{6}s^2v$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}vR^3-\frac{1}{6}s^2R^2+\frac{1}{6}s^2vR+\frac{1}{8}s^4$; respectu TA, $\frac{1}{3}vR^3-\frac{1}{6}s^2R^2+\frac{1}{6}s^2vR-\frac{1}{8}s^4$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $R+\frac{6R-3v}{4vR+4s^2}s^2$; à TA, $R-\frac{6R-3v}{4vR+4s^2}s^2$; à DC, $\frac{6R-3v}{4vR+4s^2}s^2=\frac{3s^2b=3b^2v}{4vR+4vb}$; à BV, $\frac{3b^2}{4R+4b}-R+v$; Momentum respectu BV, $\frac{1}{3}vR^3-\frac{1}{6}s^2R^2-\frac{1}{24}s^4$. Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{8}svR^2\mp\frac{1}{12}s^3x$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{3eR^3+3svR^2\mp s^3x}{4v^2R+4s^2v}$. E. Q.

Aciemque

K. Aciemque habentis $\tau\alpha$; magnitudo, $\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{2}svR+\frac{1}{3}s^3$; Mo-
Fig. 159, 160. mentum reſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{3}vR^3-\frac{1}{6}s^2R^2+\frac{1}{6}s^2vR+\frac{1}{8}s^4$; Diſtantia
T. Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{4vR^2+4s^2R+3s^2h}{12eR^2+12svR+8s^3}v$. Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{8}eR^3+\frac{5}{8}svR^2+\frac{1}{12}s^3R-\frac{1}{4}s^3v$; reſpectu TA, $\frac{3}{8}eR^3+\frac{3}{8}svR^2-\frac{1}{4}s^3R+\frac{1}{4}s^3v$; reſpectu BV, $-\frac{3}{8}eR^3+\frac{1}{2}avR^2+\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{4}s^3R+\frac{1}{12}s^3v$; Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{5}{4}R+\frac{3s^3h}{6eR^2+6svR+4s^3}$; à TA, $\frac{3}{4}R-\frac{3s^3h}{6eR^2+6svR+4s^3}$; à BV, $\frac{5}{4}R-h+\frac{3s^3h}{6eR^2+6svR+4s^3}$ $=-\frac{3}{4}R+v+\frac{3s^3h}{6eR^2+6svR+4s^3}$.

K. Aciemque habentis TA; Magnitudo $\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{2}svR-\frac{1}{3}s^3$; Momentum reſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{3}vR^3-\frac{1}{6}s^2R^2+\frac{1}{6}s^2vR-\frac{1}{8}s^4$; Diſtan-
T. tia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{4vR^2+4s^2R-8s^2h}{12eR^2+12svR-8s^3}v$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}eR^3+\frac{3}{8}svR^2-\frac{1}{4}s^3R+\frac{1}{4}s^3v$; reſpectu TA, $\frac{5}{8}eR^3+\frac{5}{8}svR^2-\frac{1}{12}s^3R-\frac{1}{4}s^3v$; reſpectu BV, $-\frac{5}{8}eR^3+\frac{1}{2}avR^2-\frac{3}{8}svR^2-\frac{1}{12}s^3R-\frac{1}{12}s^3v$; Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{5}{4}R+\frac{3s^3v}{6eR^2+6svR-4s^3}$; à TA, $\frac{5}{4}R-\frac{3s^3v}{6eR^2+6svR-4s^3}$; à BV, $\frac{3}{4}R-h+\frac{3s^3v}{6eR^2+6svR-4s^3}$ $=-\frac{5}{4}R+v+\frac{3s^3v}{6eR^2+6svR-4s^3}$.

K. Aciemque habentis BV; Magnitudo, $-\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{2}avR-\frac{1}{6}s^3$; Momentum reſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{3}vR^3-\frac{1}{6}s^2R^2-\frac{1}{24}s^4=\frac{1}{6}v^2R^2$ $-\frac{1}{24}v^2h^2$; Diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$,
V. $\frac{4vR^2-s^2h}{-12eR^2+12avR-4s^3}v$. Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $-\frac{3}{8}eR^3$ $+\frac{1}{2}avR^2+\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{4}s^3R+\frac{1}{12}s^3v$; reſpectu TA, $-\frac{5}{8}eR^3$ $+\frac{1}{2}avR^2-\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{12}s^3R-\frac{1}{12}s^3v$; reſpectu BV, $\frac{5}{8}eR^3$ $+\frac{5}{8}svR^2-\frac{1}{2}as^2R+\frac{1}{12}s^3R-\frac{1}{12}s^3v$; Diſtantia Centri gravitatis

vitatis à $\tau\alpha$, $\frac{-9eR^3+12avR^2+3svR^2-6s^3R+2s^3v}{-12eR^2+12avR-4s^3}$; à Fig. 159, 160.
TA, $\frac{-15eR^3+12avR^2-3svR^2-2s^3R-2s^3v}{-12eR^2+12avR-4s^3}$; à BV,
$\frac{15eR^3+15svR^2-12as^2R+2s^3R-2s^3v}{-12eR^2+12avR-4s^3}$.

Ungulæ Trianguli BAV, aciem habentis $A\alpha$; Magnitudo, G.
$\frac{1}{6}s^2v$; Centri gravitatis Diſtantia à $\tau\alpha$, $2R-\frac{3}{4}v$; à TA, $\frac{3}{4}v$;
Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{12}s^2vR+\frac{1}{8}s^4$; reſpectu TA,
$\frac{1}{4}s^2vR-\frac{1}{8}s^4$: Diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}s$; S.
Momentum reſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{12}s^3v$.
Aciemque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{3}svR+\frac{2}{3}s^3$; Momen- N.
tum reſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{12}s^2vR+\frac{1}{8}s^4$; Centri gravitatis diſtan-
tia ab $A\alpha$, $\frac{2vR+3s^2}{8vR+8s^2}s$: Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, Y.
$\frac{4vR^2+10s^2R-3s^2v}{4vR+4s}$; à TA, $\frac{4R^2-2s^2R+3s^2v}{4vR+4s^2}$; Mo-
mentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}svR^2+\frac{5}{6}s^3R-\frac{1}{4}s^3v$; reſpectu TA,
$\frac{1}{3}svR^2-\frac{1}{6}s^3R+\frac{1}{4}s^3v$.
Aciemque habentis TA; Magnitudo $\frac{1}{3}sv^2$; momentum N.
reſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{4}s^2vR-\frac{1}{8}s^4$; Centri gravitatis ab $A\alpha$ di-
ſtantia, $\frac{3}{8}s$: Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $2R-\frac{3}{4}v$; Y.
à TA, $\frac{3}{4}v$; Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}sv^2R-\frac{1}{4}sv^3$; re-
ſpectu TA, $\frac{1}{4}sv^3$.

Ungulæ Segmenti ABA, aciem habentis $A\alpha$; Magnitu- G.
do, $\frac{1}{6}v^2R^2$; Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{6}v^2R^2+\frac{1}{12}s^2vR$;
reſpectu TA, $\frac{1}{2}v^2R^2-\frac{1}{12}s^2vR$; Diſtantia Centri gra- S.
vitatis à $\tau\alpha$, $R+\frac{1}{2}h$; à TA, $R-\frac{1}{2}h$; à DC, $\frac{1}{2}h$. Mo-
mentum reſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{12}s^3R$; Diſtantia
Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{3eR^2+3svR-2s^3}{8vR-4s^2=4v^2}$.
Aciemque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{6}svR$; Mo- N.
mentum reſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{6}v^2R^2+\frac{1}{12}s^2vR$; Centri gravitatis
ab

Y. ab $A\alpha$ distantia $\frac{4R^2-2hR+s^2}{6eR+2sv}v$: Momentum respectu
Fig. 159, 160. $\tau\alpha$, $\frac{5}{8}eR^3+\frac{7}{24}svR^2+\frac{1}{12}s^3R$; respectu TA, $\frac{3}{8}eR^3+\frac{1}{24}svR^2-\frac{1}{12}s^3R$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{15eR^2+7svR+2s^3}{12eR-4sv}$; à TA, $\frac{9eR^2+svR-2s^3}{12eR+4sv}$.

N. Aciemque habentis TA; Magnitudo, $\frac{1}{2}eR^2-\frac{1}{6}svR$; Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{6}v^2R^2-\frac{1}{12}s^2vR$; Centri gravitatis ab $A\alpha$ distantia $\frac{4R^2-2hR-s^2}{6eR-2sv}v$. Momentum respectu
Y. $\tau\alpha$, $\frac{5}{8}eR^3+\frac{1}{24}svR^2-\frac{1}{12}s^3R$; Respectu TA, $\frac{1}{8}eR^3-\frac{3}{8}svR^2+\frac{1}{12}s^3R$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{9eR^2+svR-2s^3}{12eR-4sv}$; à TA, $\frac{15eR^2-9svR+2s^3}{12eR-4sv}$.

F. Ungulæ Trianguli BCα, aciem habentis $A\alpha$; magnitudo, $\frac{1}{6}s^2R$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{5}{4}R-\frac{1}{2}v$; à TA, $\frac{3}{4}R+\frac{1}{2}v$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{24}s^2R^2-\frac{1}{12}s^2vR$; re-
R. spectu TA, $\frac{1}{8}s^2R^2+\frac{1}{12}s^2vR$: Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}s$; momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{12}s^3R$.

M. Aciémque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{2}sR^2-\frac{1}{6}svR$; Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{5}{24}s^2R^2-\frac{1}{12}s^2vR$; Centrique gravitatis
X. ab $A\alpha$ distantia, $\frac{5R-2v}{12R-4v}s$: Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{7R^2-3vR-s^2}{6R-2v}$; à TA, $\frac{5R^2-vR+s^2}{6R-2v}$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{7}{12}sR^3-\frac{1}{4}svR^2-\frac{1}{12}s^3R$; respectu TA, $\frac{5}{12}sR^3-\frac{1}{12}svR^2-\frac{1}{12}s^3R$.

M. Aciémque habentis TA; Magnitudo, $\frac{1}{2}sR^2+\frac{1}{6}svR$; Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{8}s^2R^2+\frac{1}{12}s^2vR$; Distantia Centri
X. gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{3R+2v}{12R+4v}s$: Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{12}sR^3-\frac{1}{12}svR^2+\frac{1}{12}s^3R$; respectu TA, $\frac{7}{12}sR^3+\frac{5}{12}svR^2-\frac{1}{12}s^3R$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$,

$5R^2$

$\frac{5R^2 - vR + s^2}{6R + 2v}$; à TA, $\frac{7R^2 + 5vR - s^2}{6R + 2v}$. Fig. 159, 160.

Ungulæ Trianguli BVα, aciem habentis Aα; Magnitudo, $\frac{1}{6}s^2h$; Centri gravitatis distantia à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}h$; à TA, $2R - \frac{3}{4}h$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}s^2h^2$; respectu TA, $\frac{1}{3}s^2hR - \frac{1}{8}s^2h^2$: Distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{1}{2}s$; Momentum respectu Aα, $\frac{1}{12}s^3h$. F. R.

Aciémque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo $\frac{1}{3}sh^2$; Momentum respectu Aα, $\frac{1}{8}s^2h^2$; Distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{3}{8}s$: Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}h$; à TA, $2R - \frac{3}{4}h$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}sh^3$; respectu TA, $\frac{2}{3}sh^2R - \frac{1}{4}sh^3 = \frac{1}{12}sh^3 + \frac{1}{3}s^3h$. M. W.

Aciémque habentis TA; Magnitudo, $shR - \frac{1}{3}sh^2$; Momentum respectu Aα, $\frac{1}{3}s^2hR - \frac{1}{8}s^2h^2$; Distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{8R - 3h}{24R - 8h}s$: Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}sR^3 - \frac{1}{3}svR^2 + \frac{1}{3}s^3R - \frac{1}{4}s^3v = \frac{2}{3}sh^2R - \frac{1}{4}sh^3 = \frac{1}{12}sh^3 + \frac{1}{3}s^3h$; respectu TA, $\frac{2}{3}sR^3 - \frac{1}{3}svR^2 + \frac{1}{3}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $R - \frac{3s^2v}{8R^2 - 4vR + 4s^2}$; à TA, $R + \frac{3s^2v}{8R^2 - 4vR + 4s^2}$; à DC, $\frac{3s^2v}{8R^2 - 4vR + 4s^2} = \frac{3v^2}{12R - 4h} = \frac{3v^2}{4R + 4v}$. M. W.

Ungulæ Sectoris BαA, aciem habentis Aα; Magnitudo $\frac{1}{3}vR^2 + \frac{1}{6}s^2R$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2vR$; respectu TA, $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{12}s^2vR$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $R + \frac{s^2h}{4vR + 2s^2}$ à TA, $R - \frac{s^2h}{4vR + 2s^2}$; à DC, $\frac{s^2h}{4vR + 2s^2}$: Momentum respectu Aα, $\frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{8}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R$; Distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{3eR^2 + 3svR + 2s^3}{8vR + 4s^2}$. F. R.

L. Aciemque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{2}fR^2 + \frac{1}{6}shR = \frac{1}{2}aR^2$
Fig. 159, 160. $+ \frac{5}{6}sR^2 - \frac{1}{6}svR$; Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2vR$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$,
W. $\frac{4vR^2 + 4s^2R - s^2v}{6fR + 2sh}$: Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{8}aR^3 + \frac{1}{8}sR^3 - \frac{3}{8}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R = \frac{5}{8}fR^3 + \frac{3}{8}shR^2 - \frac{1}{12}s^3R$; respectu TA, $\frac{3}{8}aR^3 + \frac{7}{24}sR^3 + \frac{1}{24}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R = \frac{3}{8}fR^3 - \frac{1}{24}shR^2 + \frac{1}{12}s^3R$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{15fR^2 + 9shR - 2s^3}{12fR + 4sh}$; à TA, $\frac{9fR^2 - shR + 2s^3}{12fR + 4sh}$.

L. Aciemque habentis TA; Magnitudo, $\frac{1}{2}fR^2 - \frac{1}{6}shR = \frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{6}sR^2 + \frac{1}{6}svR$; Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{12}s^2vR$;
W. Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{4vR^2 + s^2v}{6fR - 2sh}$: Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}aR^3 + \frac{7}{24}sR^3 + \frac{1}{24}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R = \frac{3}{8}fR^3 - \frac{1}{24}shR^2 + \frac{1}{12}s^3R$; respectu TA, $\frac{5}{8}aR^3 + \frac{1}{24}sR^3 + \frac{7}{24}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R = \frac{5}{8}fR^3 - \frac{7}{24}shR^2 - \frac{1}{12}s^3R$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{9fR^2 - shR + 2s^3}{12fR - 4sh}$; à TA, $\frac{15fR^2 - 7shR - 2s^3}{12fR - 4sh}$.

Z. Adeoque exhibuimus, Sphæricorum Sectorum & Segmentorum, Ungularum item aliorumque Solidorum expositorum tum magnitudines, tum momenta respectu expositorum aliquot planorum, eorúmque Centrorum gravitatis à planis illis distantiam, ipsaque gravitatis Centra.

Quæ omnia, ad alia etiam Solida, ad Sphæram ejusve partes spectantia, facile poterunt accommodari: Aut etiam ad alia Solida ex Circulorum portionibus oriunda.

Quæque, de Ungulis Semicirculi ejusve portionum; Sphæraque & portionibus hujus, dicta sunt; eadem ad Ungulas Semiellipseos hujúsve portionum; & Sphæroides,

roides, portionésque hujus; facile accommodantur.

INtelligatur BCB Sector Sphæricus; (intellige Figuram Solidam in Sphærâ, quæ conversione Sectoris Circularis BCA, seu BCα, Circa ACα, describitur:) Ex infinitis numero Pyramidulis similibus & æqualibus (juxta def. 1. Cap. 4.) componi: Quarum communis vertex sit Sphæræ Centrum C; Basésque componant Sphæricæ superficiei segmentum Sectori sphærico conveniens. Erit itaque, Tum simul omnium Magnitudo, æqualis Trienti Radii (communis Altitudinis omnium) in Sphæricam superficiem BAB, vel BαB, sectori convenientem, (utpote Basium Aggregatum,) ducto: (Quod ex 1 vel 6 hujus probabitur; propter Parallela Pyramidum Plana similia, aut etiam parallelas sectorum sphæricorum curvas superficies similes, in ratione Secundanorum:) Tum Centra gravitatis omnium, in Simili Superficie Sphæricâ, descriptâ Radio $Cb = \frac{3}{4}CB = \frac{3}{4}R$: (propter Centra gravitatis Pyramidum, in Axe suo posita, tres quadrantes ejusdem ad verticem abscindentia; per 6 hujus.) Cujus quidem superficiei b a b, radio Cb descriptæ, cum singula puncta intelligantur æque onusta, (ut quæ æqualium Pyramidum Centra gravitatis sustineant;) idem erit hujus Centrum gravitatis, atque expositi Sectoris Sphærici. Puta (in sectore BCBA) in G, medio puncto rectæ a v (sinus versi arcûs b a) per 13 hujus. Est autem, (propter $Cb = \frac{3}{4}CB = \frac{3}{4}R$:) recta $av = \frac{3}{4}AV = \frac{3}{4}v$, Adeoque $aG = \frac{1}{2}av = \frac{3}{8}v$, & $CG = Ca - aG = \frac{3}{4}CA - \frac{3}{8}AV = \frac{3}{4}R - \frac{3}{8}v = \frac{3}{8}h$, (propter $2R - v = h$.) Et similiter ostendetur, in opposito Sectore BCBα; $av = \frac{3}{4}\alpha V = \frac{3}{4}h$; & $aG = \frac{1}{2}av = \frac{3}{8}h$; & $CG = Ca - aG = \frac{3}{4}R - \frac{3}{8}h = \frac{3}{8}v$, (propter $2R - h = v$.) Hoc est; Distantia Centri gravitatis Sectoris Sphærici (in Sectoris Axe positi) à Centro Sphæræ, æqualis Tribus Quadrantibus Radii minus Tribus Octantibus altitudinis superficiei Curvæ sectori convenientis; aut etiam (quod eodem recidit) æqualis Tribus Octantibus altitudinis reliquæ superficiei sphæricæ. Quod erat propositum. A. Fig. 165.

Hoc est, speciatim in Hemisphærio, (propter $v = h = R$,) $\frac{3}{4}R - \frac{3}{8}R = \frac{3}{8}R$.

Corollarium constat, ex prop. 24. Cap. præced. Nam Sectori BCBA, dempto BBC Cono, habetur Segmentum BBA; & Sectori BCBα, addito eodem BBC Cono, habetur Segmentum BBα. Cum itaque tum Sectoris sphærici (per jam ostensa;) tum dempti additive Coni (per 6 hujus;) magnitudines & Centra gravitatis assignantur; B.

 habebitur

habebitur & Residui, vel Aggregati, Segmenti Sphærici, tum Magnitudo, tum & Centrum gravitatis. Et similiter, (mutatis mutandis,) in aliis Sphæræ portionibus.

C. Fig. 159, 160. Exempli gratia. Centri gravitatis Sectoris integri BCBA (conversione Semisectoris Circularis BCA, circa CA, descripti) distantia à C, (per modo demonstrata) est $\frac{3}{4}CA - \frac{3}{8}AV = \frac{3}{8}A\alpha - \frac{3}{8}AV = \frac{3}{8}V\alpha$, in ipso Axe AC.

Hoc est (positis ut in demonstratione propositionis præcedentis, Radio $CA = CB = C\alpha = R$; integra Peripheria, P; Arcu $BA = a$; chorda $BA = c$; sinu recto $BV = s$; & verso $AV = v$; versique residuo ad Diametrum $V\alpha = 2R - v = h$; à Centro Distantia $VC = x = R - v$ vel $v - R$; Item $a - s = e$; $a + s = f$; &c.) $\frac{3}{4}R - \frac{3}{8}v = \frac{3}{8}h$.

Adeóque ejusdem Centri gravitatis ab α, vel $\tau\alpha$, (intellige; à plano in α Sphæram Tangente,) $R + \frac{3}{8}h = \frac{7}{4}R - \frac{3}{8}v$. Atque à TA, $R - \frac{3}{8}h = \frac{1}{4}R + \frac{3}{8}v$.

Eadémque est ab iisdem $\tau\alpha$, vel TA, planis; distantia Centri gravitatis Semisectoris, (puta, qui plano per Aα transeunte, integrum bisecante, determinatur;) aut Sectoris Quadrantalis; aliúsve imperfectâ quâvis conversione descripti, (adeóque duobus ejusmodi planis, quorum communis sectio sit Aα, interjecti;) propter omnia plana, Sectorem integrum complentia, ipsorum partibus, Sectores partiales complentibus, proportionalia, atque in iisdem à $\tau\alpha$, TA, planis Tangentibus, distantiis. Quod de semi-conis, vel semisegmentis Sphæricis aliis, aliisve Solidis imperfectâ conversione descriptis; & correspondentibus Ungulis, &c. similiter obtinet. Quod semel moneo, ne sæpius sit opus idem repetere.

Est autem (per prop. præced. § Q.) Sphærici Sectoris integri BCBA, magnitudo, $\frac{1}{6}c^2P = \frac{1}{3}vRP$; (adeóque semisectoris magnitudo, $\frac{1}{12}c^2P = \frac{1}{6}vRP$;) & Ungulæ Semiquadrantalis, qui huic respondet, (intellige, qui Sectori circulari BCA insistit, aciem habens Aα,) magnitudo $\frac{1}{6}c^2R^2 = \frac{1}{3}vR^2$.

Ductâ igitur distantiâ illâ in magnitudinem; Habetur momentum sphærici sectoris integri BCBA (respectu Axis motus, Planíve Tangentis, $\tau\alpha$,) $\frac{1}{6}c^2RP + \frac{1}{16}c^2hP = \frac{7}{12}vR^2P - \frac{1}{8}v^2RP = \frac{1}{3}vR^2P + \frac{1}{8}s^2RP$: Semisectoris, $\frac{1}{6}vR^2P + \frac{1}{16}s^2RP$: Ungulæque Semiquadrantalis, $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2$.

Et, respectu ipsius TA, momentum sphærici Sectoris integri BCBA, $\frac{1}{6}c^2RP - \frac{1}{16}c^2hP = \frac{1}{12}vR^2P + \frac{1}{8}v^2RP = \frac{1}{3}vR^2P - \frac{1}{8}s^2RP$:

Semi-

Semisectoris $\frac{1}{6}vR^2P - \frac{1}{16}s^2RP$; Ungulæque Semiquadrantalis, $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$. Fig. 159, 160.

Et speciatim, quæ toti Semicirculo insistit Semiquadrantalis Ungula aciem habens $A\alpha$; (propter $v = 2R$, & $s = 0$,) Est $\frac{2}{3}R^3$, & solidum conversione factum, hoc est, Sphæra integra, $\frac{2}{3}R^2P$; & Semisolidum, seu Hemisphærium $\frac{1}{3}R^2P$. Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, vel TA, R: Momentum Ungulæ respectu $\tau\alpha$, vel TA, $\frac{2}{3}R^4$; Sphæræ, $\frac{2}{3}R^3P$; Hemisphærii $AD\alpha$; $\frac{1}{3}R^3P$.

Deinde (per prop. præced. § *R.*) Coni integri BBC, (conversione Trianguli BVC, circa $A\alpha$,) magnitudo est $\frac{xs^2P}{6R}$; Semiconi, $\frac{xs^2P}{12R}$; Ungulæ Semiquadrantalis, $\frac{1}{6}xs^2$. Hoc est; Si V sit supra C Centrum; $\frac{R-v}{6R}s^2P$; $\frac{R-v}{12R}s^2P$; $\frac{R-v}{6}s^2$: Si, infra Centrum; $\frac{v-R}{6R}s^2P$, $\frac{v-R}{12R}s^2P$, $\frac{v-R}{6}s^2$, D.

Est autem (per 6 hujus) Centri gravitatis à DC distantia, $\frac{3}{4}x$: Hoc est $\frac{3}{4}R - \frac{3}{4}v$, si supra Centrum; & $\frac{3}{4}v - \frac{3}{4}R$, si infra Centrum. Et, utroque casu, ejusdem à $\tau\alpha$ distantia, $\frac{7}{4}R - \frac{3}{4}v = R \pm \frac{3}{4}x$: Atque, à TA, $\frac{1}{4}R + \frac{3}{4}v = R \mp \frac{3}{4}x$.

Et propterea (ductis magnitudinibus in distantias) Momentum, respectu ipsius $\tau\alpha$, Coni integri BCB, $\frac{1}{6}xs^2P \pm \frac{x^2s^2P}{8R}$; Semi-coni, $\frac{1}{12}xs^2P \pm \frac{x^2s^2P}{16R}$, Semiquadrantalis Ungulæ, $\frac{1}{6}xs^2R \pm \frac{1}{8}x^2s^2$: vel, $\frac{7R-3v}{24R}xs^2P$, $\frac{7R-3v}{48R}xs^2P$, $\frac{7}{24}xs^2R - \frac{1}{8}xs^2v$. Hoc est; si supra Centrum, $\frac{7R^2-4vR-3s^2}{24R}s^2P$, $\frac{7R^2-4vR-3s^2}{48R}s^2P$, $\frac{7}{24}s^2R^2 - \frac{1}{6}s^2vR - \frac{1}{8}s^4$; Si infra Centrum, $\frac{-7R^2+4vR+3s^2}{24R}s^2P$, $\frac{-7R^2+4vR+3s^2}{48R}s^2P$, $-\frac{7}{24}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR + \frac{1}{8}s^4$.

Et, respectu ipsius TA; momentum Coni integri, Semi-coni, & Semiquadrantalis Ungulæ, $\frac{1}{6}xs^2P \mp \frac{x^2s^2P}{8R}$, $\frac{1}{12}xs^2P \mp \frac{x^2s^2P}{16R}$, $\frac{1}{6}xs^2R \mp \frac{1}{8}x^2s^2$: vel, $\frac{R+3v}{24R}xs^2P$, $\frac{R+3v}{48R}xs^2P$, $\frac{1}{24}xs^2R + \frac{1}{8}xs^2v$. Hoc est

Fig. 159, 160. est, Supra Centrum, $\frac{R^2 - 4vR + 3s^2}{24R}s^2P$, $\frac{R^2 - 4vR + 3s^2}{48R}s^2P$, $\frac{1}{24}s^2R^2 - \frac{1}{6}s^2vR + \frac{1}{8}s^4$; vel, Infra centrum $\frac{-R^2 + 4vR - 3s^2}{24R}s^2P$, $\frac{-R^2 + 4vR - 3s^2}{48R}s^2P$, $-\frac{1}{24}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR - \frac{1}{8}s^4$.

E. Hæc itaque momenta Coni, Semiconi, Ungulæve, BBC, BVC; momentis Sectoris, Semisectoris, Ungulæve, BCBA, BCA, respectivis; Subducta, Additave, prout vel supra vel infra centrum fuerint; exhibent Segmenti, Semisegmenti, Ungulæve, BBA, BVA, momenta respectu ipsius $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}vR^2P - \frac{1}{6}s^2RP + \frac{1}{6}s^2vP + \frac{s^4P}{8R}$, $\frac{1}{6}vR^2P - \frac{1}{12}s^2RP + \frac{1}{12}s^2vP - \frac{s^4P}{16R}$, $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR + \frac{1}{8}s^4 = \frac{1}{6}v^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR + \frac{1}{8}s^4$.

Et, respectu ipsius TA, $\frac{1}{3}vR^2P - \frac{1}{6}s^2RP + \frac{1}{6}s^2vP - \frac{s^4P}{8R}$, $\frac{1}{6}vR^2P - \frac{1}{12}s^2RP + \frac{1}{12}s^2vP - \frac{s^4P}{16R}$, $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR - \frac{1}{8}s^4 = \frac{1}{6}v^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR - \frac{1}{8}s^4$.

Adeoque, momenta per magnitudines dividendo (puta, Ungulæ momenta, per magnitudinem Ungulæ, $\frac{1}{6}v^2R + \frac{1}{6}s^2v = \frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2v$, prop. præced. § R. inventam,) habetur distantia Centri gravitatis Ungulæ BVA aciem habentis Aα, (adeoque & Sectoris, vel Semisectoris correspondentis,) à $\tau\alpha$, $R + \frac{3s^4}{8vR^2 - 4s^2R + 4s^2v}$: à TA, $R - \frac{3s^4}{8vR^2 - 4s^2R + 4s^2v}$: à DC, $\frac{3s^4}{8vR^2 - 4s^2R + 4s^2v}$: à BV, $\frac{3s^4}{8vR^2 - 4s^2R + 4s^2v} + R - h = \frac{3s^4}{8vR^2 - 4s^2R + 4s^2v} - R + v$.

Vel (quod eodem recidit) à $\tau\alpha$, $R + \frac{6R - 3v}{4vR + 4s^2}s^2$; à TA, $R - \frac{6R - 3v}{4vR + 4s^2}s^2 = \frac{2vR + 3s^2}{4vR + 4s^2}v$; à DC, $\frac{6R - 3v}{4vR + 4s^2}s^2 = \frac{3hs^2}{4vR + 4s^2} = \frac{3h^2v}{4vR + 4vh} = \frac{3h^2}{4R + 4h}$; à BV, $\frac{3h^2}{4R + 4h} + R - h = \frac{3h^2}{4R + 4h} - R + v$.

Et (restituendo magnitudines) momentum (respectu ipsius BV)

Segmenti Sphærici BBA, $\frac{1}{3}vR^2P - \frac{1}{6}s^2RP - \frac{s^4P}{24R}$; Semisegmenti BVA, $\frac{1}{6}vR^2P - \frac{1}{12}s^2RP - \frac{s^4P}{48R}$; & correspondentis Ungulæ, $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 - \frac{1}{24}s^4$.

Sed & possunt hæc eadem, sic aliàs haberi.

Cum enim (ut ostensum est prop. præced. §. V.) Semi-Quadrata rectarum BV & huic parallelarum Semisegmentum AVB complentium; sint rectis Vβ, &c. (fig. 164.) parabolæ portionem AVβ complentibus, proportionalia; & quidem ipsis Vβ, &c in $\frac{1}{2}R$ ductis sigillatim æqualia; atque in eisdem a τα, TA, DC, distantiis: Eadem erunt respectu ipsarum τα, TA, DC, momenta Semiquadrantalis Ungulæ (quam illa complent Semiquadrata) Semisegmento AVB insistentis; atque Prismatis portioni Parabolæ AVβ insistentis, quam illa complent parallelogramma $\beta V \times \frac{1}{2}R$; Eademque utriusque Solidi distantia Centri gravitatis, (puta G, & γ,) ab ipsis τα, TA, DC, (planis) respective. Hoc est (per 5 hujus) quantum inde distat ipsius portionis Parabolæ AVβ centrum gravitatis γ. Fig. 164

Est autem Semiparabolæ AΔC magnitudo (per 6 hujus) $\frac{2}{3}\Delta C \times CA = \frac{2}{3}R^2$; ejúsque Centri gravitatis ab Axe CΔ distantia (per 8 hujus) $\frac{3}{8}AC = \frac{3}{8}R$; adeoque à τα, $R + \frac{3}{8}R = \frac{11}{8}R$; à TA, $R - \frac{3}{8}R = \frac{5}{8}R$. Adeoque ipsius momentum respectu DCΔ, est $\frac{1}{4}R^3$; respectu τα, $\frac{11}{12}R^3$; respectu TA, $\frac{5}{12}R^3$.

Item Semiparabolæ βΔb, magnitudo $\frac{2}{3}\Delta b \times b\beta = \frac{2x^2}{3R}x = \frac{2x^3}{3R}$: Centrique gravitatis à CΔ distantia $\frac{3}{8}b\beta = \frac{3}{8}x$: (adeoque à τα, $R \pm \frac{3}{8}x$; à TA, $R \mp \frac{3}{8}x$; prout fuerit supra infrave rectam CΔ.) Adeoque momentum ejus, respectu ipsius CΔ, $\frac{x^4}{4R}$; Cui additum momentum parallelogrammi VCbβ, hoc est (propter βb $= x$, & Cb $= R - \frac{x^2}{R} = \frac{R^2 - x^2 = s^2}{R}$; Centrique gravitatis à CΔ distantiam, $\frac{1}{2}\beta b = \frac{1}{2}x$;) $\frac{x^2R^2 - x^4}{2R} = \frac{s^2}{2R}x^2$, exhibet portionis VβΔC momentum respectu ipsius CΔ, $\frac{2x^2R^2 - x^4}{4R} = \frac{2s^2 + x^2}{4R}x^2$. Hujusq; propterea portionis VβΔC (propter magnitudinem $xR - \frac{x^3}{3R}$) distantia Centri gravitatis à CΔ, est

Fig. 164. $\frac{6x^2R^2 - 3x^4}{12xR^2 - 4x^3} = \frac{6R^2 - 3x^2}{12R^2 - 4x^2}x$: Adeoque à $\tau\alpha$, $R \pm \frac{6R^2 - 3x^2}{12R^2 - 4x^2}x$; à TA, $R \mp \frac{6R^2 - 3x^2}{12R^2 - 4x^2}x$; (prout ſupra infrave Centrum fuerit.) Et (reſtituendo Magnitudinem) Momentum ejuſdem $V\beta\Delta C$, reſpectu $\tau\alpha$, $xR^2 - \frac{1}{3}x^3 \pm \frac{2R^2 - x^2}{4R}x^2$, & reſpectu TA, $xR^2 - \frac{1}{3}x^3 \mp \frac{2R^2 - x^2}{4R}x^2$.

Atque hæc portionis $V\beta\Delta C$ momenta reſpectiva, dempta additave (prout ſupra infrave Centrum C contigerit V punctum,) reſpectivis Semiparabolæ $A\Delta C$ (reſpectu rectarum $\tau\alpha$, TA,) momentis, $\frac{1}{12}R^3$, $\frac{5}{12}R^3$: exhibent Portionis $AV\beta$, momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{12}R^3 \mp xR^2 \pm \frac{1}{3}x^3 - \frac{2R^2 - x^2}{4R}x^2$; & reſpectu TA, $\frac{5}{12}R^3 \mp xR^2 \pm \frac{1}{3}x^3 + \frac{2R^2 - x^2}{4R}x$.

Reductione autem factâ, valorem ipſius x reſtituendo, reperientur hæc momentis ſuperiùs deſignatis convenire.

Eſt enim $x = \pm R \mp v$; prout ſupra infrave Centrum contigerit; (Hoc eſt, $x = R - v$, ſupra Centrum; vel $x = -R + v$ ſi infra Centrum.) Adeoque $\mp xR^2 = -R^3 + vR^2$.

Similiter $x^3 = \pm R^3 \mp 3vR^2 \pm 3v^2R \mp v^3$. Adeoque $\pm\frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{3}R^3 - vR^2 + v^2R - \frac{1}{3}v^3$. Hoc eſt (propter $v^2 = 2vR - s^2$, & $v^3 = 4vR^2 - 2s^2R - s^2v$,) $\pm\frac{1}{3}x^3 = +\frac{1}{3}R^3 - \frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{3}s^2R + \frac{1}{3}s^2v$.

Et utroque caſu (hoc eſt, ſive $x = +R - v$, ſive $x = -R + v$,) eſt $x^2 = R^2 - 2vR + v^2 = R^2 - s^2$. Adeoque $\frac{2R^2 - x^2}{4R}x^2 = \frac{R^2 + s^2}{4R}x^2 = \frac{R^4 - s^4}{4R} = \frac{1}{4}R^3 - \frac{s^4}{4R}$.

Adeoque momentum Portionis $AV\beta$, reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{12}R^3 \mp xR^2 \pm \frac{1}{3}x^3 - \frac{2R^2 - x^2}{4R}x^2 = \frac{2}{3}vR^2 - \frac{1}{3}s^2R + \frac{1}{3}s^2v + \frac{s^4}{4R}$; & reſpectu TA, $\frac{5}{12}R^3 \mp xR^2 \pm \frac{1}{3}x^3 + \frac{2R^2 - x^2}{4R}x^2 = \frac{2}{3}vR^2 - \frac{1}{3}s^2R + \frac{1}{3}s^2v - \frac{s^4}{4R}$.

Atque hæc momenta (propter priſmatis ipſi $AV\beta$ inſiſtentis altitudinem, $\frac{1}{2}R$) ducta in $\frac{1}{2}R$; exhibent iſtius Priſmatis momentum, hoc eſt, momentum Semiquadrantalis Ungulæ Semiſegmento Circulari ABV inſiſten-

ſiſtentis (aciem habentis $A\alpha$) reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR + \frac{1}{8}s^4$; & reſpectu TA, $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR - \frac{1}{8}s^4$. Ut prius.

Indeque Centri gravitatis diſtantia, ſive à $\tau\alpha$, ſive TA, ſivé à BV, elicietur, ut prius.

Porro; Coni integri $BB\alpha$ (Trianguli $BV\alpha$, circa $A\alpha$ converſione deſcripti,) magnitudo (per prop. præced. § S.) $\frac{s^2h}{6R}P = \frac{2R - v}{6R}s^2P$; F. Fig. 159, 160.

ſemiconi, $\frac{2R - v}{12R}s^2P$; Ungulæque $\frac{1}{6}s^2h = \frac{1}{3}s^2R - \frac{1}{6}s^2v$.

Centrique gravitatis diſtantia (per 6 hujus) à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}h = \frac{3}{2}R - \frac{3}{4}v$; à TA, $2R - \frac{3}{4}h = \frac{1}{2}R + \frac{3}{4}v$.

Quæ quidem diſtantiæ, in magnitudines ductæ, exhibent momenta, reſpectu ipſius $\tau\alpha$, Coni $\frac{s^2h^2P}{8R} = \frac{4R^2 - 4vR + v^2}{8R}s^2P = \frac{4R^2 - 2vR - s^2}{8R}s^2P$; Semiconi $\frac{4R^2 - 2vR - s^2}{16R}s^2P$; Semiquadrantalis, Ungulæ, $\frac{1}{8}s^2h^2 = \frac{1}{2}s^2R^2 - \frac{1}{4}s^2vR - \frac{1}{8}s^4$.

Et, reſpectu ipſius TA, Momentum Coni $\frac{1}{3}s^2hP - \frac{s^2h^2P}{8R} = \frac{4R^2 - 2vR + 3s^2}{24R}s^2P$; Semiconi, $\frac{4R^2 - 2vR + 3s^2}{48R}s^2P$; Ungulæque $\frac{1}{6}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2vR + \frac{1}{8}s^4 = \frac{1}{3}s^2hR - \frac{1}{8}s^2h^2$.

Atque hæc momenta, momentis Sphærici Segmenti, Semiſegmenti, & correſpondentis Ungulæ, BBA, BVA, reſpective addita, exhibent momenta, reſpectu ipſius $\tau\alpha$, Sphærici ſectoris $B\alpha BA$, $\frac{1}{3}vR^2P + \frac{1}{3}s^2RP - \frac{1}{12}s^2vP$; Semiſectoris $B\alpha A$, $\frac{1}{6}vR^2P + \frac{1}{6}s^2RP - \frac{1}{24}s^2vP$; & correſpondentis Ungulæ, $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2vR$.

Et reſpectu TA, momentum Sectoris Sphærici $B\alpha BA$, $\frac{1}{3}vR^2P + \frac{1}{12}s^2vP$; Semiſectoris $B\alpha A$, $\frac{1}{6}vR^2P + \frac{1}{24}s^2vP$; Ungulæque $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{12}s^2vR$.

Vel etiam; Intelligatur, ſuper $BC\alpha$ Triangulo, Ungula Semiquadrantalis, aciem habens $A\alpha$: Quæ Pyramis erit verticem habens α; & baſin Triangularem ſuper BC rectam. Hujuſque Baſis Triangularis (in rectam CB projectæ) Centrum gravitatis puta β, diſtabit à C (vertice Trianguli) $\frac{2}{3}$CB, (per 6 hujus;) ejuſque ab $A\alpha$ (plano) diſtantia, $\beta\gamma = \frac{2}{3}BV = \frac{2}{3}s$; &, in rectâ inde ad α ducta, Trianguli centrum gravitatis ut g, abſcindet $\alpha g = \frac{3}{4}\alpha\beta$; Cujus itaque

Fig. 159, 160. ab $A\alpha$ distantia $gG = \frac{3}{4}\beta\gamma = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3}s = \frac{1}{2}s$: Ejusque à $\tau\alpha$ distantia, $G\alpha = \frac{3}{4}\gamma\alpha$; hoc est (propter $\gamma\alpha = R \pm \frac{2}{3}x = \frac{5}{3}R - \frac{2}{3}v$,) $\frac{5}{4}R - \frac{1}{2}v$; adeoque ejusdem à TA distantia $\frac{3}{4}R + \frac{1}{2}v$.

Quæ quidem distantiæ, in $\frac{1}{6}s^2R$ (pyramidis magnitudinem, per prop. præced. § S) ductæ; exhibent momentum Pyramidis; (seu Ungulæ $BC\alpha$, aciem habentis $A\alpha$,) respectu ipsius $\tau\alpha$, $\frac{5}{24}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2vR$; &, respectu ipsius TA, $\frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{12}s^2vR$. Adeoque Solidi (scil. Coni, conicè excavati,) conversione Trianguli $BC\alpha$ circa $A\alpha$ facti, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{24}s^2RP - \frac{1}{12}s^2vP$; &, respectu TA, $\frac{1}{8}s^2RP + \frac{1}{12}s^2vP$: Semisolidique momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{48}s^2RP - \frac{1}{24}s^2vP$; &, respectu TA, $\frac{1}{16}s^2RP + \frac{1}{24}s^2vP$.

Atque hæc momenta, momentis Sphærici Sectoris, Semisectoris, & correspondentis Ungulæ, BCBA, BCA, respective addita; exhibent momenta Sectoris, Semisectoris, Ungulæque, $B\alpha BA$, $B\alpha A$, respectu ipsius $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}vR^2P + \frac{1}{3}s^2RP - \frac{1}{12}s^2vP$, $\frac{1}{6}vR^2P + \frac{1}{6}s^2RP - \frac{1}{24}s^2vP$, $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2vR$;

Et, respectu ipsius TA, $\frac{1}{3}vR^2P + \frac{1}{12}s^2vP$, $\frac{1}{6}vR^2P + \frac{1}{24}s^2vP$, $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{12}s^2vR$. Ut prius.

Quæ quidem momenta, per magnitudines divisa, (prop. præced. § S. traditas) exhibent distantiam Centri gravitatis, à $\tau\alpha$, $\frac{\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2vR}{\frac{1}{3}vR^2 + \frac{1}{6}s^2R} = R + \frac{2s^2R - s^2v}{4vR + 2s^2}$; & à TA, $R - \frac{2s^2R - s^2v}{4vR + 2s^2}$; à DC, $\frac{2s^2R - s^2v}{4vR + 2s^2} = \frac{hs^2}{4vR + 2s^2}$.

G. Similiter; Coni integri BAB, (Trianguli BAV conversione circa $A\alpha$ descripti) magnitudo (per § R, prop. præced.) $\frac{s^2vP}{6R}$; Semiconi $\frac{s^2vP}{12R}$; & Semiquadrantalis Ungulæ $\frac{1}{6}s^2v$. Centrique gravitatis distantia à TA, $\frac{3}{4}v$ (per 6 hujus;) atque $\tau\alpha$ $2R - \frac{3}{4}v$. Quæ quidem distantiæ in magnitudines ductæ, exhibent, respectu TA, momentum Coni $\frac{s^2v^2P}{8R}$; Semiconi $\frac{s^2v^2P}{16R}$; Ungulæque $\frac{1}{8}s^2v^2 = \frac{1}{4}s^2vR - \frac{1}{8}s^4$: Respectu $\tau\alpha$, momentum Coni $\frac{1}{3}s^2vP - \frac{s^2v^2P}{8R}$, Semiconi $\frac{1}{6}s^2vP - \frac{s^2v^2P}{16R}$; Ungulæque $\frac{1}{3}s^2vR - \frac{1}{8}s^2v^2 = \frac{1}{12}s^2vR + \frac{1}{8}s^4$.

Quæ quidem momenta, ex respectivis momentis Segmenti, Semisegmenti

ſegmenti, Ungulæque, BBA, BVA, (§ E. traditis,) ſubducta; Fig. 159,
Relinquunt Annuli, (converſione ſegmenti ABA circa $A\alpha$,) momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}vR^2P - \frac{1}{6}s^2RP + \frac{1}{12}s^2vP$; Semiannuli $\frac{1}{6}vR^2P - \frac{1}{12}s^2RP + \frac{1}{24}s^2vP$; Et correſpondentis Ungulæ $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{12}s^2vR = \frac{1}{6}v^2R^2 + \frac{1}{12}s^2vR$. Atque, reſpectu TA, momentum Annuli $\frac{1}{3}vR^2P - \frac{1}{6}s^2RP - \frac{1}{12}s^2vP$; Semiannuli $\frac{1}{6}vR^2P - \frac{1}{12}s^2RP - \frac{1}{24}s^2vP$: Ungulæque $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2vR = \frac{1}{6}v^2R^2 - \frac{1}{12}s^2vR$. Adeoque (propter Ungulæ magnitudinem § Q, R. prop. præced. $\frac{1}{6}v^2R = \frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R$,) diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $R + \frac{s^2}{2v} = R + \frac{1}{2}h$; à TA, $R - \frac{1}{2}h$; atque à DC, $\frac{1}{2}h = \frac{s}{2v}s$. 160.

Porro, Cum jam exhibuerim, Momenta reſpectu rectæ $\tau\alpha$ (aut huic parallelæ) ut Axis Motus ſeu Libræ; Solidorum ex converſione vel ſemiconverſione Semiſectorum vel Semiſegmentorum BCA, $B\alpha A$, BVA, circa $A\alpha$ ut axem Converſionis; & Ungularum Semiquadrantalium, illis correſpondentium, aciem habentium $A\alpha$: Eâdem operâ etiam exhibuimus, Momenta reſpectu $A\alpha$ ut Axis Motûs ſeu Libræ, Solidorum ex converſione vel Semiconverſione eorundem Semiſectorum vel Semiſegmentorum BCA, $B\alpha A$, BVA, circa $\tau\alpha$ (vel huic parallelam) ut axem Converſionis. Et Ungularum Semiquadrantalium illis correſpondentium, aciem habentium $\tau\alpha$, vel huic parallelam. (Quod &, Solidis ex quavis alia converſione imperfectâ, non minus quam ex Semiconverſione ortis; Ungulíſque aliis quam Semiquadrantalibus; mutatis mutandis, accommodabitur,) H.

Quippe idem omnino momentum erit; ſive ſit $A\alpha$ Axis Converſionis, & $\tau\alpha$ axis Libræ; ſive $\tau\alpha$ axis converſionis, & $A\alpha$ axis Libræ. (Et ſimiliter in ungulis; idem momentum erit, ſive Acies Ungulæ ſit $A\alpha$, & Axis Libræ $\tau\alpha$; ſive Acies Ungulæ $\tau\alpha$, & Axis Libræ $A\alpha$, & ſimiliter alibi.)

Cum enim, (verbi gratia,) rectæ BV momentum reſpectu $A\alpha$, ſit $BV \times \frac{1}{2}BV$, (propter ipſius centrum gravitatis in ſui medio,) hoc eſt, $\frac{1}{2}BVq$: Atque tantundem etiam ſit Triangulum, in Ungula Semiquadrantali (cujus Acies $A\alpha$,) eidem BV inſiſtens, (ut dudum oſtenſum eſt:) Erit hujus Trianguli momentum reſpectu $\tau\alpha$ rectæ (propter $V\alpha$ diſtantiam) $\frac{1}{2}BVq \times V\alpha$. Sed & in Ungula Semiquadrantali cujus acies $\tau\alpha$, eidem BV inſiſtet parallelogrammum cujus altitudo (propter angulum Semiquadrantalem) æqualis erit ipſi $V\alpha$ diſtantiæ;

Fig. 159, 160. ſtantiæ; cujus itaque magnitudo erit $BV \times V\alpha$: Cúmque hujus Centrum gravitatis ſit in mediâ ſui longitudine (per 2 hujus,) adeóque illius diſtantia ab $A\alpha$, ſeu perpendiculari plano huic inſiſtente, ſit $\frac{1}{2}BV$; erit ejuſdem Parallelogrammi, reſpectu axis Libræ $A\alpha$, momentum, $\frac{1}{2}BV \times BV \times V\alpha = \frac{1}{2}BVq \times V\alpha$, ut prius. Cúmque idem obtineat, de ſingulis rectis ipſi BV parallelis, Semiſectores vel Semiſegmenta B C A, B α A, B V A, complentibus: Idem de totius Ungulæ Momento obtinebit: Nempe idem omnino eſſe Momentum Ungulæ (ſuper eodem plano,) ſive ſit $A\alpha$ acies, & $\tau\alpha$ axis libræ; ſive $\tau\alpha$ acies, & axis libræ $A\alpha$.

Atque idem plane obtinet de Solidis converſione, vel Semiconverſione deſcriptis: Quippe hæc tum magnitudine, tum & momento, nihil aliud ab Ungulis Semiquadrantalibus correſpondentibus differunt quam quod ſint ad illas in ratione P ad R, vel $\frac{1}{2}P$ ad R: ut ſupra oſtenſum eſt. Adeoque tum facti ex converſione B V circa $A\alpha$ momentum reſpectu $\tau\alpha$, tum ejuſdem converſione circa $\tau\alpha$, momentum reſpectu $A\alpha$, eſt $\frac{\frac{1}{2}BVq \times V\alpha}{R}P$ ſeu $\frac{BVq \times V\alpha}{2R}P$; factique ex ſemiconverſione, utrobique, $\frac{BVq \times V\alpha}{4R}P$. Et ſic ubique.

I. Eſt itaque Semiquadrantalis Ungulæ ſuper B C A ſectore, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum reſpectu rectæ (planive perpendicularis) $A\alpha$ (ut § C.) $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2$; Solidique ejuſdem integrâ converſione circa $\tau\alpha$ facti momentum (reſpectu ipſius $A\alpha$) $\frac{1}{3}vR^2P + \frac{1}{8}s^2RP$; & Semiſolidi $\frac{1}{6}vR^2P + \frac{1}{16}s^2RP$.

Adeoque, propter Ungulæ magnitudinem (vel momentum Sectoris B C A reſpectu $\tau\alpha$) $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{3}sR^2$ (per prop. præced. § I.) erit iſtius Ungulæ Centri gravitatis ab $A\alpha$ diſtantia $\frac{8vR + 3s^2}{12a + 8s} = \frac{14R - 3v}{12a + 8s}v = \frac{8R + 3h}{12a + 8s}v$. Eademque eſt diſtantia ab $A\alpha$ (rectâ, planove perpendiculari) Solidi converſione (perfectâ vel imperfectâ) BCA circa $\tau\alpha$ deſcripti.

Ungulæque Semiquadrantalis ſuper eodem B C A ſectore aciem habentis T A, Momentum reſpectu ipſius $A\alpha$, eſt (ut § C) $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$; Solidique Correſpondentis, $\frac{1}{3}vR^2P - \frac{1}{8}s^2RP$; & Semiſolidi, $\frac{1}{6}vR^2P - \frac{1}{16}s^2RP$. Adeoque, (propter Ungulæ magnitudinem, $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{3}sR^2$, per § I prop. præced.) diſtantia Centri gravitatis

tatis istius Ungulæ (adeoque & Solidi seu Semisolidi correspondentis) Fig. 159, 160.
ab $A\alpha$, est $\frac{8vR-3s^3}{12a-8s} = \frac{8R-3h}{12a-8s}v$.

Et, speciatim, quæ toti Semicirculo insistit semiquadrantalis Ungulæ aciem habentis sive $\tau\alpha$, sive T A, Momentum respectu $A\alpha$, est $\frac{2}{3}R^4$; Solidique correspondentis $\frac{2}{3}R^3P$; & Semisolidi, $\frac{1}{3}R^3P$: Centrique gravitatis ab $A\alpha$ distantia, $\frac{8R^2}{3P}$.

Item, Semiquadrantalis Ungulæ super B V A Semisegmento, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $A\alpha$, est (ut § E.) $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR + \frac{1}{8}s^4$; (Solidique correspondentis, & Semisolidi, momenta, ad hoc; ut P, vel $\frac{1}{2}P$, ad R.) Adeoque, propter Ungulæ magnitudinem (vel momentum Semisectoris B V A respectu $\tau\alpha$,) $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{2}svR + \frac{1}{3}s^3$, (per § L. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis istius Ungulæ (adeoq; solidi Semisolidive correspondentis) ab $A\alpha$, $\frac{8vR^3-4s^2R^2+4s^2vR+3s^4}{12aR^2-12sR^2+12svR+8s^3} = \frac{4vR^2+4s^2R+3s^2h}{12eR^2+12svR+8s^3}v$. K.

Ungulæque Semiquadrantalis super eodem B V A Semisegmento, aciem habentis T A, momentum respectu ejusdem $A\alpha$, est (ut § E.) $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR - \frac{1}{8}s^4$; (Solidique aut Semisolidi correspondentis momentum, ad hoc; ut P vel $\frac{1}{2}P$ ad R:) Adeoque, propter Ungulæ magnitudinem (seu plani BVA momentum respectu TA,) $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{2}svR - \frac{1}{3}s^3$, (per § L. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis Ungulæ (Solidive aut Semisolidi conversione facti) ab $A\alpha$, $\frac{8vR^3-4s^2R^2+4s^2vR-3s^4}{12aR^2-12sR^2+12svR-8s^3} = \frac{4vR^2+4s^2R-3s^2h}{12eR^2+12svR-8s^3}v$.

Similiter, Semiquadrantalis Ungulæ super eodem B V A, aciem habentis B V, momentum respectu $A\alpha$, est (ut § E,) $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 - \frac{1}{24}s^4 = \frac{1}{6}v^2R^2 - \frac{1}{24}v^2h^2$; (Solidique & Semisolidi conversione facti momenta, ad hoc, ut P & $\frac{1}{2}P$ ad R:) Adeoque propter Ungulæ magnitudinem (vel plani respectu B V momentum) $-\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{2}avR - \frac{1}{6}s^3 = \mp\frac{1}{2}exR + \frac{1}{6}svz$; (per § L prop. præc) Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{8vR^3-4s^2R^2-s^4}{-12aR^2+12sR^2+12avR-4s^3}$:
Vel (quod eodem recidit) $\frac{c^2+s^2}{4svz\mp12exR}v^2$, seu $\frac{4R-v=2R+h}{4svz\mp12exR}v^3$, seu $\frac{4vR^2-s^2h}{-12eR^2+12avR-4s^3}v$.

Item, Semiquadrantalis Ungulæ super $B\chi A$, aciem habentis $\tau\alpha$, L.
momentum

Fig. 159, 160. momentum reſpectu Aα, (ut § F.) $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2vR = \frac{1}{2}s^2R^2 + \frac{1}{12}v^3R$; (Solidique converſione facti, $\frac{1}{3}vR^2P + \frac{1}{3}s^2RP - \frac{1}{12}s^2vP$; & Semiſolidi $\frac{1}{6}vR^2P + \frac{1}{6}s^2RP - \frac{1}{24}s^2vP$:) Adeoque, propter Ungulæ magnitudinem (ſeu plani momentum reſpectu $r\alpha$,) $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{5}{6}sR^2 - \frac{1}{6}svR$ per § M. prop. præced.) Diſtantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{4vR^2 + 4s^2R - s^2v}{6aR + 10sR - 2sv} = \frac{4R^2 + 4hR - s^2}{6fR + 2sh}v$.

Ungulæque Semiquadrantalis ſuper eodem BαA, aciem habentis TA, momentum reſpectu ejuſdem Aα (ut § F.) $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{12}s^2vR$; (Solidique & Semiſolidi, converſione facti, $\frac{1}{3}vR^2P + \frac{1}{12}s^2vP$, $\frac{1}{6}vR^2P + \frac{1}{24}s^2vP$:) Adeoque, propter Ungulæ magnitudinem, (ſeu plani momentum reſpectu TA,) $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{6}sR^2 + \frac{1}{6}svR$, (per § M. prop. præced.) Diſtantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{4vR^2 + s^2v}{6aR + 2sR + 2sv} = \frac{4R^2 + s^2}{6fR - 2sh}v$.

M. Eodem modo, Semiquadrantalis Ungulæ Triangulo BCα inſiſtentis aciem habentis $r\alpha$, momentum reſpectu Aα, eſt (ut § F.) $\frac{5}{24}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2vR$; (& Solidorum, converſione vel ſemiconverſione deſcriptorum, his proportionalia; nempe in ratione P ſeu $\frac{1}{2}P$ ad R: quod & in ſequentibus intellige.) Adeoque (propter magnitudinem $\frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}svR$, per § M. prop. præced.) diſtantia Centri gravitatis ab Aα, eſt $\frac{5sR - 2sv}{12R - 4v} = \frac{5R - 2v}{12R - 4v}s$. Ungulæque Semiquadrantalis ſuper eodem BCα inſiſtentis, aciem habentis TA, momentum reſpectu Aα, eſt (ut § F.) $\frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{12}s^2vR$; adeoque (propter magnitudinem $\frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{6}svR$ per § M. prop. præced.) Diſtantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{3R + 2v}{12R + 4v}s$.

Ungulæque Semiquadrantalis ſuper Triangulo BVC, aciem habentis $r\alpha$, momentum reſpectu Aα; eſt (ut § D.) $\frac{7R - 3v}{24}s^2x$: Et magnitudo (per § K. prop. præced.) $\frac{5R - 2v}{6}sx$: Diſtantiaque Centri gravitatis ab Aα $\frac{7R - 3v}{20R - 8v}s$. Aciemque habentis TA, momentum (reſpectu Aα,) $\frac{R + 3v}{24}s^2x$; Magnitudo, $\frac{R + 2v}{6}sx$; Diſtantiaque $\frac{R + 3v}{4R + 8v}s$.

Et

Et Semiquadrantalis Ungulæ super Triangulo $BV\alpha = BC\alpha \pm BVC$, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $A\alpha$ $\frac{5R-2v}{24}s^2R \pm \frac{7R-3v}{24}s^2x$; hoc est (propter $x = R - v$, supra centrum, addendum; vel $x = -R + v$, infra Centrum, auferendum;) $\frac{5R-v}{24}s^2R + \frac{7R^2-10vR+3v^2}{24}s^2 = \frac{12R^2-12vR+3v^2}{24}s^2$; vel, propter $v^2 = 2vR - s^2$,) $\frac{1}{2}s^2R^2 - \frac{1}{4}s^2vR - \frac{1}{8}s^4 = \frac{1}{8}s^2h^2$; (ut § F.) Adeoq; (propter mag. $\frac{3R-v}{6}sR \pm \frac{5R-2v}{6}sx = \frac{3R-v}{6}sR + \frac{5R^2-7vR+2v^2}{6}s = \frac{4}{3}sR^2 - \frac{4}{3}svR + \frac{1}{3}sv^2 = \frac{4}{3}sR^2 - \frac{2}{3}svR - \frac{1}{3}s^3 = \frac{1}{3}sh^2$; ut § M. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{3}{8}s$. Aciemque habentis TA; momentum (ut § F.) $\frac{1}{3}s^2hR - \frac{1}{8}s^2h^2$; Magnitudo (ut § M. prop. præced.) $shR - \frac{1}{3}sh^2$; Distantiaque $\frac{8R-3h}{24R-8h}s = \frac{2R+3v}{8R+8v}s$. Fig. 159, 160.

Ungulæque Semiquadrantalis super Triangulo BAV, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $A\alpha$, est (ut § G,) $\frac{1}{12}s^2vR + \frac{1}{8}s^4$; & magnitudo (propter magnitudinem Trianguli $\frac{1}{2}sv$; distantiamque Centri gravitatis à TA $\frac{2}{3}v$, & à $\tau\alpha$ $2R - \frac{2}{3}v$,) $svR - \frac{1}{3}sv^2 = \frac{1}{3}svR + \frac{1}{3}s^3$; & distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$ $\frac{2vR+3s^2}{8vR+8s^2}s$. Aciemque habentis TA, momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{4}s^2vR - \frac{1}{8}s^4$; magnitudo, $\frac{1}{3}sv^2 = \frac{2}{3}svR - \frac{1}{3}s^3$; Centrique gravitatis ab $A\alpha$ distantia, $\frac{6vR-3s^2}{16vR-8s^2}s = \frac{3}{8}s$. N.

Et Semiquadrantalis Ungulæ super ABA segmento, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $A\alpha$, est (ut § G.) $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{12}s^2vR = \frac{1}{6}v^2R^2 + \frac{1}{12}s^2vR$; magnitudo (per § N. pr. præ.) $\frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{6}svR$; Centrique gravitatis ab $A\alpha$ distantia, $\frac{4vR^2-2s^2R+s^2v}{6aR-6sR+2sv} = \frac{4R^2-2hR+s^2}{6eR+2sv}v$. Aciemque habentis TA, momentum $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2vR = \frac{1}{6}v^2R^2 - \frac{1}{12}s^2vR$; magnitudo, $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}svR$; distantiaque $\frac{4vR^2-2s^2R-s^2v}{6aR-6sR-2sv} = \frac{4R^2-2hR-s^2}{6eR-2sv}v$.

Atque jam (inter alia) Solidorum Semisectoris BCA, $B\alpha A$, O.

aut

Fig. 159, 160. aut ſemiſegmenti BVA, Segmentive ABA (nedum Triangulorum BCα, BCV, BAV, BVα, &c.) circa Aα, integra converſione deſcriptorum, Centra gravitatis determinavimus: Oſtendimus utique, diſtantiam Centri gravitatis à τα, TA, BV, &c. Atque in ipſo Axe Aα ſitum eſſe, conſtat, ex prop. 5 hujus. Ipſum itaque punctum determinavimus.

Et ſimiliter, Centra gravitatis Solidorum integrorum, quæ (non modo Sectoris BCB, vel BαB, vel Segmenti BBA; ut quæ in medio Axis converſionis eſſe manifeſtum eſt; ſed &) Semiſectoris BCA, vel BαA, aut Semiſegmenti BVA, Segmentive ABA, circa τα vel TA, aut etiam Semiſegmenti BVA circa BV, converſione integra deſcribuntur, determinavimus. Cum enim eorum diſtantias ab Aα plano deſignavimus, eáque in ipſo converſionis Axe τα, TA, vel BV, eſſe conſtet (per 5 hujus:) ipſa Axis puncta, quæ Centra gravitatis ſunt, determinantur.

Verùm in horum Semiſolidis, ſolidiſve imperfectâ quâvis converſione deſcriptis; Unguliſque correſpondentibus: nondum determinantur ipſa Centra; ut quæ non in ipſo Axe poſita ſunt, ſed alibi, extra axem, in plano per axem tranſeunte.

Cum tamen in quo per axem converſionis, ſeu aciem Ungulæ, tranſeunte plano conſtituta ſint, jam conſtet ex § G prop. 12. hujus; (nempe, in eo per converſionis axem plano quod ſolidorum, converſione factorum, arcum converſionis biſecat; eoque per Ungularum aciem plano, quod biſecat ungulæ altitudinem:) Atque in quâ quidem hujus plani rectâ, jam ſit determinatum; nempe in eis quorum Axis ſeu Acies eſt Aα, per Centri gravitatis diſtantiam, à τα, TA, BV, &c. & in eis quorum Axis eſt τα, TA, vel BV, per ejus ab Aα diſtantiam: Id ſolum ſupereſt, ut in quo iſtius rectæ puncto ſitum ſit, determinemus per ipſius à converſionis Axe diſtantiam in eis quæ converſione deſcribuntur Solidis; &, in Ungulis, per diſtantiam à perpendiculari per Aciem Plano. (Unde ipſum gravitatis Centrum determinatum iri conſtat, per prop. 26. Cap. præced.) Id autem ſic aggredimur.

P. Ut Sectorem Sphæricum integrum, BCBA, § A, (plani BCA circa rectam Aα integra converſione deſcripti,) ſic ejuſdem ſemiſſem ſeu Semiſectorem Sphæricum, aliúmve imperfectum, (converſione dimidiâ, aliâve imperfectâ deſcriptum,) intelligamus ex Pyramidulis (ſimilibus & æqualibus) componi, (juxta def. 1. Cap. 4.) Quarum communis vertex ſit Sphæræ centrum, Baſéſque compleant Superficiei

ficiei Sphæricæ portionem Semiſectori huic, Sectorive imperfecto, con- Fig. 159,
venientem: nempe Trilineum Sphæricum, quod *Sectoris Baſin* ap- 160.
pellabimus.

Cumque (per 6 hujus) Centri gravitatis in Pyramide, diſtantia à vertice pyramidis ſit $\frac{3}{4}$ totius altitudinis; Pyramidularum illarum omnia Centra gravitatis (æqualibus ab invicem diſtantiis remota) intelligantur complere Simile Trilineum Sphæricum, ut b a, fig. 165. cujus radius ſit $Cb = \frac{3}{4}CB = \frac{3}{4}R$. Cujus cum ſingula puncta, (utpote æqualium Pyramidum Centra gravitatis,) æqualiter onerata reputentur; Idem erit Trilinei hujus, ipſiúſque expoſiti Semiſectoris, Sectoríſve imperfecti, Centrum gravitatis; (per 16 Cap. 4.) adeóque tantundem ab A α converſionis axe diſtabit.

Quod & ſimiliter accommodabitur Ungulæ eidem B C A ſectori circulari inſiſtenti; Cujus utique (pari ratione) Centrum gravitatis idem erit atque Superficiei Ungulæ Cylindraceæ arcui b a inſiſtentis aciem habentis A α; adeoque tantundem ab A α perpendiculari plano diſtans.

Eſt autem (per § V, W. prop. 13.) Semiquadrantalis Ungulæ ſuperficialis, arcui B A inſiſtentis, momentum reſpectu ipſius A α; idem atque ſumma quadratorum ſinuum rectorum ipſi A B arcui convenientium; adeóque æquatur facto ex B V A ſemiſegmento, in R ducto; hoc eſt, (propter $BVA = \frac{1}{2}eR + \frac{1}{2}sv$, per § F. prop. præced.) $\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}svR$: Atque hoc, per Ungulæ ſuperficialis magnitudinem diviſum; hoc eſt, (per § N. Q. prop. 13) per vR diviſum; exhibet iſtius Ungulæ Superficialis B A, diſtantiam Centri gravitatis ab A $\alpha = \frac{e}{2v}R + \frac{1}{2}s$. Adeoque (propter $Cb = \frac{3}{4}CB = \frac{3}{4}R$,) arcui b a inſiſtentis Ungulæ ſuperficialis, & propterea (per jam demonſtrata) Ungulæ Solidæ ipſi B C A inſiſtentis, aciem habentis A α, diſtantiam Centri gravitatis ab A α plano, $\frac{3e}{8v}R + \frac{3}{8}s$. (Et, ſpeciatim, iſtius quæ toti A D α ſemicirculo inſiſtit, Ungulæ, Diſtantia Centri gravitatis ab A α, propter $s = 0$ adeoque $e = a = \frac{1}{2}P$, & $v = 2R$, erit $\frac{3}{32}P$.)

Eadémque eſſet, diſtantia Centri gravitatis Solidi, imperfectâ ejuſdem B C A circa A α converſione deſcripti, ab A α converſionis axe; demptâ curvaturâ. Sed, propter curvaturam, minuenda eſt pro ratione quam habet ad converſionis arcum chorda ſua, (per prop. 14. hujus) hoc eſt, in Semiconverſione, ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$, ſeu ut $4R$ ad P; (& in aliis converſionibus ſimiliter, mutatis mutandis,

Fig. 159, 160. in ratione Chordæ ad Arcum;) Adeóque Semisolidi, ipsius B C A semiconversione circa A α descripti, distantia Centri gravitatis à conversionis suæ Axe A α, est $\frac{3eR+3sv}{2vP}R$. (Et, speciatim, quod Semiconversione Semicirculi A D α describitur, Hemisphærii, Distantia Centri gravitatis ab A α, est $\frac{3}{8}R$.)

Atque hæ distantiæ in magnitudines ductæ, (nempe Ungulæ, $\frac{1}{3}vR^2$; & Semisolidi, $\frac{1}{6}vRP$, per § Q. prop. præced.) exhibent Semiquadrantalis Ungulæ super B C A sectore, aciem habentis A α, momentum respectu ipsius A α, $\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{8}svR^2$; Semisolidique correspondentis, $\frac{1}{4}eR^3+\frac{1}{4}svR^2$. Et speciatim, pro Ungula Semicirculi, & Hemisphærio; $\frac{1}{16}R^3P$, & $\frac{1}{8}R^3P$.

(Atque hic obiter notare non erit importunum, momentum Semisolidi respectu sui axis conversionis, duplum esse momenti correspondentis Ungulæ Semiquadrantalis respectu aciei suæ seu Plani per illam perpendicularis; quod in hujusmodi casibus semper obtinet, quod semel moneo: Cum enim magnitudo ad magnitudinem sit ut $\frac{1}{2}P$ ad R; Centrique distantia, propter conversionem dimidiam, ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$; erit quæ ex utrisque componitur, momentorum ratio $\frac{\frac{1}{2}P}{R}\times\frac{2R}{\frac{1}{2}P}=\frac{2}{1}$.)

Q. Deinde, quæ Triangulo B V C insistit Semiquadrantalis Ungula, aciem habens A α, Pyramis est; verticem habens C Centrum; Basemque Triangularem rectæ B V insistentem; cujus quidem Trianguli Centrum gravitatis ab A α plano, distat $\frac{2}{3}BV=\frac{2}{3}s$; Centrúmque gravitatis Pyramidis (utpote in rectâ, à basis Centro ad C pyramidis verticem ductâ, quæ est Pyramidis axis, tres quadrantes versus C abscindens; per 6 hujus;) distabit ab A α plano, $\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}s=\frac{1}{2}s$. Quæ quidem distantia, ducta in Ungulæ magnitudinem $\frac{1}{6}s^2x$, (per § R. prop. præced.) exhibet ejusdem momentum respectu A α, $\frac{1}{12}s^3x$: Et Semisolidi correspondentis (cujus magnitudo ad magnitudinem Ungulæ est ut $\frac{1}{2}P$ ad R; Centrique gravitatis distantia, ad distantiam hujus, ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$;) momentum $\frac{1}{6}s^3x$.

Atque hæc Ungulæ, Semisolidíque momenta; momentis Ungulæ Semisolidique Sectoris B C A (§ P. repertis;) Ablata, si supra Centrum; vel Addita, si infra Centrum; exhibent Ungulæ Semisegmento B V A insistentis, aciem habentis A α, momentum respectu A α, $\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{8}svR^2\mp\frac{1}{12}s^3x$: Hoc est, (propter $x=R-v$,

supra

ſupra Centrum, auferendum; & $x = -R + v$, infra Centrum, addendum;) $\frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R + \frac{1}{12}s^3v$: Et Semiſolidi, $\frac{1}{4}eR^3$ Fig. 159, 160.
$+ \frac{1}{4}svR^2 \mp \frac{1}{6}s^3x = \frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{6}s^3R + \frac{1}{6}s^3v$. Adeoque (propter Ungulæ magnitudinem, $\frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2v$, per § R. propoſitionis præcedentis) diſtantia Centri gravitatis Ungulæ ab A α,
$\frac{3eR^3 + 3svR^2 - 2s^3R + 2s^3v}{8vR^2 - 4s^2R + 4s^2v} = \frac{2eR^3 + 2svR^2 \mp 2s^3x}{4v^2R + 4s^2v}$: Centrique Semiſolidi inde diſtantia, ad hanc ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$, ſeu $4R$ ad P.

Poteſt autem hoc momentum Ungulæ & Semiſolidi, Semiſegmento BVA convenientium, ſic aliter concipi. Nempe, ſi omnes ordinatim applicatæ BV &c. æqualibus intervallis ſumptæ, (complentes BVA ſpacium,) ducantur primum in ſui ſemiſſes, ut habeantur Triangula eidem inſiſtentia (Ungulam complentia,) quæ ſunt (ut ſupra oſtenſum eſt) ordinatim-applicatarum Semiquadrata: Atque hæc demum Triangula (ſemiquadratis æqualia) in rectarum duos Trientes, (pro diſtantia Centri gravitatis à vertice in Triangulo:) Quod prodit, $BV \times \frac{1}{2}BV \times \frac{2}{3}BV = \frac{1}{3}BVc$, exhibebit momentum Trianguli rectæ BV inſiſtentis. Quod cum ubique fiat: Erit Ungulæ Semiquadrantalis, ſuper BVA inſiſtentis, aciem habentis A α, momentum reſpectu ipſius A α; ſummæ Cuborum ordinatim-applicatarum Triens; Puta, $\frac{1}{3}$ *Omn.* o^3. Quod perinde verum eſt, ſi pro Semiſegmento BVA in vertice terminato, ſumeretur BVCD, vel quævis alia Semicirculi portio, duabus ordinatim-applicatis interjecta. Quippe, & hic, $\frac{1}{3}$ *Omn.* o^3 momentum Ungulæ ſimiliter exhibebit.)

Sed & idem momentum jam modo repertum eſt, $\frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R + \frac{1}{12}s^3v$. Hujus itaque Triplum, $\frac{3}{8}eR^3 + \frac{3}{8}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$, æquatur *Omnibus* o^3; hoc eſt, ſummæ cuborum ordinatim-applicatarum, quæ Semiſegmentum circulare BVA, in vertice terminatum, complent.

(Si vero hæc ad ſummam Cuborum ordinatim-applicatarum in alia portione, puta BVCD, non ad verticem A terminatâ, accommodare libet; id fiet, ut aliis modis, ſic hac ſaltem facili ratione; nempe, ſi, modo jam tradito, habeatur primum ſumma *omnium* o^3 quæ totum ADC Semiſegmentum ſpectant; atque deinde ſumma *omnium* o^3 quæ ſpectant Semiſegmentum ABV; atque demum hæc ſumma, ab illa ſubducatur; quod reſtat, erit *omnium* o^3 portionem BVCD ſpectantium ſumma,)

Fig. 159, 160. Verùm poteſt & hoc idem Ungulæ ſemiſegmento B V A inſiſtentis, aciem habentis A α, momentum reſpectu ipſius A α, ſic adhuc aliter concipi. Nempe, ſi rectæ omnes ipſi A V parallelæ, Semiſegmentum B V A complentes, ducantur in quadrata diſtantiarum ſuarum reſpective, à recta A V: (hoc eſt; propter æqualia quæ ſupponimus parallelarum illarum interſtitia; in ſeriem ſecundanorum, ut 0, 1, 4, 9, &c. quorum maximum ſit remotiſſimæ parallelarum diſtantia quadrata:) Nam rectarum quælibet in diſtantiam ſuam ducta, exhibet parallelogrammum eidem inſiſtens in Semiquadrantali Ungula expoſita; idémque iterum in eandem diſtantiam ductum, exhibet iſtius parallelogrammi momentum reſpectu Axis A V, ſeu A α. Adeóque ſimul omnia, iſtius parallelogrammi momentum.

Quæque de Ungula dicta ſunt; ſolido ejuſdem plani B V A converſione imperfecta deſcripto facile (ex præmonſtratis) accommodari poterunt. Sed de his hactenus.

R. Progredimur ad imperfectum Sectorem, Sectoris plani B α A circa A α imperfecta converſione deſcriptum; Ungulámque huic correſpondentem. Quantum ſcilicet, in his, Centrum gravitatis diſtat ab A α, converſionis Axe, ſeu plano per aciem Ungulæ perpendiculari.

Quæ Triangulo E V α inſiſtit Semiquadrantalis Ungula aciem habens A α, Pyramis eſt; Cujus vertex α; Baſiſque triangularis ipſi B V inſiſtens. Centrique gravitatis diſtantia ab A α, $\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}s=\frac{1}{2}s$. (Quod eodem modo oſtendetur, atque in § Q. de Pyramide triangulo B V C incumbente.) Ejúſque magnitudo (per § S. prop. præced.) $\frac{1}{6}s^2 h$. Adeóque momentum reſpectu A α, $\frac{1}{12}s^3 h=\frac{1}{6}s^3 R-\frac{1}{12}s^3 v$. Quod quidem additum momento Ungulæ Semiſegmenti B V A (§ Q. invento) $\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{12}s^3R+\frac{1}{12}s^3v$; exhibet Semiquadrantalis Ungulæ Sectori B α A inſiſtentis, aciem habentis A α, momentum reſpectu ipſius A α, $\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{8}svR^2+\frac{1}{12}s^3R$.

Idémque ſic habetur. Semiquadrantalis Ungula Trianguli B C α, aciem habens A α, eſt item Pyramis cujùs vertex, α; Baſiſque Triangularis (ipſi C B inſiſtentis) Centrum gravitatis ab A α plano diſtat, $\frac{2}{3}$BV $=\frac{2}{3}s$; adeoque Centrum pyramidis inde diſtat, $\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}s=\frac{1}{2}s$. Adeoque, propter magnitudinem $\frac{1}{6}s^2R$ (per § S. prop. præced.) Momentum $\frac{1}{12}s^3R$. Atque hoc Additum momento Ungulæ B C A, (§ P. invento,) $\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{8}svR^2$; exhibet momentum Ungulæ Semiquadrantalis Sectori B α A inſiſtentis, aciem habentis A α, reſpectu ipſius.

ipſius A α, $\frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{8}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R$. Ut prius. (Hujúſque duplum, Fig. 159, 160.
eſt Semiſolidi correſpondentis momentum.)

Atque hoc Ungulæ momentum, per ipſius magnitudinem diviſum; hoc eſt, per $\frac{1}{3}vR^2 + \frac{1}{6}s^2R$, (per § S. prop. præced.) exhibet hujus Ungulæ Sectori B α A inſiſtentis, aciem habentis A α, diſtantiam Centri gravitatis ab A α plano, $\frac{3eR^2 + 3svR + 2s^3}{8vR + 4s^2}$. Adeoque Semiſolidi correſpondentis, diſtantia Centri gravitatis ab A α converſionis axe, $\frac{3eR^2 + 3svR + 2s^3}{2vRP + s^2P}R$: nempe ad illam Ungulæ, ut $4R$ ad P.

Similiter oſtendetur, Ungulæ Semiquadrantalis Triangulo B A V inſiſtentis, aciem habentis A α, (quæ etiam Pyramis eſt,) Centrum gravitatis ab A α plano diſtare $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}s = \frac{1}{2}s$; magnitudinem eſſe $\frac{1}{6}s^2v$; momentum reſpectu A α, $\frac{1}{12}s^3v$. Atque hoc ex momento Ungulæ Semiſegmenti B V A (§ Q. invento) ſublatum; exhibet Semiquadrantalis Ungulæ, Segmento A B A inſiſtentis, aciem habentis A α, momentum reſpectu A α, $\frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$. S.

Vel etiam, Ungulæ Semiquadrantalis Triangulo B A C inſiſtentis, aciem habentis A α, (quæ vel Pyramis, vel ſaltem duarum Pyramidum aggregatum vel differentia, quarum communis baſis triangularis ipſi B V inſiſtit,) Centrum gravitatis ſimiliter ab A α diſtare, $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}s = \frac{1}{2}s$; magnitudinem, $\frac{1}{6}s^2R$; momentum reſpectu A α, $\frac{1}{12}s^3R$. Atque hoc ex momento Ungulæ Sectoris B A C (§ P. invento) $\frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{8}svR^2$, ſubductum; relinquit $\frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$, momentum, reſpectu A α, Ungulæ aciem habentis A α, ipſi A B A, ſegmento inſiſtentis. Ut prius. (Hujúſque duplum $\frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{6}s^3R$, momentum Semiſolidi correſpondentis.)

Illudque Ungulæ momentum, per ipſius magnitudinem diviſum, hoc eſt per $\frac{1}{6}v^2R = \frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R$ (per § Q. prop. præced.) exhibet iſtius Ungulæ Segmento A B A inſiſtentis, aciem habentis A α, diſtantiam Centri gravitatis ab A α plano, $\frac{3eR^2 + 3svR - 2s^3}{8vR - 4s^2 = 4v^2}$. Semiſolidique correſpondentis, Centri inde diſtantiam $\frac{3eR^2 + 3svR - 2s^3}{2vRP - s^2P}R$.

Reſtat, ut ſimiliter expendamus Solida, imperfectâ converſione circa $\tau\alpha$, T A, B V, deſcripta: Unguláſque correſpondentes: Eorum Momenta reſpectu $\tau\alpha$, T A, B V, reſpective, determinando; Centrique gravitatis inde diſtantiam. T.

Intelligatur

Fig. 159, 160. Intelligatur itaque super A D α Semicirculo, Ungula Semiquadrantalis, aciem habens τ α. Cujus itaque singulis ordinatim-applicatis, ut B V, totidem insistunt Parallelogramma Rectangula, Ungulam complentia; quorum altitudines sint ipsis V α respectivis æquales; eorúmque a T A distantia V A. Eritque propterea Rectangulorum horum cujusque momentum respectu T A, (oppositæ tangentis,) æquale facto ex Base B V, in altitudinem V α, & distantiam à vertice V A, continuè ductâ: Hoc est, BV×Vα×VA. Est autem αV×VA = BVq, (propter B V mediam proportionalem inter Diametri segmenta AV, αV:) Adeoque BV×αV×VA = BVc. Et sic ubique.

Idemque erit (eâdem de causâ) momentum, respectu τ α, Ungulæ, aciem habentis T A. Quæ enim est, in alterâ, altitudo; est, in reliqua, Distantia: & vice versa.

Sunt itaq; Parallelogrammorum horum omnium (sive quæ Ungulam totam ipsi A α D insistentem; sive quæ ipsius portionem ipsi B V A, vel B V C D, insistentem complent; quippe utrobique eadem est ratio;) momenta respectu, TA, si acies sit τ α; vel respectu τ α, si acies sit TA, Summa cuborum ordinatim-applicatarum basin complentium. Puta, *omnium* o^3, respective.

Et quidem in eâ quæ Semisegmento B V A insistit, (ad verticem A terminato,) *Omn.* o^3, $= \frac{3}{8}eR^3 + \frac{3}{8}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$, ut § Q. ostensum est. (Idémque, si opus fuerit ad aliam portionem, ut B V C D, facile accommodabitur; ut ibidem etiam ostensum est.)

Illud itaque momentum; si dividatur per Ungulæ magnitudinem ipsi B V A Semisegmento insistentis, aciem habentis τ α, $\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}svR + \frac{1}{3}s^3$ (per § L. prop. præced.) exhibet distantiam Centri gravitatis ab (oppositâ) T A, $\frac{9eR^3 + 9svR^2 - 6s^3R + 6s^3v}{12eR^2 + 12svR + 8s^3}$ $= \frac{3}{4}R - \frac{6s^3R - 3s^3v}{6eR^2 + 6svR + 4s^3} = \frac{3}{4}R - \frac{3s^3h}{6eR^2 + 6svR + 4s^3}$: Adeoque ab ipsa τ α, $\frac{5}{4}R + \frac{3s^3h}{6eR^2 + 6svR + 4s^3}$; & à BV, $\frac{5}{4}R - h + \frac{3s^3h}{6eR^2 + 6svR + 4s^3}$. Ungulæque propterea respectu ipsius B V, momentum $-\frac{3}{8}eR^3 + \frac{1}{2}avR^2 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{12}s^3v$: Ejusdemque respectu ipsius τ α, aciei suæ, momentum, $\frac{5}{8}eR^3 + \frac{5}{8}svR^2 + \frac{11}{12}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$. Hujúsque duplum $\frac{5}{4}eR^3 + \frac{5}{4}svR^2 + \frac{11}{6}s^3R - \frac{1}{2}s^3v$ momentum semisolidi, semiconversione semisegmenti B V A circa τ α, respectu ipsius τ α axis conversionis: Atque hoc, per Semisolidi magnitudinem

nem diviſum, exhibet $\frac{15eR^3+15svR^2+22s^3R-6s^3v}{3eR^2P+3svRP+2s^3P}R=\frac{5R}{P}R$ Fig. 159, 160.
$+\frac{12s^3R-6s^3v}{3eR^2P+3svRP+2s^3P}R=\frac{5R}{P}R+\frac{6s^3b}{3eRP+3svR^2P+2s^3P}R$; Semiſolidi iſtius, diſtantiam Centri gravitatis à $\tau\alpha$, (nempe ad illam Ungulæ, ut $4R$, ad P.) Adeoque, à TA, $\frac{2P-5R}{P}R$ $-\frac{6s^3b}{3eR^2P+3svRP+2s^3P}R$, Semiſolidique iſtius, reſpectu ipſius TA (axi oppoſitæ) momentum $\frac{1}{2}eR^2P+\frac{1}{2}svRP+\frac{1}{3}s^3P-\frac{5}{4}eR^3$ $-\frac{5}{4}svR^2-\frac{11}{6}s^3R+\frac{1}{2}s^3v$.

Idemque (quod prius) momentum $\frac{3}{8}eR^3+\frac{3}{8}svR^2-\frac{1}{4}s^3R+\frac{1}{4}s^3v$; ſi dividatur per Ungulæ magnitudinem ipſi BVA inſiſtentis, aciem habentis TA, $\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{2}svR-\frac{1}{3}s^3$, (per § L. prop præced.) exhibet, hujus, Centri gravitatis diſtantiam ab (oppoſita) $\tau\alpha$, $\frac{9eR^3+9svR^2-6s^3R+6s^3v}{12eR^2+12svR-8s^3}=\frac{3}{4}R+\frac{3s^3v}{6eR^2+6svR-4s^3}$: Atque à BV, $\frac{3}{4}R-b+\frac{3s^3v}{6eR^2+6svR-4s^3}=-\frac{5}{4}R+v+\frac{3s^3v}{6eR^2+6svR-4s^3}$; à TA, $\frac{5}{4}R-\frac{3s^3v}{6eR^2+6svR-4s^3}$: Ungulæque propterea, reſpectu BV, momentum $-\frac{5}{8}eR^3+\frac{1}{2}avR^2-\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{12}s^3R-\frac{1}{12}s^3v$; & reſpectu ipſius TA (aciei ſuæ) momentum $\frac{5}{8}eR^3+\frac{5}{8}svR^2-\frac{5}{12}s^3R$ $-\frac{1}{4}s^3v$: Hujuſque duplum, $\frac{5}{4}eR^3+\frac{5}{4}svR^2-\frac{5}{6}s^3R-\frac{1}{2}s^3v$, momentum Semiſolidi correſpondentis. Hujuſq; propterea Semiſolidi diſtantia Centri gravitatis à TA (axe ſuo) eſt $\frac{5R}{P}R-\frac{6s^3v}{3eR^2P+3svRP-2s^3P}R$; adeoque à $\tau\alpha$, (axi oppoſitâ) $\frac{2P-5R}{P}R+\frac{6s^3v}{3eR^2P+3svRP-2s^3P}R$: Ejúſque momentum reſpectu hujus $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}eR^2P+\frac{1}{2}svRP-\frac{1}{3}s^3P-\frac{5}{4}eR^3$ $-\frac{5}{4}svR^2+\frac{5}{6}s^3R+\frac{1}{2}s^3v$.

Et, ſpeciatim, quæ toti Semicirculo ADα inſiſtit Ungula, aciem habens, ſive $\tau\alpha$, ſive TA; momentum habet (propter $s=0$, & $e=a=\frac{1}{2}P$,) reſpectu earum alterius, nempe aciei ſuæ, $\frac{5}{16}R^3P$; alterius vero, quæ aciei opponitur, $\frac{3}{16}R^3P$; Adeoque Centri gravitatis diſtantiam inde, $\frac{5}{4}R$; hinc, $\frac{3}{4}R$. Et correſpondentis Semiſolidi converſione facti, momentum reſpectu axis converſionis ſuæ, $\frac{5}{8}R^3P$; Centrique gravitatis inde diſtantia, erit $\frac{5R^2}{P}$. Unde habetur

ejuſdem

Fig. 159, 160. ejusdem ab altero extremo distantia, & momentum respectu istius.

V. Deinde; ut hæc ad Axem B V, transferantur; (per § F. prop. 11. hujus:) Ex Ungulæ Semisegmenti B V A, aciem habente T A, momento respectu $\tau\alpha$, modo invento, $\frac{3}{8}eR^3+\frac{3}{8}svR^2-\frac{1}{4}s^3R+\frac{1}{4}s^3v$; si auferatur factum ex Ungulæ magnitudine $\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{2}svR-\frac{1}{3}s^3$, in $\alpha V=h$ ductâ, hoc est, $\frac{1}{2}ehR^2+\frac{1}{2}svhR-\frac{1}{3}s^3h=\frac{1}{2}ehR^2+\frac{1}{2}s^3R-\frac{1}{3}s^3h$, (propter $hv=s^2$,) hoc est, $eR^3-\frac{1}{2}evR^2+\frac{1}{2}s^3R-\frac{2}{3}s^3R+\frac{1}{3}s^3v=eR^3-\frac{1}{2}avR^2+\frac{1}{2}svR^2-\frac{1}{6}s^3R+\frac{1}{3}s^3v$: Quod restat $-\frac{5}{8}eR^3+\frac{1}{2}avR^2-\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{12}s^3R-\frac{1}{12}s^3v$, est ejusdem Ungulæ B V A aciem habentis T A, momentum respectu B V; (quod § T. aliter ostensum est:) Ejúsque Centri gravitat. distan. à BV, $\frac{-15eR^3+12avR^2-3svR^2-2s^3R-2s^3v}{12eR^2+12svR-8s^3}$ $=v-\frac{5}{4}R+\frac{3s^3v}{6eR^2+6svR-4s^3}$. Idemque habetur, si ejusdem Centri distantia à T A, auferatur ex $AV=v$, (aut ab ejus à $\tau\alpha$ distantia auferatur $h=2R-v$;) ut habeatur illius à B V distantia; atque hæc à B V distantia ducatur in magnitudinem Ungulæ, ut habeatur momentum: (ut § T. factum est.) Et, utrovis modo, habebitur Semisolidi correspondentis momentum respectu ejusdem B V; Centrique gravitatis inde distantia: Nempe, distantia, $\frac{6s^3v}{3eR^2P+3svRP-2s^3P}R-\frac{5R^2}{P}+v$; & momentum, $\frac{1}{4}fvRP-\frac{1}{4}s^3P-\frac{s^3vP}{6R}-\frac{5}{4}eR^3-\frac{5}{4}svR^2+\frac{5}{6}s^3R+\frac{1}{2}s^3v$.

Ex Ungula vero Semisegmenti B V A, aciem habentis $\tau\alpha$; puta V v f A (fig. 141.) auferendum primò factum ex plano B V A in αV, puta Prisma V v a A, ut habeatur v a f, seu V A F, Ungula ejusdem basis aciem habens B V: Atque ex momento istius Ungulæ respectu ejusdem $\tau\alpha$ hoc est, ex $\frac{5}{8}eR^3+\frac{5}{8}svR^2+\frac{1}{12}s^3R-\frac{1}{4}s^3v$ (per § T.) auferendum illius Prismatis respectu ejusdem $\tau\alpha$ momentum; hoc est, plani B V A momentum, in V v, seu $\alpha V=h$ ductum; hoc est (per § L. prop. præced.) $\frac{1}{2}ehR^2+\frac{1}{2}svhR+\frac{1}{3}s^3h=eR^3-\frac{1}{2}avR^2+\frac{1}{2}svR^2+\frac{7}{6}s^3R-\frac{1}{3}s^3v$; ut habeatur momentum Ungulæ B V A F (Semisegmento B V A insistentis, aciem habentis B V,) respectu ipsius $\tau\alpha$, $-\frac{3}{8}eR^3+\frac{1}{2}avR^2+\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{4}s^3R+\frac{1}{12}s^3v$. (Idem atque momentum respectu B V, aciem habentis $\tau\alpha$.) Atque ex hoc demum momento respectu $\tau\alpha$, auferendum quod fit ex ipsa Ungulæ

BVAF

B V A F magnitudine, in $V\alpha = b$; hoc eſt, (per § L. prop. præced. Fig. 159, 160.
$-\frac{1}{2}ebR^2 + \frac{1}{2}avbR - \frac{1}{6}s^3b = -eR^3 + \frac{1}{2}evR^2 + \frac{1}{2}as^2R - \frac{1}{3}s^3R + \frac{1}{6}s^3v$: Et habebitur $\frac{5}{8}eR^3 + \frac{5}{8}svR^2 - \frac{1}{2}as^2R + \frac{1}{12}s^3R - \frac{1}{12}s^3v$ momentum Ungulæ B V A F (ſemiſegmento B V A inſiſtentis, aciem habentis B V,) reſpectu aciei ſuæ B V: Adeóque (per magnitudinem dividendo) diſtantia Centri gravitatis à B V, $\frac{15eR^3 + 15svR^2 - 12as^2R + 2s^3R - 2s^3v}{-12eR^2 + 12avR - 4s^3}$; atque à $\tau\alpha$, $\frac{-9eR^3 + 12avR^2 + 3svR^2 - 6s^3R + 2s^3v}{-12eR^2 + 12avR - 4s^3}$. (Semiſolidique correſpondentis momentum, ſive reſpectu $\tau\alpha$, ſive B V, eſt duplum momentum Ungulæ: Ejuſque Centri gravitatis, diſtantia ſive à $\tau\alpha$, ſive à B V, eſt ad diſtantiam Centri Ungulæ, ut $4R$ ad P.) Centríq; Ungulæ diſtantia à T A, $\frac{-15eR^3 + 12avR^2 - 3svR^2 - 2s^3R - 2s^3v}{-12eR^2 + 12avR - 4s^3}$; ejuſque momentum reſpectu T A, $-\frac{5}{8}eR^3 + \frac{1}{2}avR^2 - \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R - \frac{1}{12}s^3v$. (Idem atque, reſpectu B V, momentum aciem habentis T A.) Similiter, ſi Semiſolidi diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, auferatur ex $A\alpha = 2R$; habebitur ejuſdem à T A diſtantia. Atque hæc in Semiſolidi magnitudinem ducta, exhibet ejuſdem reſpectu T A momentum.

Porro; Triangulo B V α inſiſtens Ungula Semiquadrantalis aciem habens $\tau\alpha$, eſt Pyramis; Cujùs magnitudo $BV \times V\alpha \times \frac{1}{3}V\alpha = \frac{1}{3}sb^2 = \frac{4}{3}sR^2 - \frac{4}{3}svR + \frac{1}{3}sv^2 = \frac{4}{3}sR^2 - \frac{2}{3}svR - \frac{1}{3}s^3$: Ejuſque Centri gravitatis, à $\tau\alpha$, diſtantia $\frac{3}{4}V\alpha = \frac{3}{4}b$: Adeoque Ungulæ momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}sb^3 = 2sR^3 - 3svR^2 + \frac{3}{2}sv^2R - \frac{1}{4}sv^3 = 2sR^3 - \frac{3}{4}s^3R - \frac{1}{4}sv^3 = 2sR^3 - svR^2 - s^3R + \frac{1}{4}s^3v$. W.

Atque hoc additum momento Ungulæ ipſi B V A inſiſtentis, aciem habentis $\tau\alpha$, reſpectu ejuſdem $\tau\alpha$, $\frac{5}{8}eR^3 + \frac{5}{8}svR^2 + \frac{11}{12}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$ (ut § T.) ſeu $\frac{5}{8}aR^3 - \frac{5}{8}sR^3 + \frac{5}{8}svR^2 + \frac{11}{12}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$; exhibet $\frac{5}{8}aR^3 + \frac{11}{8}sR^3 - \frac{3}{8}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$, ſeu $\frac{5}{8}fR^3 + \frac{3}{8}sbR^2 - \frac{1}{12}s^3R$, momentum Ungulæ ſectori B α A inſiſtentis, aciem habentis $\tau\alpha$, reſpectu ipſius $\tau\alpha$. (Hujuſque duplum eſt momentum correſpondentis Semiſolidi, reſpectu ejuſdem $\tau\alpha$.) Idemque per magnitudinem diviſum; hoc eſt, per $\frac{1}{2}fR^2 + \frac{1}{6}sbR = \frac{1}{2}aR^2 + \frac{5}{6}sR^2 - \frac{1}{6}svR$; (ut § M. prop. præced.) exhibet diſtantiam Centri gravitatis à $\tau\alpha$ $\frac{15aR^2 + 33sR^2 - 9svR - 2s^3}{12aR + 20sR - 4sv} = \frac{15fR^2 + 9sbR - 2s^3}{12fR + 4sb}$. Adeoque ejuſ-

Fig. 159, 160. dem Centri diſtantia à TA, $\frac{9aR^2+7sR^2+svR+2s^3}{12aR+20sR-4sv} = \frac{9fR^2-shR+2s^3}{12fR+4sh}$; & propterea ejuſdem Ungulæ momentum reſpectu TA, $\frac{3}{8}aR^3 + \frac{7}{24}sR^3 + \frac{1}{24}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R = \frac{3}{8}fR^3 - \frac{1}{24}shR^2 + \frac{1}{12}s^3R$. (Et correſpondentis Semiſolidi, diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, eſt ad illam Ungulæ, ut $4R$ ad P; ejuſque reſiduum ad $2R$, eſt ejuſdem diſtantia a TA; atque hæc in Semiſolidi magnitudinem ducta, exhibet ſemiſolidi momentum reſpectu ipſius TA.)

Ejuſdemque Triangulo BVα inſiſtentis Ungulæ, Pyramidiſve, Centrum gravitatis à TA, diſtat $2R - \frac{3}{4}h = \frac{1}{2}R + \frac{3}{4}v$: Adeoque ipſius reſpectu TA momentum (diſtantiâ in magnitudinem ductâ) $\frac{2}{3}sR^3 + \frac{2}{3}svR^2 - \frac{1}{2}sv^2R - \frac{1}{6}s^3R - \frac{1}{4}s^3v = \frac{2}{3}sR^3 - \frac{1}{3}svR^2 + \frac{1}{3}s^3R - \frac{1}{4}s^3v = \frac{2}{3}sh^2R - \frac{1}{4}sh^3 = \frac{1}{12}sh^3 + \frac{1}{3}s^3h$; propter $s^2 = hv$.

Atque hoc additum, momento Ungulæ ipſi BVA inſiſtentis, aciem item habentis $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}aR^3 - \frac{3}{8}sR^3$ $(=\frac{3}{8}eR^3)$ $+ \frac{3}{8}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$, (ut § V.) exhibet $\frac{3}{8}aR^3 + \frac{7}{24}sR^3 + \frac{1}{24}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R$ ſeu $\frac{3}{8}fR^3 - \frac{1}{24}shR^2 + \frac{1}{12}s^3R$, momentum Ungulæ ſectori BαA inſiſtentis, aciem habentis $\tau\alpha$, reſpectu ipſius TA. ut prius.

Eidem verò Triangulo BVα inſiſtens Ungula, aciem habens TA, conſtat ex Priſmate eidem inſiſtente cujus altitudo $AV = v$; eique ſuperjacente pyramide cujus baſis Triangulum BVα (aut huic æquale,) altitudo, perpendicularis ſupra α punctum æqualis ipſi $V\alpha = h$; Adeoque (propter $BV\alpha = \frac{1}{2}sh$) Pyramidis magnitudo $\frac{1}{6}sh^2 = \frac{2}{3}sR^2 - \frac{2}{3}svR + \frac{1}{6}sv = \frac{2}{3}sR^2 - \frac{1}{3}svR - \frac{1}{6}s^3$: Et, (propter Centri gravitatis baſis BVα, à $\tau\alpha$ diſtantiam, $\frac{2}{3}h$; pyramidiſque Centrum gravitatis in rectâ inde ad verticem ipſi α puncto ſupereminentem ductâ, abſciſſâ inde verſus verticem, $\frac{3}{4}$ ipſius;) diſtantia Centri gravitatis pyramidis à $\tau\alpha$ plano, erit $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}h = \frac{1}{2}h$; & propterea pyramidis momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{12}sh^3 = \frac{2}{3}sR^3 - svR^2 + \frac{1}{2}sv^2R - \frac{1}{12}sv^3 = \frac{2}{3}sR^3 - \frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{3}s^3R + \frac{1}{12}s^3v$. Priſmatis verò, eidem BVα incumbentis magnitudo (propter baſem $BV\alpha = \frac{1}{2}sh$; & altitudinem $VA = v$) eſt $\frac{1}{2}shv = \frac{1}{2}s^3$: Ejuſque Centri gravitatis à $\tau\alpha$ diſtantia (quippe eadem quæ baſis Triangularis) $\frac{2}{3}h$; adeoq; Priſmatis reſpectu $\tau\alpha$ momentum $\frac{1}{3}svh^2 = \frac{1}{3}s^3h = \frac{2}{3}s^3R - \frac{1}{3}s^3v$. Atq; hoc additum Pyramidis momento $\frac{1}{12}sh^3$; exhibet Ungulæ (ipſi BVα inſiſtentis, aciem habentis TA,) momentam reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{12}sh^3 + \frac{1}{3}svh^2 = \frac{1}{12}sh^3 + \frac{1}{3}s^3h = \frac{2}{3}sR^3 - \frac{1}{3}svR^2 + \frac{1}{3}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$. (Idem atque aciem habentis $\tau\alpha$, momentum reſpectu TA.) Atque hoc additum, momento Ungulæ Semiſegmento BVA inſiſtentis, aciem item habentis TA, reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}aR^3 - \frac{3}{8}sR^3$ $(=\frac{3}{8}eR^3)$ $+ \frac{3}{8}vR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$; exhibet, Ungulæ Sectori BαA inſiſtentis aciem

aciem habentis T A, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}aR^3 + \frac{7}{24}sR^3 + \frac{1}{24}svR^2$ Fig. 159, $+ \frac{1}{12}s^3R = \frac{3}{8}fR^3 - \frac{1}{24}shR^2 + \frac{1}{12}s^3R$. (Idem planè atque Ungulæ 160. aciem habentis $\tau\alpha$ momentum respectu T A: Quippe quæ illic est Altitudo, hic est Distantia; & vice versa.) Atque hoc momentum per Ungulæ mag. divisum, hoc est, per $\frac{1}{2}fR^2 - \frac{1}{6}shR = \frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{6}sR^2 + \frac{1}{6}svR$ (ut § M. prop. præced.) exhibet $\frac{9aR^2 + 7sR^2 + svR + 2s^3}{12aR + 4sR + 4sv}$ $= \frac{9fR^2 - shR + 2s^3}{12fR - 4sh}$; distantiam Centri gravitatis (Ungulæ sectori BαA insistentis, aciem habentis T A,) à $\tau\alpha$. Adeoque ejusdem Centri à T A distantia est $\frac{15aR^2 + sR^2 + 7svR - 2s^3}{12aR + 4sR + 4sv} =$ $\frac{15fR^2 - 7shR - 2s^3}{12fR - 4sh}$; & Ungulæ respectu ipsius TA (aciei suæ) momentum $\frac{5}{8}aR^3 + \frac{1}{24}sR^3 + \frac{7}{24}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R = \frac{5}{8}fR^3 - \frac{7}{24}shR^2 - \frac{1}{12}s^3R$. (Quæ omnia correspondenti semisolido, facile accommodantur: eodem modo quæ in iis quæ aciem habent $\tau\alpha$ factum est.)

Vel etiam; propter Ungulæ Triangulo B V α insistentis (aciem habentis T A, ex Pyramide & Prismate constantis) magnitudinem (modo exhibitam) $\frac{1}{6}sh^2 + \frac{1}{2}shv = \frac{2}{3}sR^2 - \frac{1}{3}svR + \frac{1}{3}s^3$; $= shR - \frac{1}{3}sh^2$; Momentum ejus respectu $\tau\alpha$ (modo ostensum) $\frac{3}{2}sR^3 - \frac{1}{3}svR^2 + \frac{1}{3}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$, per magnitudinem illam dividendo; habebitur istius Centri gravitatis à $\tau\alpha$ distantia $\frac{8sR^3 - 4svR^2 + 4s^3R - 3s^3v}{8sR^2 - 4svK + 4s^3}$ $= R - \frac{3s^2v}{8R^2 - 4vR + 4s^2}$; & à T A, $R + \frac{3s^2v}{8K^2 - 4vR + 4s^2}$; (adeoque à D C, $\frac{3s^2v}{8K^2 - 4vR + 4s^2} = \frac{3v^2}{12R - 4b} = \frac{3v^2}{4R + 4v}$; & propterea ejusdem respectu T A momentum, $\frac{2}{3}sR^3 - \frac{1}{3}svR^2 + \frac{1}{3}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$. Atque hoc additum Momento Ungulæ Semisegmento BVA insistentis (aciem item habentis T A) respectu ipsius T A, $\frac{5}{8}aR^3 - \frac{5}{8}sR^3$ $(= \frac{5}{8}eR^3)$ $+ \frac{5}{8}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$, (ut § T;) exhibet momentum Ungulæ sectori BαA insistentis, aciem habentis T A, respectu ipsius T A, $\frac{5}{8}aR^3 + \frac{1}{24}sR^3 + \frac{7}{24}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$. ut prius.

Deinde; ex his momentis Ungularum sectori BαA insistentium, subductis Ungularum Triangulo B C α insistentium momentis respectivis, habentur momenta Ungularum sectori BCA insistentium respectiva. X.

Quæ autem Triangulo B C α insistit Ungula semiquadrantalis, aciem

Fig. 159, 160. aciem habens $\tau\alpha$, est Pyramis: Cujus vertex α; Basis, Trapezium rectæ BC insistens, duabus rectis plano circuli perpendicularibus & invicem parallelis interjectum; quarum altera, puncto C insistens, æqualis est rectæ $C\alpha = R$; altera, insistens puncto B, æqualis rectæ $V\alpha = h$; quas itaque, in planum replicatas, repræsentent rectæ $C\alpha$, Ba. Quod quidem Trapezium, (quò Centrum gravitatis habeatur,) dirimi intelligatur in duo Triangula αBC, αBa. Quæ (propter communem altitudinem αa seu $BV = s$,) sunt ut bases $C\alpha$, Ba; hoc est $C\alpha$, $V\alpha$; seu, R, h: Puta $\frac{1}{2}sR$, $\frac{1}{2}sh$. Distátque illius Centrum gravitatis ab $A\alpha$ (rectâ planove) $\frac{1}{3}VB = \frac{1}{3}s$; hujus vero, $\frac{2}{3}BV = \frac{2}{3}s$. Erúntque, propterea, eorum momenta respectu $A\alpha$, ut $\frac{1}{6}s^2R$, $\frac{1}{3}s^2h$. Adeoque momentum totum $\frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{3}s^2h$, per totam magnitudinem $\frac{1}{2}sR + \frac{1}{2}sh$ divisum, exhibet totius Trapezii distantiam Centri gravitatis, quod puncto β designatum intelligatur (toto scilicet Trapezio, in rectam cui insistit, BC projecto,) ab $A\alpha$ $\frac{s^2R + 2s^2h}{3sR + 3sh} = \frac{R + 2h}{3R + 3h}s = \beta\gamma$. Adeoque (propter similia Triangula BVC, $\beta\gamma$C,) ut $BV = s$, ad $VC = x$; sic $\beta\gamma$, ad $\gamma C = \frac{R + 2h}{3R + 3h}x$. Et $\gamma\alpha = R \pm \frac{R + 2h}{3R + 3h}x$. Sumptâque $\alpha g = \frac{3}{4}\alpha\beta$, (ductâque, ut $\beta\gamma$, sic gG, ipsi $\tau\alpha$ parallelâ,) erit $\alpha G = \frac{3}{4}\alpha\gamma = \frac{3}{4}R \pm \frac{R + 2h}{4R + 4h}x = \frac{3}{4}R \pm \frac{5R - 2v}{12R - 4v}x$, distantia Centri gravitatis pyramidis à (plano Tangente) $\tau\alpha$. Hoc est (propter $x = R - v$, supra Centrum, addendum; vel $x = -R + v$, infra Centrum, auferendum; adeoque $\pm x = R - v$,) $\frac{3}{4}R + \frac{5R^2 - 7vR + 2v^2}{12R - 4v} = \frac{7R^2 - 5vR + v^2}{6R - 2v} = \frac{7R^2 - 3vR - s^2}{6R - 2v}$. Atque hæc distantia, in Pyramidis magnitudinem ducta, hoc est, (per § M. prop. præced.) in $\frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}svR$ exhibet Pyramidis illius respectu $\tau\alpha$, momentum $\frac{7R^2 - 3vR - s^2}{12}sR = \frac{7}{12}sR^3 - \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$. Atque hoc demum momentum, subductum ex momento Ungulæ Sectori BαA insistentis, (aciem item habentis $\tau\alpha$) respectu ipsius $\tau\alpha$; hoc est (ut § W.) ex $\frac{5}{8}aR^3 + \frac{11}{8}sR^3 - \frac{3}{8}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$; relinquit momentum Ungulæ Sectori BCA insistentis, aciem habentis $\tau\alpha$, respectu ipsius $\tau\alpha$, $\frac{5}{8}aR^3 + \frac{19}{24}sR^3 - \frac{1}{8}svR^2$. (Semisolidique correspondentis momentum, hujus duplum.) Quod quidem Ungulæ (ipsi BCA insistentis momentum,

per

per magnitudinem $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{3}sR^2$ (ut § I. prop. præced.) divi- Fig. 159,
ſum, exhibet ejuſdem Centri gravitatis diſtantiam à $\tau\alpha$, 160.
$\frac{15aR + 19sR - 3sv}{12a + 8s}$. (Adeoque Semiſolidi correſpondentis, Centri gravitatis inde diſtantiam, $\frac{15aR + 10sR - 2sv}{3aP + sP}R$; utpote ad illam Ungulæ, ut 4 R ad P.) Et propterea diſtantia Centri gravitatis Ungulæ, à T A, $\frac{9aR - 2sR + 3sv}{12a + 8s}$; Ungulæque iſtius (Sectori B C A inſiſtentis, aciem habentis $\tau\alpha$,) momentum reſpectu T A, $\frac{3}{8}aR^3 - \frac{1}{8}sR^3 + \frac{1}{8}svR^2$. (Quod Semiſolido facile accommodabitur.)

Aut etiam, propter Pyramidis illius, Triangulo B C α incumbentis, magnitudinem $\frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}svR$; Centrique gravitatis à $\tau\alpha$ diſtantiam $\frac{7R^2 - 3vR - s^2}{6R - 2v}$, (ut dictum eſt,) adeoque à T A, $\frac{5R^2 - vR + s^2}{6R - 2v}$; erit ejuſdem, reſpectu T A, momentum $\frac{5}{12}sR^3$, $-\frac{1}{12}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R$. Quod quidem momento Ungulæ ſectori B α A incumbentis (aciem habentis $\tau\alpha$) reſpectu T A, $\frac{3}{8}aR^3 + \frac{7}{24}sR^3 + \frac{1}{24}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R$, (ut § W.) ſublatum; relinquit Ungulæ Sectori B C A inſiſtentis, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum reſpectu T A, $\frac{3}{8}aR^3 - \frac{1}{8}sR^3 + \frac{1}{8}svR^2$. Ut prius.

Quæ vero Triangulo illi B C α inſiſtit Semiquadrantalis Ungula aciem habens T A, idem planè habet reſpectu $\tau\alpha$ momentum, quod habet reſpectu T A ea quæ aciem habet $\tau\alpha$; (propter altitudines & Diſtantias ubique reciprocatas, ut pridem Aliquoties:) Hoc eſt, (ut modo oſtenſum eſt) $\frac{5}{12}sR^3 - \frac{1}{12}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R$; quod per Ungulæ magnitudinem $\frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{6}svR$ (ut § M. prop. præced.) diviſum; exhibet ſui Centri gravitatis diſtantiam à $\tau\alpha$ $\frac{5R^2 - vR + s^2}{6R + 2v}$; Adeoque, à T A, $\frac{7R^2 + 5vR - s^2}{6R + 2v}$; & propterea ejuſdem reſpectu T A (aciei ſuæ) momentum $\frac{7}{12}sR^3 + \frac{5}{12}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$ (Solidique correſpondentis momentum eſt hujus duplum.) Quæ quidem Ungulæ momenta, momentis reſpectivis Ungulæ ſectori B α A inſiſtentis, aciem habentis T A, (hoc eſt, $\frac{3}{8}aR^3 + \frac{7}{24}sR^3 + \frac{1}{24}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R$, reſp. $\tau\alpha$; & reſp. T A, $\frac{5}{8}aR^3 + \frac{1}{24}sR^3 + \frac{7}{24}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$; ut § W.) ſublata; relinquunt Ungulæ Sectori B C A inſiſtentis, aciem habentis

T A,

Fig. 159, 160. T A, momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}aR^3 - \frac{1}{8}sR^3 + \frac{1}{8}svR^2$ (idem nempe quod Ungulæ eidem B C A inſiſtentis, aciem habentis $\tau\alpha$, reſpectu T A; propter altitudines & diſtantias ubique reciprocatas;) & reſpectu (aciei ſuæ) T A, $\frac{5}{8}aR^3 - \frac{13}{24}sR^3 - \frac{1}{8}svR^2$; (hujuſque duplum, eſt momentum correſpondentis Semiſolidi, reſpectu ſui axis converſionis:) Ungulæque hæc momenta, per magnitudinem $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{3}sR^2$ (ut § I. prop. præced.) diviſa; exhibent ejuſdem Centri grav. diſtant. à $\tau\alpha$, $\frac{9aR - 3sR + 3sv}{12a - 8s}$; &, à TA, $\frac{15aR - 13sR - 3sv}{12a - 8s}$; (quæ, obſervatis obſervandis, Semiſolidis accommodari facile poterunt.)

Eadem haberi poterunt, ope Trianguli B V C, & Ungularum huic inſiſtentium.

Quæ autem huic inſiſtit Ungula ſemiquadrantalis, aciem habens D C; eſt Pyramis: Cujus vertex C, altitudo $CV = x$, Baſis (rectæ B V inſiſtens) $BV \times CV = sx$; adeoque pyramidis magnitudo $\frac{1}{3}sx^2$; Diſtantia Centri gravitatis à D C, $\frac{3}{4}x$; adeoque momentum Pyramidis reſpectu D C, $\frac{1}{4}sx^3$.

Si verò ponatur Ungulæ axis $\tau\alpha$, ſitque V ſupra Centrum; vel acies T A, ſitque V infra Centrum; Pyramidi huic ſubjungendum, eſt Priſma, ſuper eadem baſe, altitudinem habens $C\alpha$, vel C A, hoc eſt, R; cujus itaque (propter Trianguli magnitudinem $\frac{1}{2}sx$,) magnitudo erit $\frac{1}{2}sxR$; Centrique gravitatis à D C diſtantia (eadem quippe quæ Trianguli,) $\frac{2}{3}x$; adeoque momentum reſpectu D C, $\frac{1}{3}sx^2R$.

Totius itaque Ungulæ ipſi B V C triangulo inſiſtentis; aciem habentis $\tau\alpha$ vel T A, tangentem remotiorem; ex Priſmate & Pyramide conflatæ: momentum reſpectu D C, eſt, $\frac{1}{3}sx^2R + \frac{1}{4}sx^3$.

Atque hoc per Ungulæ magnitudinem $\frac{1}{2}sxR + \frac{1}{3}sx^2$ diviſum, exhibet Centri gravitatis à D C diſtantiam $\frac{4xR + 3x^2}{6R + 4x}$; adeoque ab Ungulæ acie, ſeu tangente remotiore, (intellige, ut alibi, à perpendiculari plano huic inſiſtente,) $R + \frac{4xR + 3x^2}{6R + 4x}$; à propiore, $R - \frac{4xR + 3x^2}{6R + 4x}$; Adeoque momentum reſpectu remotioris tangentis (aciei ſuæ) $\frac{1}{2}sxR^2 + \frac{2}{3}sx^2R + \frac{1}{4}sx^3$; & reſpectu tangentis propioris (quæ aciei oppoſita eſt) $\frac{1}{2}sxR^2 - \frac{1}{4}sx^3$.

Si vero ponatur Ungulæ acies $\tau\alpha$, & V infra Centrum; vel acies T A, & V ſupra Centrum; Priſmati auferenda eſt illa Pyramis, (ejúſque

(ejusque momento momentum hujus:) Adeoque Ungulæ magnitudo, Fig. 159,
erit, $\frac{1}{2}sxR - \frac{1}{3}sx^2$; momentum respectu DC, $\frac{1}{3}sx^2R - \frac{1}{4}sx^3$; Cen- 160.
trique gravitatis à DC distantia, $\frac{4xR - 3x^2}{6R - 4x}$; & ab Acie, seu tangente propiore; $R - \frac{4xR - 3x^2}{6R - 4x}$; à remotiore (quæ aciei opposita est) $R + \frac{4xR - 3x^2}{6R - 4x}$: Et momentum respectu aciei (seu tangentis propioris) $\frac{1}{2}sxR^2 - \frac{2}{3}sx^2R + \frac{1}{4}sx^3$; & respectu tangentis oppositæ (remotioris) $\frac{1}{2}sxR^2 - \frac{1}{4}sx^3$.

Hoc est: Ungulæ Triangulo BVC insistentis, aciem habentis $\tau\alpha$; momentum respectu ipsius $\tau\alpha$; est $\frac{1}{2}sxR^2 \pm \frac{2}{3}sx^2R + \frac{1}{4}sx^3$, (prout supra infrave Centrum fuerit V:) Et respectu TA, $\frac{1}{2}sxR^2 - \frac{1}{4}sx^3$, (sive supra sive infra Centrum fuerit V, propter altitudinum & distantiarum reciprocationem.) Centrique gravitatis à $\tau\alpha$, distantia, $R \pm \frac{4xR \pm 3x^2}{6R \pm 4x}$; &, à TA, $R \mp \frac{4xR \pm 3x^2}{6R \pm 4x}$.

Ungulæque eidem Triangulo BVC insistentis, aciem habentis TA; momentum respectu $\tau\alpha$ (oppositæ) $\frac{1}{2}sxR^2 - \frac{1}{4}sx^3$ (sive supra Centrum, sive infra, fuerit V punctum;) &, respectu Aciei suæ TA, $\frac{1}{2}sxR^2 \mp \frac{2}{3}sx^2R + \frac{1}{4}sx^3$, (prout supra Centrum infrave fuerit V punctum) Centrique gravitatis à $\tau\alpha$ (opposita) distantia, $R \pm \frac{4xR \mp 3x^2}{6R \mp 4x}$; à TA (acie) $R \mp \frac{4xR \mp 3x^2}{6R \mp 4x}$.

Atque hæc momenta, momentis Ungularum (respective sumptarum) semisegmento BVA insistentium, Addita, vel Ablata, prout supra infrave Centrum fuerit V punctum; exhibent momenta respectiva Ungularum Sectori BCA insistentium.

Puta; Ungulæ Semisegmenti BVA, aciem habentis $\tau\alpha$, momento respectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{8}aR^3 - \frac{5}{8}sR^3$ $(= \frac{5}{8}eR^3)$ $+ \frac{5}{8}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$; (ut § T.) si addatur, vel auferatur, (prout supra infrave fuerit,) respectivum Ungulæ Trianguli BVC momentum, $\frac{1}{2}sxR^2 \pm \frac{2}{3}sx^2R + \frac{1}{4}sx^3$; Hoc est, (propter $x = R - v$, supra Centrum, addendum; & $x = -R + v$, infra Centrum, auferendum: adeoque $x^3 = R^3 - 3vR^2 + 3v^2R - v^3 = R^3 - vR^2 - s^2R + s^2v$, addendum; & $x^3 = -R^3 + 3vR^2 - 3v^2R + v^3 = -R^3 + vR^2 + s^2R - s^2v$, auferendum; quæ tantundem valent: Sed, $x^2 = R^2 - 2vR + v^2 = R^2 - s^2$; sitque vel $+x^2$ addendum, vel $-x^2$ auferendum, quod tantundem valet:) Si addatur $\frac{1}{12}sR^3 - \frac{1}{4}vR^2 - \frac{1}{12}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$: Habetur

Fig. 159, 160. betur momentum Ungulæ ſectori B C A inſiſtentis, aciem habentis $\tau\alpha$, reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{8}aR^3 + \frac{12}{24}sR^3 - \frac{1}{8}svR^2$. Ut prius.

Atque ejuſdem Ungulæ B V A (aciem habentis $\tau\alpha$) momento reſpectu T A, $\frac{3}{8}aR^3 - \frac{3}{8}sR^3$ ($= \frac{3}{8}eR^3$) $+ \frac{3}{8}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$ (ut § T.) ſi addatur vel auferatur (prout ſupra infrave fuerit V,) momentum correſpondens Ungulæ B V C, $\frac{1}{2}sxR^2 - \frac{1}{4}sx^3$; Hoc eſt, (ob cauſam modo dictam) ſi addatur $\frac{1}{4}sR^3 - \frac{1}{4}svR^2 + \frac{1}{4}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$: Habetur, Ungulæ ſectori B C A inſiſtentis aciem habentis $\tau\alpha$, momentum reſpectu T A, $\frac{3}{8}aR^3 - \frac{1}{8}sR^3 + \frac{1}{8}svR^2$. Ut prius.

Ungulæque aciem habentis T A, momentum reſpectu $\tau\alpha$; idem eſt atque illud aciem habentis $\tau\alpha$, reſpectu T A; propter altitudines & diſtantias ubique reciprocatas.

Ungulæ vero inſiſtentis ſemiſegmento illi B V A, aciem habentis T A, momentum reſpectu aciei ſuæ T A, $\frac{5}{8}aR^3 - \frac{5}{8}sR^3$ ($= \frac{5}{8}eR^3$) $+ \frac{5}{8}svR^2 \mp \frac{5}{12}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$; ſi addatur, vel auferatur, (prout ſupra infrave fuerit V,) momentum correſpondens Ungulæ B V C, $\frac{1}{2}sxR^2 \mp \frac{2}{3}sx^2R + \frac{1}{4}sx^3$; Hoc eſt (ob cauſam modo dictam) ſi addatur $\mp\frac{1}{12}sR^3 - \frac{3}{4}svR^2 \pm \frac{5}{12}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$: Habetur momentum Ungulæ Sectori B C A inſiſtentis, aciem habentis T A, reſpectu ipſius T A, $\frac{5}{8}aR^3 - \frac{13}{24}sR^3 - \frac{1}{8}svR^2$. Ut prius.

Y. Denique: Ex momentis eiſdem Ungularum Semiſegmento B V A inſiſtentium, ſi auferantur reſpectiva momenta inſiſtentium Triangulo B A V; habentur momenta inſiſtentium Segmento A B A.

Quæ autem Triangulo B A V inſiſtit Semiquadrantalis Ungula, aciem habens T A; eſt Pyramis. Cujus vertex A, baſis $BV \times VA = sv$; altitudo $AV = v$; adeoque magnitudo $\frac{1}{3}sv^2 = \frac{2}{3}svR - \frac{1}{3}s^3$: Diſtantia Centri gravitatis à T A, $\frac{3}{4}v$; adeoque à $\tau\alpha$, $2R - \frac{3}{4}v$: Et propterea momentum reſpectu T A, $\frac{1}{4}sv^3 = svR^2 - \frac{1}{2}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$; & reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}sv^2R - \frac{1}{4}sv^3 = \frac{1}{3}svR^2 - \frac{1}{6}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$.

Hæc itaque momenta, momentis reſpectivis Ungulæ Semiſegmento B V A inſiſtentis, ($\frac{5}{8}eR^3 + \frac{5}{8}svR^2 \mp \frac{5}{12}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$, & $\frac{3}{8}eR^3 + \frac{3}{8}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$, per § T.) ſubducta; relinquunt, Ungulæ ſegmento A B A inſiſtentis, aciem habentis T A, momentum reſpectu T A, $\frac{5}{8}eR^3 - \frac{3}{8}svR^2 \pm \frac{1}{12}s^3R$; & reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}eR^3 \pm \frac{1}{24}svR^2 \mp \frac{1}{12}s^3R$: Et (propter magnitudinem, $\frac{1}{2}eR^2 - \frac{1}{6}svR$, ut § N. prop. præced.) diſtantia Centri gravitatis à T A, erit $\frac{15eR^2 - 9svR + 2s^3}{12eR - 4sv}$; & à $\tau\alpha$, $\frac{9eR^2 + svR - 2s^3}{12eR - 4sv}$.

Quæque

Quæque Triangulo B A V insistit semiquadrantalis Ungula, aciem Fig. 159,
habens $\tau\alpha$; idem habet respectu T A momentum, quod habet ea 160.
cujùs acies T A respectu $\tau\alpha$; (propter altitudines & distantias reciprocatas:) hoc est, (ut modo) $\frac{1}{3}svR^2 - \frac{1}{6}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$: Adeoque (propter magnitudinem $svR - \frac{1}{3}sv^2 = \frac{1}{3}svR + \frac{1}{3}s^3$, per § N. prop. præced.) distantia Centri gravitatis à T A, erit $\frac{4vR^2 - 2s^2R + 3s^2v}{4vR + 4s^2}$; & à $\tau\alpha$, $\frac{4vR^2 + 10s^2R - 3s^2v}{4vR + 4s^2}$; ideoque momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}svR^2 + \frac{5}{6}s^3R - \frac{1}{4}s^3v = 2svR^2 - \frac{4}{3}sv^2R + \frac{1}{4}sv^3$.

Eaque momenta, momentis respectivis Ungulæ Semisegmento B V A insistentis, aciem habentis $\tau\alpha$, ($\frac{3}{8}eR^3 + \frac{3}{8}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$, & $\frac{5}{8}eR^3 + \frac{5}{8}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$, ut § T.) subducta; relinquunt Ungulæ Segmento A B A insistentis, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu T A, $\frac{3}{8}eR^3 + \frac{1}{24}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$; &, respectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{8}eR^3 + \frac{7}{24}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R$; & (propter magnitudinem, $\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{6}svR$; per § N. propositionis præced.) Distantia Centri gravitatis à T A, $\frac{9eR^2 + svR - 2s^3}{12eR + 4sv}$; & à $\tau\alpha$, $\frac{15eR^2 + 7svR + 2s^3}{12eR + 4sv}$.

Eademque Segmento $\alpha B \alpha$ respectu rectæ $\tau\alpha$, accommodantur, quæ Segmento A B A respectu T A; & vice versa. (Nempe, pro a, substituendo $\alpha = \frac{1}{2}P - a$; & pro v, substituendo $h = 2R - v$.

Puta; Segmento $\alpha B \alpha$ insistens Semiquadrantalis Ungula aciem habens $\tau\alpha$, magnitudinem habet $\frac{1}{2}\alpha R^2 - \frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}shR = \frac{1}{4}R^2P - \frac{1}{2}aR^2 - \frac{5}{6}sR^2 + \frac{1}{6}svR$: Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{8}\alpha R^3 - \frac{5}{8}sR^3 - \frac{3}{8}shR^2 + \frac{1}{12}s^3R = \frac{5}{16}R^3P - \frac{5}{8}aR^3 - \frac{11}{8}sR^3 + \frac{3}{8}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R$ respectu T A, $\frac{3}{8}\alpha R^3 - \frac{3}{8}sR^3 + \frac{1}{24}shR^2 - \frac{1}{12}s^3R = \frac{3}{16}K^3P - \frac{3}{8}aR^3 - \frac{7}{24}sR^3 - \frac{1}{24}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$.

Et; Segmento $\alpha B \alpha$ insistens Semiquadrantalis Ungula aciem habens T A, magnitudinem habet $\frac{1}{2}\alpha R^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{6}shR = \frac{1}{4}R^2P - \frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{6}sR^2 - \frac{1}{6}svR$: Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}\alpha R^3 - \frac{3}{8}sR^3 + \frac{1}{24}shR^2 - \frac{1}{12}s^3R = \frac{3}{16}R^3P - \frac{3}{8}aR^3 - \frac{7}{24}sR^3 - \frac{1}{24}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$; & respectu T A, $\frac{5}{8}\alpha R^3 - \frac{5}{8}sR^3 + \frac{7}{24}shR^2 + \frac{1}{12}s^3R = \frac{5}{16}R^3P - \frac{5}{8}aR^3 - \frac{1}{24}sR^3 - \frac{7}{24}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R$.

Exhibuimus itaque, expositorum Sectorum Sphæricorum, & Z.
Segmentorum, Ungularumque eò spectantium, & correspondentium Solidorum seu Semisolidorum conversione factorum, tum magnitudines, tum momenta respectu Planorum aliquot expositorum;

Fig. 159, 160. eorumque Centrorum gravitatis distantiam à duobus saltem planis sibi invicem non parallelis; atque in quo tertio per Ungulæ aciem seu conversionis axem ducto, neutri priorum parallelo, idem reperiatur: Adeoque (per prop. 26. Cap. præced.) ipsa gravitatis Centra determinavimus.

Quæque ad calcem Propositionis præcedentis monuimus; etiam hic monenda erunt: Nempe, hæc omnia aliis Sphæræ portionibus, simili methodo accommodari posse. Puta, quæ de Sectore B α A (ad verticem terminato) ejusque Ungulis, &c. dicta sunt; facile accommodari posse sectori D α B (duorum ad verticem terminatorum D α A, B α A, differentiæ,) ejusque Ungulis &c.

Et, prout hic quæ de Ungularum aut Solidorum magnitudinibus & momentis docentur, à recta τ α, ad T A vel B V, transferuntur; simili methodo, hæc aut his similia, à recta A α, ad T τ vel B a, transferri poterunt. Aliaque quæ hic traduntur, mille modis ampliari.

Quæque de Ungulis Semicirculi, ejusve portionibus; Sphæraque, & portionibus hujus; dicta sunt; ad Ungulas Semiellipseos, & portionum hujus; Sphæroides hujusque portiones; facile accommodantur. Nempe si intelligatur axium ellipseos alter A α, alter D Δ: manente $A\alpha = 2R$, (adeoque $AV = v$, $V\alpha = b$;) erit D Δ in ea ratione ad 2 R, quâ est ad A α; majore quidem si sit D Δ axium major, (adeoque Sphæroides conversione descriptum, Sphæroides latum;) minore, si sit D Δ axium minor, (adeoque Sphæroides longum, conversione descriptum:) & B V, in eadem ratione ad s. Adeoque, quoties B V in calculum venit; pro s, substituenda erit alia quantitas, quæ sit ad hanc, ut est D Δ ad A α: &, pro s^2, alia quæ sit ad hanc, ut in duplicatâ ratione rectæ D Δ ad A α: & in reliquis potestatibus similiter, mutatis mutandis.

PROP. XVII.

PARS PRIMA.

Figura *Sinuum Versorum*, ut A $\tau\alpha$; (quæ eadem est & A.
Figura *Arcuum:*) Est Semicirculi correspondentis Fig. 169,
Dupla; & partes, partium (respective sumptarum,) 170.
Duplæ; Puta, b β a A = 2 B α A. Et sic ubique.

Momenta verò illorum, ad momenta horum, respectu C.
ejusdem $\tau\alpha$ tangentis, sunt ut 3 ad 2 seu *sesquialtera*.

Atque hinc, eadem respective determinantur, tum quod ad Magnitudines, tum quod ad Momenta, & Centra gravitatis, in hac Sinuum Versorum Figura; quæ supra in Semicirculo (prop. 15.) determinantur. Nempe; (retentis Symbolis ut in propositionibus præcedentibus.)

Trilinei A $\tau\alpha$; Magnitudo $\frac{1}{2}RP$: Momentum respectu B. C.
$\tau\alpha$, $\frac{3}{8}R^2P$; respectu TA, $\frac{5}{8}R^2P$; Distantia Centri
gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}R$; à TA, $\frac{5}{4}R$: Momentum respectu G.
A α, $\frac{1}{8}RP^2 - 2R^3$; respectu T τ, $\frac{1}{8}RP^2 + 2R^3$; Distantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{4}P - \frac{4R^2}{P}$; à T τ, $\frac{1}{4}P + \frac{4R^2}{P}$.

Portionis b β α A; Magnitudo, fR: Momentum respectu B. D.
$\tau\alpha$, $\frac{3}{4}fR^2 + \frac{1}{4}shR$; respectu T.A, $\frac{5}{4}fR^2 - \frac{1}{4}shR$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}R + \frac{sh}{4f}$; à TA, $\frac{5}{4}R$
$- \frac{sh}{4f}$: Momentum respectu A α, $\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2$; H.
re-

Fig. 169, 170. respectu bβ; $\frac{1}{2}a^2R+vR^2$; Distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{a^2+2as-2vR}{2a+2s}$; à b$\beta$, $\frac{a^2+2vR}{2a+2s}$.

B. E. Portionis A b K; Magnitudo, eR: Momentum respectu T A, $\frac{3}{4}eR^2-\frac{1}{4}svR$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{4}eR^2+\frac{1}{4}svR$; Distantia Centri gravitatis, à T A, $\frac{3}{4}R-\frac{sv}{4e}$; à $\tau\alpha$, $\frac{5}{4}R$

H. $+\frac{sv}{4e}$: Momentum respectu Aα, $\frac{1}{2}a^2R-asR+vR^2$; respectu βb K, $\frac{1}{2}a^2R-vR^2$; Distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{a^2-2as+2vR}{2a-2s}$; à βb K, $\frac{a^2-2vR}{2a-2s}$.

B. E. Portionis b$\beta\tau$; Magnitudo, $\alpha R-sR$: Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}\alpha R^2-\frac{3}{4}sR^2-\frac{1}{4}shR$; respectu T A, $\frac{5}{4}\alpha R^2-\frac{5}{4}sR^2+\frac{1}{4}shR$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$,

H. $\frac{3}{4}R-\frac{sh}{4\alpha-4s}$; à T A, $\frac{5}{4}R+\frac{sh}{4\alpha-4s}$: Momentum respectu τT, $\frac{1}{2}\alpha^2R-\alpha sR+hR^2$ respectu βb, $\frac{1}{2}\alpha^2R-hR^2$; Distantia Centri gravitatis à τT, $\frac{\alpha^2-2\alpha s+2hR}{2\alpha-2s}$; à βb, $\frac{\alpha^2-2hR}{2\alpha-2s}$.

B. F. Parallelogrammi b B$\alpha\beta$; magnitudo, $ah=2aR-av$: Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}h$; à T A, $2R-\frac{1}{2}h$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}ah^2$; respectu T A, $2ahR$

I. $-\frac{1}{2}ah^2=2aR^2-\frac{1}{2}av^2$. Distantia Centri gravitatis ab Aα, seu bβ, $\frac{1}{2}a$; momentum respectu Aα, vel bβ, $\frac{1}{2}a^2h$.

B. F. Portionis b B A, Magnitudo $fR-ah=-eR+av$: Momentum respectu $\tau\alpha$, $-\frac{5}{4}eR^2+avR-\frac{1}{4}svR+\frac{1}{2}as^2$; respectu T A, $-\frac{3}{4}eR^2+\iota vR+\frac{1}{4}svR-\frac{1}{2}as^2$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{5}{4}R-\frac{fvR-2as^2}{-4eR+4av}$; à T A, $\frac{3}{4}R+\frac{fvR-2as^2}{-4eR+4av}$; à b B, $v-\frac{3}{4}R-\frac{fvR-2as^2}{-4eR+4av}$; Momentum

mentum reſpectu b B, $\frac{3}{4}eR^2 + \frac{3}{4}svR - \frac{1}{2}as^2$: Momentum reſpectu A α, $-\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2 + \frac{1}{2}a^2v$; reſpectu b β, $-\frac{1}{2}a^2R + vR^2 + \frac{1}{2}a^2v$; Diſtantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{2}a - \frac{2vR - as}{-2eR + 2av}R$; à b β, $\frac{1}{2}a + \frac{2vR - as}{-2eR + 2av}R$. I. Fig. 169, 170.

Adeoque determinavimus, totius Figuræ Sinuum Verſorum, arcuumve, ejuſque partium expoſitarum magnitudines, & momenta reſpectu rectarum aliquot expoſitarum, eorumque Centrorum gravitatis ab illis rectis diſtantias; adeoque & ipſa Centra gravitatis, per eorundem à duabus ſaltem in eodem plano non parallelis rectis, determinavimus.

Atque hinc Ungularum, & Solidorum converſione factorum, horumve Semiſolidorum, momentis jam traditis correſpondentium, magnitudines habentur. Horumque omnium rationes, ad his correſpondentia Semicirculum ejuſve portiones ſpectantia. Quæ & ad alia facile poterunt ampliari. K. L. R.

PARS SECUNDA.

Atque his Analoga, in Figura *Sinuum Rectorum* $\alpha\tau\kappa$, similiter determinantur. Nempe, M. Fig. 170.

Bilinei $\alpha\tau\kappa$, magnitudo, $2R^2$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}R^2P$; Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{16}P$; à T τ vel A α, $\frac{1}{4}P$; momentum reſpectu T τ, vel A α, $\frac{1}{2}R^2P$.

Trilinei $\alpha\delta\kappa$; magnitudo, R^2; Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{16}R^2P$; Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{16}P$: Momentum reſpectu A α, R^3; reſpectu $\delta\kappa$, $\frac{1}{4}R^2P - R^3$; Diſtantia Centri gravitatis ab A α, R, à $\delta\kappa$, $\frac{1}{4}P - R$. N, Q. P, Q.

Portionis $\alpha\beta\upsilon$, magnitudo vR; Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}e\mathrm{R}^2 + \frac{1}{4}sv\mathrm{R}$; Diſtantia Centri gravitatis ab $\tau\alpha$, O, Q.

eR

P, Q. Fig. 169, 170. $\frac{eR + sv}{4v}$: Momentum reſpectu $A\alpha$, $-eR^2 + avR$; reſpectu $\beta\upsilon$, eR^2; Diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{-eR + av}{v}$; à $\beta\upsilon$, $\frac{eR}{v}$.

R. Adeoque determinavimus, totius Figuræ Sinuum Rectorum, ejuſque partium expoſitarum, magnitudines, & momenta reſpectu rectarum aliquot expoſitarum; eorumq; Centrorum gravitatis diſtantias ab illis rectis: Adeoque & ipſa gravitatis Centra, per ſuas à duabus ſaltem in eodem plano rectis non ſibi mutuo parallelis diſtantias, determinavimus.

Atque huic de Ungulis; Solidiſve converſione factis, eorúmve Semiſolidis, aliiſque quæ hinc dependent, calculo debite adhibito, judicium fiet.

Quæque de portionibus hic expoſitis dicta ſunt, poſſunt & aliis portionibus facile accommodari; aliáſve multis modis ampliari.

Eademque (horum ope) ad $\alpha\kappa\Gamma$ figuræ Sinuum rectorum unius quadrantis Complementum facile transferetur.

S. Quæ autem de his Sinuum Verſorum, Rectorumve, Figuris dicta ſunt: ad eaſdem Protractas, vel Contractas, facile accommodantur.

T. Quæque de Figura Sinuum Rectorum unius quadrantis traduntur, eadem ad figuram Subtenſarum ſive Chordarum Semicirculi, ſimiliter transferentur. Quod & de Solidis inde oriundis etiam intelligendum erit.

A. Fig. 169, 170. INtelligatur Circuli $A\alpha$, (Fig. 169.) Semiperipheria $AD\alpha$, in partes quotlibet æquales dividi, in punctis X, Z, D, E, &c. unde ducantur XO, ZV, DC, EΣ, &c. Sinus Recti arcuum arithmetice proportionalium, AX, AZ, AD, AE &c, quorum Sinus Verſi AO, AV, AC, &c. adeoque arcuum reſiduorum ad Semicirculum

circulum Sinus versi (seu punctorum X, Z, D, &c. altitudines supra τα, tangentem,) Oα, Vα, Cα, &c. Fig. 169, 170.

Eique Semiperiphæriæ in rectam expansæ, æqualis ponatur (Fig. 170.) A T, seu ατ, similiter divisa, in punctis ξ, ζ, δ, ε, &c. quibus insistant ex una parte,) ξο, ζυ, δχ, &c. ipsis XO, ZV, DC, &c. (Fig. 160.) æquales; figuram Sinuum Rectorum ανт (si numero infinitæ intelligantur) complentes, (juxta def. 1. Cap. 4.) & (ex parte contraria) ipsis Oα, Vα, Cα, &c. æquales rectæ xξ, zζ, dδ, &c. similiter complentes Ατα figuram Sinuum versorum; ipsi Aα circulo æquealtam.

Quæ quidem Ατα *Figura Sinuum versorum*, sumptis arcubus arithmetice proportionalibus; est etiam, alia consideratione, *Figura Arcuum*, sumptis nempe Sinubus Versis arithmetice proportionalibus. Sumptis utique AV, AC, AΣ, &c. Sinubus versis arithmetice proportionalibus; (divisa sc recta Aα in partes quotlibet æquales) quæ ipsis occurrant rectæ ZV, dC, eΣ, &c. æqualibus intervallis dissitæ figuram Ατα complentes; hoc est, αζ, αδ, αε, &c. æquantur arcubus correspondentibus, AZ, AD, AF, &c. & sic ubique.

Ductis jam in Semicirculo rectis Xα, Zα, Dα, &c. dirimi intelligatur Semicirculus in totidem Sectores AαX, XαZ, ZαD, &c. quorum arcus AX, XZ, ZD, &c. sint æquales; adeoque sectorum XαA, ZαA, DαA, &c. arcus XA, ZA, DA, &c. arithmetice proportionales.

Quibus quidem arcuum æqualium Sectoribus AαX, XαZ, ZαD, &c. respondeant, in figurâ Sinuum versorum, quadrilatera Aαξx, Xξζz, zζδd, &c. basium αξ, ξζ, ζδ, &c. æqualium, tum inter se, tum ipsis AX, XZ, ZD, &c. arcubus; (propter rectam ατ, Semiperipheriæ ADα, æqualem, & similiter divisam.) Adeoque arcuum arithmeticè proportionalium Sectoribus, XαA, ZαA, DαA, &c. similiter respondebunt quadrilinea xξαA, zζαA, dδαA, basium arithmetice proportionalium αξ, αζ, αδ, &c.

Suntque hæc Quadrilinea, Sectorum illorum, (Singula singulorum respectivè sumptorum,) dupla. Quod sic ostenditur.

Intelligatur vel tota ADα Semiperipheria, vel ipsius arcus AB, in partes æquales numero infinitas dirimi; adeoque (ductis à divisionum punctis ad α rectis Xα, Zα, &c.) vel totus ADα Semicirculus, vel ipsius Sector BαA, in totidem Sectores dirimi. Ductisque, a divisionum punctis, rectis XD, ZP, &c. tangenti τα parallelis, intelligatur Sectori Inscribi figura ex totidem Triangulis, OXα, PZα, &c. Ductisque porro eidem tangenti parallelis, AQ, XI, &c. (productisque αX, αZ, &c.) similiter intelligatur Sectori Circumscribi figura ex Triangulis AQα, XΓα, &c.

Fig. 169, 170. Et similiter Figuræ Sinuum versorum $A\tau\alpha$, vel tota, vel ipsius portio $b\beta\alpha A$, (Sectori $B\alpha A$ correspondens) in totidem Quadrilinea, basium æqualium, (Sectoribus correspondentia) distribui; (rectâ scilicet $\alpha\tau$, vel $\alpha\beta$ similiter divisâ, prout dividitur $AD\alpha$, vel AB, arcus; ductisque rectis correspondentibus, ξx, ζz, &c.) Ductisque xO, zp, &c. ipsi $\tau\alpha$ parallelis; inscribi intelligatur Figura ex Parallelogrammis $Ox\xi\alpha$, $pz\zeta\xi$, &c. (Triangulis $OX\alpha$, $PZ\alpha$, &c. correspondentibus.) Ductisque eidem $\tau\alpha$ parallelis Aq, xi, &c. (productisque ξx, ζz, &c.) Circumscribi intelligatur Figura ex Parallelogrammis $Aq\xi\alpha$, $xi\zeta\alpha$, &c. (Triangulis $AQ\alpha$, $XI\alpha$, &c. correspondentibus.)

Suntque hæc Parallelogramma Triangulis illis, (propter rectas $A\alpha$, $x\xi$, $z\zeta$, &c. ipsis $A\alpha$, $O\alpha$, $V\alpha$, &c. ex constructione æquales,) singula singulis respective sumptis, æquealta: Tum quæ Circumscriptas, tum quæ Inscriptas figuras complent.

Sunt autem Inscriptorum Parallelogrammorum Bases, basibus Triangulorum inscriptorum correspondentium, ubique majores; & propter Parallelogramma Triangulorum, (singula singulorum respective, adeoque & omnia omnium,) plusquam dupla. Est utique Parallelogrammi $Ox\xi\alpha$, basis xo, seu $\xi\alpha$ recta, hoc est (utpote ipsi æqualis ex constructione) arcus XA, major sinu suo Xo (base Trianguli correspondentis;) ut patet. In reliquis autem; ut $pz\zeta\xi$; Parallelogrammi basis zp, seu $\zeta\xi$, recta; (æquali, arcui ZX, ex constructione,) est major quam ZX chorda: sed & hæc major est, quam ZP, basis trianguli correspondentis $PZ\alpha$; propter angulum ZPX (Trianguli PZX) illi oppositum majorem angulo huic opposito ZXP. Est enim angulus ZPX, vel huic æqualis PXO, hoc est, αXO, angulus in Peripheriâ arcum subtendens (in opposito Semicirculo) æqualem arcui $X\alpha$; & angulus ZXP, hoc est, $ZX\alpha$, angulus item in Peripheriâ, subtendens arcum $z\alpha$, (arcu $X\alpha$ minorem;) est igitur angulus PXO, hoc est angulus ZPX, major angulo ZXP; adeoque ZX recta, major rectâ ZP; & multo magis ZX Curva, seu huic æqualis $\zeta\xi$ seu zp basis parallelogrammi, major erit quam eadem ZP basis Trianguli: adeoque parallelogrammum Trianguli plusquam Duplum. Et sic ubique. Itaque Figura ex Parallelogrammis, sive toti Figuræ Sinuum versorum, sive ipsius portioni $Az\zeta\alpha$ inscripta plusquam dupla Figuræ ex Triangulis inscriptæ sive toti Semicirculo, sive Sectori $B\alpha A$.

Sed Circumscriptorum Parallelogrammorum bases, Basibus Triangulorum circumscriptorum correspondentibus, minores sunt. Est enim

enim Parallelogrammi A q ξ α, basis A q seu ξ α, hoc est arcus XA, minor Tangente Q A; (cujus semissis, est tangens semiarcûs, secanti ex Centro ductæ occurrens: adeoque semiarcu illo major.) In reliquis verò, ut x i ζ ξ; Basis Parallelogrammi x i, seu ξ ζ; hoc est arcus Z X, minor est quam recta X I, basis Trianguli correspondentis. Ductâ enim tangente Z χ, (quæ rectæ X I occurrat in χ,) æquales erunt anguli (propter eundem arcum Z A interceptum) χ Z A, & Z α A (angulus in peripheria) seu I α O: adeoque & horum ad rectum residui χ Z I & χ I Z seu O I α; (est utique, propter A Z α angulum in semicirculo, etiam A Z I, hoc est χ Z A + χ Z I, rectus; &, propter I O α triangulum rectangulum, ad O, duo reliqui anguli O I α + I α O rectum æquant.) Et propterea æquales sunt Z χ & I χ rectæ; & (sumpta communi χ X,) recta I X, hoc est I χ + χ X, æqualis duabus simul Z χ + χ X; adeoque major arcu Z X. Est itaque Z X arcus, hoc est recta ζ ξ, seu i x, basis Parallelogrammi, minor quam I X basis Trianguli correspondentis: Et propterea Parallelogrammum Trianguli minus quam Duplum. Et sic ubique. Est itaque, Figura ex parallelogrammis, sive toti A τ α figuræ Sinuum versorum, sive ipsius portioni b β α A, circumscripta, minor quam Dupla Figuræ ex Triangulis correspondentis, sive toti Semicirculo, sive ejusdem Sectori B α A circumscriptæ. Fig. 169, 170.

Cum itaque Figura ex Parallelogrammis inscripta, sit inscriptæ ex Triangulis major quam dupla; & circumscripta circumscriptæ minor quam dupla: Cumque, multiplicatis sectionibus, inscriptæ & circumscriptæ differentia continuè decrescat utrobique, donec tandem datâ quâvis minor evadat: Nec tamen unquam Inscripta inscriptæ minor quam dupla, nec Circumscripta circumscriptæ major quam dupla esse possit: Continuatâ in infinitum sectione, evanescet differentia; inscriptis simul & circumscriptis coincidentibus; illic, cum Figura A τ α, ejusve Quadrilineo b β α A; hic, cum Semicirculo A D α, ejusve Sectore B α A: Eritque illa Sinuum versorum Figura A τ α, ejusve Portio b β α A; Dupla semicirculi A D α, ejusve Sectoris B α A. Quod erat probandum.

Hoc est; Trilineum A τ α, duplum semicirculi A D α; ejusque portio b β α A, dupla Sectoris B α A; Et, propterea, portio reliqua b β τ, segmenti α B α, dupla erit. Item, d δ ξ x, dupla Sectoris correspondentis D α X; & sic ubique.

Est autem, (retentis symbolis, ut in propositionibus duabus proxime præcedentibus,) Semicirculus A D α $= \frac{1}{4} PR$; ergo, Figura B.

 Sinuum

Fig. 169, 170. Sinuum verſorum ſeu Trilineum A $\tau\alpha = \frac{1}{2}PR$. Item Sector B α A $= \frac{1}{2}aR + \frac{1}{2}sR = \frac{1}{2}fR$, (per § H. prop. 15.) Ergo, (poſita $\alpha\beta =$ BA $= a$; adeoque βB $= \alpha$V $= b$; & bK = VA $= v$;) portio b$\beta\alpha$A (utpote Sectoris dupla) $aR + sR = fR$. Item, Segmentum ABA $= \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR = \frac{1}{2}eR$ (per § G. prop. 15.) Ergo AbK $= aR - sR = eR$. (Eſt utique AzK: ſimile, & ſimiliter poſitum ad TA, ut τeα ad $\tau\alpha$: ſicut &, in Semicirculo, Segmentum AZA ad TA, ut αEα ad $\tau\alpha$: & ſic alibi.) Et ſimiliter Segmentum αB$\alpha = \frac{1}{2}\alpha R - \frac{1}{2}sR = \frac{1}{4}PR - \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR = \frac{1}{4}PR - \frac{1}{2}fR$: Ergo portio b$\beta\tau = \alpha R - sR = \frac{1}{2}PR - aR - sR = \frac{1}{2}PR - fR$. Et ſic alibi.

Et conſequenter; ſi ex b$\beta\alpha$A portione, auferatur Parallelogrammum βbB$\alpha = ab = 2aR - av$; erit Segmentum reſiduum AbB $= fR - ab = -aR + sR + av = -eR + av$. Et ſpeciatim in ſegmento AdC, (propter $a = \frac{1}{4}P$, & $s = v = R$,) R^2.

Item Quadrilineum zkCA = z$\zeta\alpha$A − k$\zeta\alpha$C (propter z$\zeta\alpha$A $= aR + sR$, & k$\zeta\alpha$C $= aR$) eſt sR. Et zkd $= R^2 - sR$; Nempe, (propter $R - s$, differentiam Radii & Sinus recti arcûs ZA, æqualem ſinui verſo arcûs ZD,) factum ex ſinu verſo arcus DZ in Radium ducto. (Dico autem zkCA; potius quam bkcA, ut diſtinguam punctum b ſupra Centrum, ab illo infra Centrum. Quamquam & alteri etiam b, re rite intellectâ, idem accommodabitur: Nempe, ſi dkb infra Centrum hoc eſt dke, exponatur negative, utpote ad contrarias partes rectæ Cdc & extra figuram A$\tau\alpha$: Quippe ſic, utrovis ſitu, erit b$\beta\alpha$A − k$\beta\alpha$C = bkCA; id quod rectis bk, kC, CA, & curvâ Ab, comprehenditur; nempe, utrobique, AdC − dkb, ſenſu poſitivo.)

Et ſimiliter de aliis portionibus utcunque rectâ abſciſſis, mutatis mutandis, fiet judicium.

Poteſtque Trilinei AbB ſeu AbV fig. 170. (quod utique complent rectæ bV æquales arcubus BA $= a$, quorum Sinus verſi AV $= v$ ſint arithmetice proportionales) magnitudo, ſic aliàs (ex arcuum ad ſinus verſos ratione) explicari.

Ductis enim (ut fig. 186.) BgT Semicirculum tangentibus; Fig. 186. (Tangenti verticis TA in T occurrentibus;) diviſaque Aα diametro in partes æquales infinite exiguas, quarum una intelligatur Vo $= B$; (adeoque ſumptis AV $= v$, arithmetice proportionalibus;) ductaque recta oXg (rectæ BV parallelâ) quæ ſemicirculo in X occurrat, & tangenti proximæ BT in g: Erit ubique (per § A. propoſitionis 13.) ut BV $= s$, ad R; ſic Vo $= B$, ad Bg $=$

BR

$\frac{BR}{s}$. (Nempe, ut *Secantes complementi*, Sinibus rectis reciproce proportionales.) Et, consequenter; si intelligantur αO, vel VO, rectangulum AαOO complentes, singulis Vo (rectam Aα complentibus) æquales; & sumantur ubique, ut BV=s, ad R; sic VO, ad Vω: erunt singulæ Vω, (hoc est totidem $\frac{BR}{s}$, sumptis v arithmetice proportionalibus,) singulis Bg tangentibus (respective sumptis,) hoc est, (in partibus infinite exiguis,) ipsis BX arcubus (totum BA complentibus) æquales. Adeoque, ut *Omnes* $\frac{BR}{s}$, seu rectæ Vω, complentes AVωω figuram interminabilem; ad *totidem* B, complentes AVOO rectangulum; (seu ut Figura illa, ad hoc rectangulum;) sic *omnes* BX arcum BA complentes, ad *totidem* Vo complentes rectam VA; seu Arcus AB, ad ejusdem sinuum versum AV.

Cumque hoc ubique obtineat; erunt, *Omnes* AB arcus (superficialem Ungulam Semiquadrantalem BA, cujus acies BV, complentes,) vel (his æquales) rectæ bV trilineum AbV complentes; ad *omnes* AV respectivos sinus versos arithmetice proportionales vel AV Semiquadrantalem Ungulam aciem habentem V, hoc est, ad Semiquadratum AV; ut sunt *omnes* AVωω figuræ interminabiles correspondentes, hoc est, Ungula AVωω aciem habens Vω; ad *omnes* AVOO, hoc est, Ungulam AVOO aciem habentem VO.

(Et, eadem ratione; Momentum superficialis istius Ungulæ, arcui BA insistentis, ad momentum istius superficialis Ungulæ seu Semiquadrati AV, respectu ejusdem bVB; ut ejusdem Ungulæ solidæ AVωω momentum, ad momentum correspondentis Ungulæ Solidæ AVOO, respectu aciei Vω. Et similiter ejusmodi aliæ solidorum portiones huc spectantium, facile exhibentur.)

Verum, cum præcedens illa figuræ Aτα consideratio, sit calculo magis accommoda, quam hæc figuræ interminabilis, (*Secantium complementi*, sinibus versis arithmetice proportionalibus convenientium:) priorem potius prosequemur. Atque inde, si opus fuerit, interminabilis hujus figuræ dimensio, reliquaque quæ eo spectant, deduci poterunt. Quod hic sufficiat innuisse.

Porro; Si intelligatur Semicirculus (juxta def. 1. Cap. 4.) ex infinitis numero Sectoribus constitutis ut AαX, XαZ, &c. vel etiam C.

Fig. 169, 170. etiam (quod in partibus infinite exiguis, propter infinitam approximationem, tantundem valet,) ex infinitis numero Triangulis, figuram inſcriptam complentibus, ut OαX, PαZ, &c. ſive, ex totidem Triangulis figuram circumſcriptam complentibus, ut QαA, IαX, &c. aut etiam figuram inſcriptæ & circumſcriptæ intermediam (utpote partim inſcriptam partim circumſcriptam) complentibus, ut YαP, &c. (quæ rectis αX, αZ, &c. ut illorum axibus repræſententur:) Intelligenda erit ſimiliter Figura Sinuum verſorum Aτα, ex totidem conſtitui correſpondentibus Quadrilineis ut Aαξx, xξζz, &c. Sectorum illorum duplis; vel etiam (quod eodem recidit, ſectione in infinitum continuatâ,) ex totidem Parallelogrammis, figuram inſcriptam complentibus, ut Xxξα, pzζξ; &c. aut circumſcriptam complentibus, ut Aqξα, xiζξ, &c. aut quæ figuram partim inſcriptam partim circumſcriptam complent, qualia pyδξ, &c. (quæ rectis xξ, zζ, &c. ut eorum axibus repræſententur; quæ triangulorum æquealtorum αX, αZ, &c. dupla intelligantur.)

Eſt autem Diſtantia Centri gravitatis in Parallelogrammis ξx, ζz, &c. ad Diſtantiam Centri gravitatis in Triangulis æquealtis, αX, αZ, &c. (à recta τα;) ut $\frac{1}{2}$ ad $\frac{2}{3}$; ſeu, ut 3 ad 4, (per prop. 6. hujus.) Adeoque (propter magnitudines ut 2 ad 1;) Erunt momenta Parallelogrammorum (tum ſingulorum, tum ſimul omnium,) ad Triangulorum reſpectivorum momenta, (tum ſingulorum, tum ſimul omnium;) ut 3 ad 2, (propter $\frac{2}{1} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$:) Adeoque Momentum Trilinei Aτα, ad momentum Semicirculi ADα; ejuſque portionis, (ut Abβα, ſeu xξδd, ſeu bβτ,) momentum, ad momentum ſectoris correſpondentis, (ut BαA, ſeu XαD, ſeu ſegmenti αBα,) reſpectu rectæ τα; ut 3 ad 2.

Eſt autem Semicirculi ADα reſpectu τα momentum (propter magnitudinem $\frac{1}{4}PR$, & Centri gravitatis diſtantiam, R,) $\frac{1}{4}R^2P$; ergo Trilinei Aτα, reſpectu τα, momentum, (utpote ad illud Semicirculi, ut 3 ad 2,) $\frac{3}{8}R^2P$. (Hoc eſt, omnia $\frac{1}{2}b^2$, ſeu $\frac{1}{2}v^2$ totius ſemicirculi, ſeu ſemiſumma quadratorum ſinuum verſorum totius ſemicirculi, ſumptis arcubus arithmetice proportionalibus.) Adeoque (propter magnitudinem $\frac{1}{2}PR$,) diſtantia Centri gravitatis à τα, $\frac{3}{4}R$; ideoque à TA, $\frac{5}{4}R$; ejuſque momentum reſpectu TA, $\frac{5}{8}R^2P$.

Ergo & Semiquadrantalis Ungula eidem inſiſtens, aciem habens τα, $\frac{3}{8}R^2P$; & aciem habens TA, $\frac{5}{8}R^2P$: Solidumque ejuſdem converſione circa τα factum, $\frac{3}{8}RP^2$; & Semiſolidum $\frac{3}{16}RP^2$: &, circa TA, Solidum $\frac{5}{8}RP^2$; & Semiſolidum $\frac{5}{16}RP^2$.

Item;

Item; Sectoris B α A momentum respectu $\tau\alpha$ (per § M. prop. 15.) $\frac{1}{2}aR^2+\frac{5}{6}sR^2-\frac{1}{6}svR=\frac{1}{2}fR^2+\frac{1}{6}shR$: Ergo, Portionis b$\beta\alpha$A, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}aR^2+\frac{5}{4}sR^2-\frac{1}{4}svR=\frac{3}{4}fR^2+\frac{1}{4}shR$; (idemque est Ungula Semiquadrantalis, portioni b$\beta\alpha$A insistens, aciem habens $\tau\alpha$:) Adeoque (propter magnitudinem, $aR+sR=fR$,) distantia Centri gravitatis portionis b$\beta\alpha$A, à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}R+\frac{sh}{4f}$; & à TA, $\frac{5}{4}R-\frac{sh}{4f}$; & propterea ejusdem respectu TA, momentum (seu Semiquadrantalis Ungula,) $\frac{5}{4}aR^2+\frac{3}{4}sR^2+\frac{1}{4}svR=\frac{5}{4}fR^2-\frac{1}{4}shR$. Et consequenter, Solidum, portionis b$\beta\alpha$A conversione circa $\tau\alpha$ factum, $\frac{3}{4}fRP+\frac{1}{4}shP$; & Semisolidum, $\frac{3}{8}fRP+\frac{1}{8}shP$: &, circa TA, Solidum $\frac{5}{4}fRP-\frac{1}{4}shP$; & Semisolidum, $\frac{5}{8}fRP-\frac{1}{8}shP$. D. Fig. 169, 170.

Item; Segmenti ABA, momentum respectu TA, (per § N. prop. 15.) est $\frac{1}{2}aR^2-\frac{1}{2}sR^2-\frac{1}{6}svR=\frac{1}{2}eR^2-\frac{1}{6}svR$; ergo, Trilinei AbK momentum respectu TA (vel semiquadrantalis Ungula aciem habens TA,) est $\frac{3}{4}eR^2-\frac{1}{4}svR$: (Hoc est, omnia $\frac{1}{2}v^2$; seu semisumma quadratorum sinuum versorum arcuum arithmetice proportionalium, ab A, usque ad AB.) Adeoque (propter magnitudinem eR) distantia Centri gravitatis à TA, $\frac{3}{4}R-\frac{sv}{4e}$; ideoque à $\tau\alpha$, $\frac{5}{4}R+\frac{sv}{4e}$; ejusque respectu $\tau\alpha$ momentum, $\frac{5}{4}eR^2+\frac{1}{4}svR$: Et consequenter; Solidum ejusdem conversione factum circa TA, $\frac{3}{4}eRP-\frac{1}{4}svP$; & Semisolidum, $\frac{3}{8}eRP-\frac{1}{8}svP$: &, circa $\tau\alpha$, Solidum, $\frac{5}{4}eRP+\frac{1}{4}svP$; & Semisolidum, $\frac{5}{8}eRP+\frac{1}{8}svP$. E.

Similiter; Segmenti αBα, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}aR^2-\frac{1}{2}sR^2-\frac{1}{6}shR=\frac{1}{4}R^2P-\frac{1}{2}aR^2-\frac{5}{6}sR^2+\frac{1}{6}svR$: Ergo, Trilinei b$\beta\tau$, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}aR^2-\frac{3}{4}sR^2-\frac{1}{4}shR=\frac{3}{8}R^2P-\frac{3}{4}aR^2-\frac{5}{4}sR^2+\frac{1}{4}svR$. Adeoque (propter magnitudinem $aR-sR$) distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}R-\frac{sh}{4a-4s}$: ideoque à TA, $\frac{5}{4}R+\frac{sh}{4a-4s}$; ejusque respectu TA momentum (vel correspondens Ungula) $\frac{5}{4}aR^2-\frac{5}{4}sR^2+\frac{1}{4}shR$. Et, consequenter, Solidum ejusdem circa $\tau\alpha$ conversione factum, $\frac{3}{4}aRP-\frac{3}{4}sRP-\frac{1}{4}shP$; & Semisolidum, $\frac{3}{8}aRP-\frac{3}{8}sRP-\frac{1}{8}shP$: Et, circa TA, Solidum $\frac{5}{4}aRP-\frac{5}{4}sRP+\frac{1}{4}shP$; & Semisolidum, $\frac{5}{8}aRP-\frac{5}{8}sRP+\frac{1}{8}shP$.

Si vero ex momento Quadrilinei b$\beta\alpha$A, respectu $\tau\alpha$, vel TA; F.

auferatur

Fig. 169, 170. auferatur momentum Parallelogrammi β b B α; habebitur (respectu earundem $\tau\alpha$, T A,) momentum Segmenti A b B.

Est autem Parallelogrammi β b B α (propter $\beta\alpha = a$, & b$\beta = h$) magnitudo ah; & (propter Centri gravitatis à $\tau\alpha$ distantiam $\frac{1}{2}h$ adeoque à T A, $2R - \frac{1}{2}h$,) momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}ah^2 = 2aR^2 - 2avR + \frac{1}{2}av^2 = 2aR^2 - avR - \frac{1}{2}as^2$; & respectu T A, $2ahR - \frac{1}{2}ah^2 = 2aR^2 - \frac{1}{2}av^2 = 2aR^2 - avR + \frac{1}{2}as^2$.

Adeoque (subductione factâ) Segmenti b B A, momentum respectu $\tau\alpha$ (vel correspondens Ungula Semiquadrantalis,) $-\frac{5}{4}aR^2 + \frac{5}{4}sR^2 + avR - \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 = -\frac{5}{4}eR^2 + avR - \frac{1}{4}svR + \frac{1}{2}as^2 = \frac{5}{4}fR^2 + \frac{1}{4}shR - \frac{1}{2}ah^2$; respectu T A, $-\frac{3}{4}aR^2 + \frac{3}{4}sR^2 + avR + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 = \frac{5}{4}fR^2 - 2ahR - \frac{1}{4}shR + \frac{5}{2}ah^2$. Et (propter magnitudinem, $-aR + sR + av$,) distantia Centri gravitatis Segmenti A b B, à $\tau\alpha$, $\frac{5}{4}R - \frac{fvR - 2as^2}{-4eR + 4av}$; à T A, $\frac{3}{4}R + \frac{fvR - 2as^2}{-4eR + 4av}$; à b V, $\frac{5}{4}R - h - \frac{fvR - 2as^2}{-4eR + 4av} = -\frac{3}{4}R + v - \frac{fvR - 2as^2}{-4eR + 4av}$: Adeoque momentum respectu b V, $\frac{3}{4}aR^2 - \frac{3}{4}sR^2 + \frac{3}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 = \frac{3}{4}eR^2 + \frac{3}{4}svR - \frac{1}{2}as^2$. Et speciatim, Segmenti A d C momentum respectu D C (propter $a = \frac{1}{4}P$, & $s = v = R$,) $\frac{1}{16}R^2P$: Ejusque Centri gravitatis à D C distantia, $\frac{1}{16}P$. (Vel etiam, ex Trilinei A b B momento respectu $\tau\alpha$, subducto quod fit ex magnitudine in αV$=h$, nempe $-ahR + shR + ahv = -2aR^2 + 2sR^2 + avR - svR + as^2$; habetur Trilinei A b B momentum respectu b V vel Semiquadrantalis Ungula, $\frac{3}{4}aR^2 - \frac{3}{4}sR^2 + \frac{3}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 = \frac{3}{4}eR^2 + \frac{3}{4}svR - \frac{1}{2}as^2$; ut prius.)

Adeoque Solidum ejusdem A b B conversione circa $\tau\alpha$ factum, est, $-\frac{5}{4}eRP + avP - \frac{1}{4}svP + \frac{as^2P}{2R}$; circa T A, $-\frac{3}{4}eRP + avP + \frac{1}{4}svP - \frac{as^2P}{2R}$; & circa b V, $\frac{3}{4}eRP + \frac{3}{4}svP - \frac{as^2P}{R}$: Et semisolida, semisses horum.

G. Habentur autem eorundem Planorum, Momenta respectu A α, vel Semiquadrantales Ungulæ aciem habentes Aα, per prop. 18. Cap. 3. vel prop. 22. Cap. 4. vel prop. 10 hujus.

Si enim rectæ omnes x ξ, z ζ, &c. complentes A $\tau\alpha$ Trilineum, (vel minuta quæ his repræsentantur parallelogramma, Trilineum illud complentia,) ducantur in suas ab A α distantias $\alpha\xi$, $\alpha\zeta$, &c. vel in his

his æquales ξΞ, ζϛ, &c. (triangulum ατt complentes;) Habetur Semiquadrantalis Ungula trilineo Aτα insistens, aciem habens Aα. Quam utique complent, ipsa xξα, zζα, &c. seu xξΞ, zζϛ, &c. Parallelogramma (seu minuta Prismata) ipsis xξ, zζ, &c. (rectis, seu minutis parallelogrammis) insistentia. Hoc est, omnia *ah*, facta ex arcubus arithmetice proportionalibus in residuorum ad semiperipheriam sinus versos ductis. Fig. 169, 170.

Aut etiam; si intelligatur Aα in partes invicem æquales, in punctis Z, D, &c. dividi, (adeoque rectas Zz, Dd, &c. hoc est αζ, αδ, &c. repræsentare non quidem arcus arithmetice proportionales, sed qui respondent sinubus versis AV, AC, &c. arithmetice proportionalibus, puta AZ, AD, &c. fig. 169. adeoque Trilineum Aτα consideretur non tam ut *Figura Sinuum Versorum* arcubus arithmetice proportionalibus convenientium, ipsi Aα parallelorum, quàm ut *Figura Arcuum*, in rectas expansorum, sinubus versis arithmetice proportionalibus convenientium, ipsi ατ parallelarum;) eandem Ungulam complebunt Arcuum illorum Semiquadrata, seu Triangula eisdem Zz, Dd, &c insistentia; ipsis scilicet αζϛ, αδΔ, &c. similia & æqualia: Hoc est, Omnia $\frac{1}{2}a^2$; sumptis *v* arithmetice proportionalibus.

Si verò eadem Ungula, tertiis adhuc planis (seu exiguis Prismatibus) componi intelligatur, Basi seu Trilineo Aτα parallelis, Ungulam complentibus; erunt ea (propter Ungulæ Obliquam Sectionem, adeoque plana superiora continue magis magisque ab Aα deficientia,) Trilineis Aτα, xτξ, zτζ, &c. (usque ad ultimum fτφ, ipsumve τ punctum;) æqualia: Hoc est, totidem Aτα planis, demptis omnibus xξαA, zζαA, &c. Hoc est; Prismati altitudinem habenti ατ, demptâ contrariâ Ungulâ, super eadem Aτα base, aciem habente Tτ. Et similiter, quæ Ungulam portioni bβαA insistentem complent plana; sunt ipsis bβαA, bβξx, bβζz, &c. (usque ad ipsam bβ) æqualia: Hoc est, totidem bβαA, demptis omnibus xξαA, zζαA, &c. seu Prismati ipsi bβαA insistenti altitudinem habenti æqualem ipsi βϛ = βα, seu arcui BA = *a*; demptâ contrariâ Ungulâ, aciem habente bβ.

Atque hanc tertiam Ungulæ compositionem, ut calculo magis opportunam, (cum perinde sit, Ungulæ magnitudinem quod spectat, planive momentum, sive hæc, sive illa, sive ista demum sumatur,) speciatim hic considerabimus.

Est autem (ut § A.) Trilineum Aτα, $\frac{1}{2}RP$; ergo, *omnia Aτα*; hoc est, Aτα, in $\tau\alpha = \frac{1}{2}P$, ducta; $\frac{1}{4}RP^2$.

Item;

Fig. 169, 170. Item; portio b$\beta\alpha$A, (per § A.) $aR + sR$; Adeoque omnia x$\xi\alpha$A, z$\zeta\alpha$A, &c. (usque ad $\tau\alpha$A,) sunt *omnia* $aR + sR$. Suntque, omnia a, (hoc est, summa arcuum arithmetice proportionalium, quorum maximus AD$\alpha = \frac{1}{2}P$,) Semissis quadrati $\tau\alpha = \frac{1}{2}P$; seu $\frac{1}{8}P^2$: (per prop 1. hujus.) Adeoque, *Omn.* $aR, = \frac{1}{8}RP^2$. Et, *omnia* s, (hoc est, summa Sinuum rectorum totius Semicirculi,) $= 2R^2$ (per § M. prop. 13. hujus.) Adeoque *Omn.* $sR, = 2R^3$. Ergo omnia x$\xi\alpha$A, z$\zeta\alpha$A, &c. quadrilinea; hoc est, *Omn.* $aR + sR$; (hoc est, Ungula Trilinei A$\tau\alpha$, aciem habens, τT; seu correspondens Momentum;) $\frac{1}{8}RP^2 + 2R^3$.

Ergo; Momentum ejusdem A$\tau\alpha$, respectu Aα; (seu correspondens Ungula aciem habens Aα;) hoc est, Omnia A$\tau\alpha$, x$\tau\xi$, z$\tau\zeta$, &c. seu, Totidem A$\tau\alpha$, demptis omnibus x$\xi\alpha$A, z$\zeta\alpha$A, &c. Hoc est, Prisma Trilinei A$\tau\alpha$, (altitudinem habens $\tau\alpha$,) dempta contraria Ungula aciem habente τT; Hoc est, Totidem $\frac{1}{2}RP$ demptis omnibus $aR + sR$: Est $\frac{1}{4}RP^2 - \frac{1}{8}RP^2 - 2R^3 = \frac{1}{8}RP^2 - 2R^3$. Atque hoc momentum, per magnitudinem $\frac{1}{2}RP$ divisum, exhibet distantiam Centri gravitatis Trilinei A$\tau\alpha$, ab Aα, $\frac{1}{4}P - \frac{4R^2}{P}$; adeoque à τT, $\frac{1}{4}P + \frac{4R^2}{P}$.

Vel etiam; momentum ejusdem respectu τT, ($\frac{1}{8}RP^2 + 2R^3$) modo inventum; per magnitudinem ($\frac{1}{2}RP$) divisum; exhibet Centri gravitatis à τT distantiam $\frac{1}{4}P + \frac{4R^2}{P}$; adeoque ab A$\alpha$, $\frac{1}{4}P - \frac{4R^2}{P}$; estque (restituendo magnitudinem) ejusdem momentum (seu quadrantalis Ungula) respectu Aα, $\frac{1}{8}RP^2 - 2R^3$. Ut prius.

H. Similiter; Portionis b$\beta\alpha$A, momentum respectu Aα (eâdem ratione,) erit Aggregatum omnium b$\beta\alpha$A, b$\beta\xi$x, b$\beta\zeta$z, &c. usque ad ipsam bβ: Hoc est, Totidem b$\beta\alpha$A demptis omnibus x$\xi\alpha$A, z$\zeta\alpha$A, &c. Hoc est, Prisma ejusdem b$\beta\alpha$A altitudinem habens $\beta\alpha$, demptâ contraria Ungula (ejusdem b$\beta\alpha$A Sectionis) aciem habente bβ.

Est autem ejusmodi portio quævis ut b$\beta\alpha$A, (per § B.) $aR + sR$. Adeoque Omnes x$\xi\alpha$A, z$\zeta\alpha$A, &c. usque ad maximum b$\beta\alpha$A; sunt *Omn.* $aR + sR$; sumptis a arcubus arithmetice proportionalibus usque ad maximum $\alpha\beta$, qui dicatur A; ipsisque s sinubus rectis eorundem arcuum quorum maximus βv dicatur s.

Sunt

Sunt autem *Omnes* a, uſque ad A, (per prop. 1. hujus, utpote arithmetice proportionales,) $\frac{1}{2}A^2$ (ſeu $\alpha\beta\zeta$ triangulum;) adeoque *Omn.* aR, $=\frac{1}{2}A^2R$. Et *Omnes* s, uſque ad maximum $\beta\upsilon = S$, cui reſpondet Sinus verſus A V $= v$; (hoc eſt, $\alpha\beta\upsilon$ trilineum;) ſunt $v\,R$ (per § M, V. prop. 13 hujus) adeoque *omn.* sR, $= vR^2$, Fig. 169, 170.

Ergo; *Omn.* $aR + sR$: $= \frac{1}{2}A^2R + vR^2$, eſt aggregatum omnium x $\xi\,\alpha$ A, z $\zeta\,\alpha$ A, &c. uſque ad b $\beta\,\alpha$ A: Hoc eſt, momentum portionis b $\beta\,\alpha$ A reſpectu ipſius b β; vel huic correſpondens Ungula.

Ejuſdem itaque momentum reſpectu A α, (aut correſpondens Ungula;) hoc eſt, totidem b $\beta\,\alpha$ A minus omnibus x $\xi\,\alpha$ A, z $\zeta\,\alpha$ A, &c. ſeu Priſma baſis b $\beta\,\alpha$ A altitudinem habens $\beta\alpha = A$, demptâ contrariâ Ungulâ b $\beta\,\alpha$ A aciem habente b β: Eſt, $A^2R + ASR$ minus, $\frac{1}{2}A^2R + vR^2$: Hoc eſt, $\frac{1}{2}A^2R + ASR - vR^2$; vel (reſtituto valore minuſcularum a, s,) $\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2$.

Adeoque (momentis per magnitudinem diviſis) Portionis b $\beta\,\alpha$ A, diſtantia centri gravitatis à b β, $\frac{a^2 + 2vR}{2a + 2s}$; & ab A α, $\frac{a^2 + 2as - 2vR}{2a + 2s}$.

Vel à b β, $\frac{1}{2}a + \frac{2vR - as}{2a + 2s}$; & ab A α, $\frac{1}{2}a - \frac{2vR - as}{2a + 2s}$.

Eodem modo oſtendetur (propter b $\tau\,\beta = aR - sR$,) momentum portionis b $\beta\,\tau$, reſpectu b β, (ungulamve correſpondentem cujus acies b β,) eſſe $\frac{1}{2}a^2R - hR^2$; & reſpectu τ T, $\frac{1}{2}a^2R - asR + hR^2$: Et Centri gravitatis diſtantiam à b β, $\frac{a^2 - 2hR}{2a - 2s}$; &, à τ T, $\frac{a^2 - 2as + 2hR}{2a - 2s}$.

Aut etiam, (propter A b K $= aR - sR$,) momentum portionis A b K reſpectu b K (ungulamve correſpondentem,) eſſe $\frac{1}{2}a^2R - vR^2$; & reſpectu A α, $\frac{1}{2}a^2R - asR + vR^2$: Centrique gravitatis diſtantiam à b K, $\frac{a^2 - 2vR}{2a - 2s}$; & ab A α, $\frac{a^2 - 2as + 2vR}{2a - 2s}$.

Si vero, ex Portionis b $\beta\,\alpha$ A, momentis reſpectu b β, & A α; au- I.
feratur Parallelogrammi B b $\beta\,\alpha$ momentum reſpectu utriuſvis (propter centrum gravitatis æqualiter ab utraque diſtans:) Hoc eſt, (propter bβ = Vα = h, & bB = a, hujuſque ſemiſſem $\frac{1}{2}$bB $= \frac{1}{2}a$,) $\frac{1}{2}a^2 h = a^2R - \frac{1}{2}a^2v$: Habetur Segmenti A b B, momentum reſpectu b β, $-\frac{1}{2}a^2R + vR^2 + \frac{1}{2}a^2v$; & reſpectu A α, $-\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2 + \frac{1}{2}a^2v$: Hoc eſt, Semiſumma quadratorum arcuum ſinibus verſis arithmetice pro-

Fig. 169, 170. proportionalibus convenientium, portionum b B A complentium: Adeoque hujus duplum, eorundem quadratorum Summa. Et (momenta per magnitudinem dividendo, hoc eſt, per $-aR+sR+av$, ut § B.) Diſtantia centri gravitatis à b β, $\frac{1}{2}a+\frac{2vR-as}{-2eR+2av}R$; & ab A α, $\frac{1}{2}a-\frac{2vR-as}{-2eR+2av}R$.

Et, ſpeciatim, Segmenti A d C momentum reſpectu d δ, (propter $v=R$) eſt R^3. Centrique gravitatis à d δ diſtantia eſt R.

K. Solidaque & Semiſolida converſione facta; ſunt ad reſpectivas Ungulas, (ut ſæpius dictum eſt,) ut P, & $\frac{1}{2}P$, ad R. Puta,

Solidum Trilinei A $\tau\alpha$ converſione circa τT factum, eſt $\frac{1}{8}P^3+2R^2P$; &, circa A α, $\frac{1}{8}P^3-2R^2P$.

Solidum Portionis b $\beta\alpha$ A converſione circa b β factum, eſt $\frac{1}{2}a^2P+vRP$; &, circa A α, $\frac{1}{2}a^2P+asP-vRP$.

Solidum Portionis b $\beta\tau$ converſione circa b β factum, eſt $\frac{1}{2}a^2P-hRP$; & circa τT, $\frac{1}{2}a^2P-asP+hRP$.

Solidum Portionis A b K converſione circa b K factum, eſt $\frac{1}{2}a^2P-vRP$; & circa A α, $\frac{1}{2}a^2P-asP+vRP$.

Solidumq; Segmenti AbB converſione circa βbK factum, eſt $-\frac{1}{2}a^2P+vRP+\frac{a^2vP}{2R}$; & circa A$\alpha$, $-\frac{1}{2}a^2P+asP-vRP+\frac{a^2vP}{2R}$.

Et Semiſolida, horum ſemiſſes.

L. Si verò libeat hæc Quadrilineorum, & Sectorum correſpondentium, momenta reſpectu A α, inter ſe comparare; (præterquam quod illud jam factum eſt, dum utrorumque momenta dantur;) Dicendum eſt, Momentum Quadrilinei b $\beta\alpha$ A reſpectu ſibi adjacentis A α, ad momentum Sectoris B α A reſpectu A α adjacentis ſibi; eſſe ut, omnes b β (illud complentes) in reſpectivas $\beta\zeta$ (complentes $\alpha\beta\zeta$ Triangulum;) ad eaſdem b β in reſpectivarum βv (complentium $\alpha\beta v$ Trilineum;) Trientem. Hoc eſt, ut Omnia rectangula b $\beta\zeta$ (eo ſpectantia) ad Trientem omnium b βv. Hoc eſt, ut Omnia ah, ad Omnia $\frac{1}{3}sh$.

Quippe Triangula ſingula ut α B (ſectorem complentia) ſunt (quoad magnitudinem) ad correſpondentia Parallelogramma b β (Quadrilineum complentia) ut 1 ad 2, (Intellige, in partibus infinite exiguis, dum Triangula Sectoribus, & Parallelogramma reſpectivis Quadri-

Quadrilineis coincidere reputantur.) Eorumque Triangulorum centra gravitatis in αB poſita, ab α diſtant $\frac{2}{3}\alpha$B; ideoque, ab Aα, $\frac{2}{3}$BV; hoc eſt $\frac{2}{3}\beta\upsilon$. Ergo (propter $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$,) Momenta ſingulorum αB Triangulorum reſpectu adjacentis Aα; hoc eſt, Triangulum αB$=\frac{1}{2}$bβ, in $\frac{2}{3}$BV$=\frac{2}{3}\beta\upsilon$; eſt ad b$\beta$ in $\beta\upsilon$; ut 1 ad 3. Et, conſequenter, omnium Triangulorum hoc eſt Sectoris BαA, momentum reſpectu Aα; ad momentum omnium bβ Parallelogrammorum quadrilineum b$\beta\alpha$A complentium in reſpectivis diſtantiis $\beta\upsilon$ ſuſpenſorum; ut 1 ad 3. Eſt autem (per § S. prop. 15.) Sectoris BαA, momentum reſpectu Aα, ſeu correſpondens Ungula, $\frac{1}{3}vR^2+\frac{1}{6}s^2R$: Ergo, omnia b$\beta\upsilon$ Rectangula; ſeu Omnia hs, aut omnia $2sR-vs$; eo ſpectantia; (hoc eſt, Solidum Quadrilineo b$\beta\alpha$A incumbens, altitudinem habens ſuper ſingulas rectas xξ, zζ, &c. æqualem reſpectivis ξo, $\zeta\upsilon$, &c.) $vR^2+\frac{1}{2}s^2R$. Et de aliis iſtiuſmodi Solidi portionibus, mutatis mutandis, ſimile fiet judicium. Puta, (propter Segmentum ABA $=\frac{1}{2}aR-\frac{1}{2}sR$, ejuſque reſpectu A$\alpha$, momentum $\frac{1}{3}vR^2-\frac{1}{6}s^2R$, per § Q. prop. 15.) quæ portioni AbK incumbit ejuſdem Solidi continuati portio (hoc eſt, omnia vs eo ſpectantia,) erit $vR^2-\frac{1}{2}s^2R$. Et, ſimiliter, quæ trilineo τbβ incumbit ejuſdem Solidi portio (hoc eſt, omnia hs huc ſpectantia,) $hR^2-\frac{1}{2}s^2R$. Et ſic alibi.

Fig. 169, 170.

Atque his ita in *Figura Sinuum Verſorum* A$\tau\alpha$ abſolutis; idem etiam in *Figura Sinuum Rectorum* (totius Semicirculi) $\alpha\tau\kappa$ abſolvetur. Eſt utique hujus uterque Semiſſis $\alpha\delta\kappa$, $\tau\delta\kappa$, eadem planè figura atque dCA, (figuræ A$\tau\alpha$ ſegmentum,) vel dcτ; alio ſitu poſita. Cum enim bβ hoc eſt Vα (& de reliquis ſimiliter) ſit arcûs B$\alpha=\tau\beta$, ſinus verſus; erit propterea (ejuſdem à Radio differentia) bk, hoc eſt VC, arcus BD ſinus rectus. Et ſic ubique. Eſt igitur, tum dCA, tum dcτ, figura Sinuum rectorum totius Quadrantis, (puta quadrantis DA, vel Dα, fig. 169. utrinque à D inchoando;) adeoque eadem planè figurâ cum $\alpha\delta\kappa$, vel $\tau\delta\kappa$, quæ itidem (per conſtructionem) ſunt figuræ Sinuum Rectorum unius quadrantis integri, atque ad eundem Radium. Cum igitur tum ipſius dCA trilinei, tum partium ipſius, magnitudines, momenta & Centra gravitatis determinantur: Etiam figuræ $\alpha\tau\kappa$ utriuſque Semiſſis, adeoque & totius, ejuſque partium, magnitudines momenta & Centra gravitatis determinantur. M.

Exempli gratia; $\alpha\delta\kappa=\tau\delta\kappa=$ dCA $=-aR+sR+av$ (per § B.) id eſt, hoc caſu, (propter $v=$AC$=R$, & $s=$DC$=R$, & N.

Fig. 169, 170. arcum $a = DA = \frac{1}{4}P$,) $-\frac{1}{4}RP + R^2 + \frac{1}{4}RP = R^2$. Ejuſque momentum reſpectu baſis $\alpha\delta$, vel d C, (hoc eſt, omnia Semiquadrata Sinuum rectorum unius quadrantis,) $\frac{3}{4}aR^2 - \frac{3}{4}sR^2 + \frac{3}{4}svR - \frac{1}{2}as^2$ (per § F.) id eſt, in hoc caſu, $\frac{3}{16}PR^2 - \frac{3}{4}R^3 + \frac{3}{4}R^3 - \frac{1}{8}PR^2 = \frac{1}{16}PR^2$; (Adeoque, Summa quadratorum Sinuum rectorum, ſeu *omnia* s^2, totius quadrantis, $\frac{1}{8}R^2P$; ut ſupra § V. prop. 13.) Centrique gravitatis à baſe $\alpha\delta$ ſeu d C diſtantia (momentum per magnitudinem dividendo) $\frac{1}{16}P$.

O. Similiter; portio $\varkappa\delta\beta\upsilon$, hoc eſt (ſumpta $Cl = \delta\beta$) A C l x, eſt (ut § B) sR, ſumpto arcu x O hoc eſt X A, $= a$. Nempe factum ex Radio R, in s Sinum rectum arcus $XA = xO$; hoc eſt, in Sinum arcus $DB = \delta\beta$; hoc eſt, (poſito $\alpha\beta = AB = a$; adeoque B D ejuſdem complemento,) in $x = VC$. Hoc eſt, $\varkappa\delta\beta\upsilon = xR$.

Et conſequenter, $\alpha\beta\upsilon = \alpha\delta\varkappa \mp \delta\varkappa\upsilon\beta$ (prout minor majorve quadrante fuerit arcus $\alpha\beta$ ſeu A B) erit $R^2 \mp xR$; hoc eſt (propter $x = R - v$ ſi A B ſit quadrante minor, & $x = -R + v$ ſi quadrante major; adeoque, utcunque, $R \mp x = v$,) $\alpha\beta\upsilon = R^2 \mp xR = vR$.

Hinc item deducetur Momentorum ratio in Trilinei $\alpha\delta\varkappa$ vel $\tau\delta\varkappa$ portionibus; ex momentis portionum Trilinei d C A; ſed perplexiori aliquantum calculo, ob contrarium Figurarum ſitum. Cum enim, in priori ſitu, arcus ab A inchoavimus, (ut, verbi gratia, arcum A B diximus a; cujus ſinus rectus s, & verſus v; adeoque B D eſſet ejuſdem arcus complementum, cujus ſinus rectus $VC = x$:) jam, mutato ſitu, arcus inchoantur ab α, hoc eſt à D; (adeoque arcus $\alpha\beta$, hoc eſt D B, dicetur a, cujus ſinus rectus $s = VC$; & ſinus complementi $BV = x$, &c.) Verbi gratia.

Ex Parallelogrammi q l C A momento reſpectu T A, hoc eſt, (poſito x X, hoc eſt X A, $= a$,) ex $\frac{1}{2}aR^2$; ſi auferatur momentum Trilinei A x q, hoc eſt, (per § E.) $\frac{3}{4}aR^2 - \frac{3}{4}sR^2 - \frac{1}{4}svR$; habetur quadrilinei x l C A momentum reſpectu T A, $-\frac{1}{4}aR^2 + \frac{3}{4}sR^2 + \frac{1}{4}svR$. Adeoque (propter magnitudinem sR, per § B.) diſtantia centri gravitatis à T A, $\frac{-aR + 3sR + sv}{4s}$; adeoque, à d C, $\frac{aR + sR - sv}{4s}$; ejuſque reſpectu d C momentum, $\frac{1}{4}aR^2 + \frac{1}{4}sR^2 - \frac{1}{4}svR = \frac{1}{4}aR^2 + \frac{1}{4}sxR$. Idemque eſt momentum portionis $\upsilon\beta\delta\varkappa$, reſpectu $\tau\alpha$, poſito $\delta\beta$ $(= xX) = a$: Sed, poſito $\alpha\beta = a$, adeoque (ejuſdem complementum ad quadrantem, aut etiam exceſſus ſupra quadrantem,) $\delta\beta = DB = \frac{1}{4}P \sim a$, (arcûs a differentiam à quadrante

drante

drante $\frac{1}{4}P$,) quem arcum q dicemus; eritque hujus ſinus rectus, Fig. 169,
non s, ſed $x = OC$ (ſinus complementi arcus $a = XA$.) Adeoque 170.
mutato a in q; permutatis etiam ſi opus s & x (ſed hic nihil opus, perinde enim eſt sx & xs;) pro $\frac{1}{4}aR^2 + \frac{1}{4}sxR$, habebitur quadrilinei $\upsilon\beta\delta\kappa$ momentum reſpectu $\tau\alpha$, (poſito $\alpha\beta = a$,) $\frac{1}{4}qR^2 + \frac{1}{4}xsR$; (hoc eſt, omnia $\frac{1}{2}s^2$, ſeu Semiſumma quadratorum Sinuum rectorum complentium portionem $\upsilon\beta\delta\kappa$, ſeu arcûs D B particulis reſpondentium.) Ejuſque à $\tau\alpha$ Diſtantia Centri gravitatis $\frac{qR + xs}{4x}$.

Adeoque; (propter Trilinei $\alpha\delta\kappa$, reſpectu ejuſdem $\tau\alpha$, momentum $\frac{1}{16}R^2P$, ut ſupra;) portionis $\alpha\beta\upsilon = \alpha\delta\kappa \mp \delta\kappa\upsilon\beta$ (prout $\alpha\beta$ minor majorve quadrante fuerit) momentum reſpectu $\tau\alpha$, erit $\frac{1}{16}R^2P \mp \frac{1}{4}qR^2 \mp \frac{1}{4}sxR$; Hoc eſt (propter $q = \frac{1}{4}P - a$, & $x = R - v$, ſi $\alpha\beta$ ſit quadrante minor; vel $q = -\frac{1}{4}P + a$, & $x = -R + v$; ſi $\alpha\beta$ quadrante major;) $\frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}svR$: (Quæ itaque eſt, Semiſumma quadratorum Sinuum rectorum, complentium portionem $\alpha\beta\upsilon$; ſeu omnia $\frac{1}{2}s^2$ arcus A B particulis competentia, ſumptis a arithmetice proportionalibus.) Factâque, per magnitudinem $\alpha\beta\upsilon = vR$, diviſione; habetur diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{aR - sR + sv}{4v}$ $= \frac{eR + sv}{4v}$.

Similiter; Trilinei $\alpha\delta\kappa$ momentum reſpectu $A\alpha$ (productæ,) P.
Hoc eſt, Trilinei d C A momentum reſpectu δd (productæ;) eſt, (per § I.) $-\frac{1}{2}a^2R + vR^2 + \frac{1}{2}a^2v$. Hoc eſt, in præſenti caſu, (propter $v = R$,) R^3. (Hoc eſt, omnia as, totius quadrantis.) Atque hoc, per magnitudinem R^2 diviſum; exhibet R, diſtantiam Centri gravitatis trilinei d C A, à δd; vel $\alpha\delta\kappa$, ab $A\alpha$. Adeoque Centri gravitatis illius ab $A\alpha$, hujus à $\delta\kappa$, diſtantia, eſt $\frac{1}{4}P - R$. Et propterea, momentum correſpondens (ſeu Semiquadrantalis Ungula,) nempe Trilinei d C A reſpectu $A\alpha$, vel $\alpha\delta\kappa$ reſpectu $\delta\kappa$, $\frac{1}{4}R^2P - R^3$.

Et ſimiliter in Portionibus, (licet perplexiori paulum calculo, ob mutandum, ut prius, ſymbolorum valorem pro mutato ſitu figuræ,) idem obtinebitur.

Eſt utique (per § H.) quadrilinei x ξ α A momentum reſpectu $A\alpha$, (poſito x X $= a$,) $\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2$: Adeoque (dempto Parallelogrammi ξ l C α momento reſpectu ejuſdem $A\alpha$, $\frac{1}{2}a^2R$;) momentum quadrilinei x l C A, reſpectu ejuſdem $A\alpha$, $asR - vR^2$. Atque

Fig. 169, 170. que tantundem erit momentum Quadrilinei $\upsilon\beta\delta\kappa$ respectu $\delta\kappa$, posito $\delta\beta = xX = a$: Centrique gravitatis à $\delta\kappa$ (propter magnitudinem sR,) distantia, $\frac{as - vR}{s}$. Sed, posito $\alpha\beta = a$; adeoque $\beta\delta = \frac{1}{4}P \sim a = q$: Et propterea mutatis s in x (sinum complementi arcus q;) & v in $R - s$: Erit ejusdem $\upsilon\beta\delta\kappa$ momentum respectu $\delta\kappa$, $qxR - R^3 + sR^2$; & centri gravitatis à $\delta\kappa$ distantia, $\frac{qx - R^2 + sR}{x}$: Adeoque; ab Aα, $\frac{1}{4}P \mp \frac{qx - R^2 + sR}{x}$; ejusque momentum respectu Aα, $\frac{1}{4}xRP \mp qxR \pm R^3 \mp sR^2 = axR \pm R^3 \mp sR^2$.

Et, propterea, Momentum portionis $\alpha\beta\upsilon = \alpha\delta\kappa \mp \delta\kappa\beta\upsilon$, respectu A$\alpha$, (propter ipsius $\alpha\delta\kappa$, respectu Aα, momentum, R^3) erit $\mp axR + sR^2 = -aR^2 + sR^2 + avR$. Centrique gravitatis ab Aα distantia (propter magnitudinem, vR,) erit $\frac{-aR + sR + av}{v} = \frac{-eR + av}{v}$: Adeoque, à $\beta\upsilon$, $\frac{eR}{v}$; ejusque respectu $\beta\upsilon$ momentum eR^2.

Q. Verum hæc omnia quæ Trilineum $\alpha\tau\kappa$, ejusque portiones spectant; simpliciùs, ex ante traditis, per se elicientur, sine ope Figuræ Sinuum versorum.

Est utique (per § T. prop. 13.) posito $\alpha\beta = a$ (ubicunque in $\alpha\tau$ sit β punctum) reliquisque symbolis proportionaliter, $\alpha\beta\upsilon = vR$, $\alpha\delta\kappa = R^2$, $\upsilon\beta\delta\kappa = xR$.

Item, Tilinei $\alpha\beta\upsilon$ momentum respectu $\tau\alpha$; hoc est, omnia Semiquadrata Sinuum rectorum sectionem illam complentium; hoc est, omnia $\frac{1}{2}s^2$, seu omnia $\frac{1}{2}vh$, eo spectantia, arcubus arithmeticè proportionalibus ab α usque ad $\alpha\beta$ convenientia; (per § V. prop. 13.) $\frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}svR = \frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR$. (Nempe, quod fit ex Semi-Radio $\frac{1}{2}R$, ducto in correspondens Semisegmentum circulare ABV $= \frac{1}{2}aR \mp \frac{1}{2}sx = \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR + \frac{1}{2}sv = \frac{1}{2}eR + \frac{1}{2}sv$.) Adeoque (propter magnitudinem vR,) distantia Centri gravitatis portionis $\alpha\beta\upsilon$ à $\tau\alpha$, $\frac{eR + sv}{4v}$.

Et speciatim, Trilinei $\alpha\delta\kappa$ (propter $a = \frac{1}{4}P$, & $v = R$,) momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{16}R^2P$. Centrique gravitatis à $\tau\alpha$ distantia, $\frac{1}{16}P$.

Similiter

Similiter (per prop. 10 hujus) ſumptis omnibus $\alpha\xi o$, $\alpha\zeta v$, &c. usque ad $\alpha\beta v$; hoc eſt, omnibus vR eo ſpectantibus; Hoc eſt, facto ex R in omnes v, hoc eſt, in omnes A O &c. ſinus verſos arcuum arithmeticè proportionalium ab A usque ad maximum A V quem jam dicamus V; hoc eſt, facto ex R in trilineum A b K $= aR - sR = eR$ (per § B:) Habetur momentum Trilinei $\alpha\beta v$ reſpectu βv, nempe $aR^2 - sR^2 = eR^2$. Factâque per magnitudinem vR diviſione; diſtantia Centri gravitatis à βv, $\frac{aR - sR = eR}{v}$; adeoque ab Aα, $a - \frac{eR}{v}$. Et, propterea, ejuſdem momentum reſpectu Aα, $-eR^2 + avR$. Fig. 169, 170.

(Eademque de portione $\tau\beta v$; ſubſtitutis α pro a, & h pro v, item Tτ pro Aα; & vice verſa.)

Et, ſpeciatim, Trilinei $\alpha\delta\varkappa$ (propter $s = v = R$) momentum reſpectu Aα, R^3; reſpectu $\delta\varkappa$, $\frac{1}{4}R^2P - R^3$: Centrique gravitatis diſtantia ab Aα, R; atque a $\delta\varkappa$, $\frac{1}{4}P - R$.

Determinavimus itaque totius Figuræ, partiumque ejuſdem expoſitarum, tum magnitudines, tum momenta reſpectu expoſitarum aliquot rectarum; earumque Centrorum gravitatis diſtantias ab illis rectis. Adeoque, propter exhibitas eorundem à duabus ſaltem rectis non parallelis diſtantias; etiam ipſa Centra gravitatis (per prop. 26. cap. præced.) exhibentur. R.

Atque hinc de Ungulis, Solidíſque converſione factis aut Semiſolidis, aliiſque quæ hinc dependent, calculo rite adhibito, judicium fiet. Quæque de his dicta ſunt, ad alia facile poterunt multis modis ampliari.

Atque hæc quidem omnia quæ de $\alpha\delta\varkappa$ figura Sinuum rectorum unius quadrantis tradita ſunt; eadem ejuſdem complemento $\alpha\varkappa\Gamma$ facile accommodantur. Quippe ſi ex $\alpha\delta\varkappa\Gamma$ parallelogrammo, auferatur trilineum $\alpha\varkappa\delta$; reſtat trilineum $\alpha\varkappa\Gamma$: & ſimiliter, ſi ex parallelogrammi illius Momentis, Ungulis, & Ungularum Momentis; auferantur reſpectiva Trilinei $\alpha\delta\varkappa$ Momenta, Ungulæ, & Ungularum Momenta; reſtabunt reſpectiva Trilinei $\alpha\varkappa\Gamma$ Momenta, Ungulæ, & Ungularum Momenta: unde & Centrorum gravitatis Diſtantiæ ab expoſitis rectis colliguntur. Quodque de totâ $\alpha\varkappa\Gamma$ dictum eſt; idem de partibus, ut $\alpha o\gamma$, mutatis mutandis, intelligendum eſt.

S. Fig. 169, 170. Si autem, in his Sinuum Versorum, Rectorumque, Figuris: Manente, ut prius, $A\alpha = 2R$, & $\delta\kappa = R$, reliquisque hisce parallelis in eadem qua nunc ratione; Recta $\tau\alpha$, Protracta sit, vel Contracta, (puta, Major, vel Minor, quam $\frac{1}{2}P$;) reliquæque huic parallelæ, similiter vel Protractæ vel Contractæ; (quas Figuras Sinuum Versorum, Rectorumve, *Protractas*, dicamus; vel *Contractas*:) Eadem quæ jam tradita sunt, etiam his conveniunt; cum hoc solo discrimine; Quod quoties rectæ b B in calculum veniunt; pro a, substituenda erit alia quantitas quæ ad hanc sit in ea ratione qua est $\tau\alpha$, ad $\frac{1}{2}P$: Et similiter, mutatis mutandis, pro earundem b B quadratis, Cubis, reliquisque potestatibus; nempe, pro a^2, a^3, &c. quantitates quæ sint ad has in Duplicatâ, Triplicatâ, &c. ratione, illius quam habet $\tau\alpha$ ad $\frac{1}{2}P$.

T. Quæque de figura Sinuum rectorum unius quadrantis, (ut $\alpha\delta\kappa$ fig. 170.) dicta sunt: eadem figuræ Sinuum Chordarum seu subtensarum in semicirculo (ut $A\delta\kappa$ fig. 183.) facile accommodantur: Sunt enim Chordæ Arcuum in semicirculo, ubique Duplæ Sinuum Rectorum, Semiarcuum in Quadrante correspondentium. Adeoque figura Chordarum in Semicirculo $A\delta\kappa$ fig. 183. Ipsi $\alpha\delta\kappa$ fig. 170, Figuræ Sinuum Rectorum Quadrantis, omnino similis; & partes partibus respective sumptis. (Quod & de solidis inde oriundis pariter intelligendum est.) Qua de re videantur plura, ad prop. 22. § G, H, I, ubi hac operatione opus erit.

SCHOLIUM.

Fig. 169, 170, 171. HÆc autem sive Sinuum versorum sive Arcuum figura $A\tau\alpha$, alia non est quam, Dimidia Semicylindri (plano oblique secti) Superficies curva in planum expansa: Seu Semiquadrantalis Ungulæ Semicylindricæ Superficies curva in planum expansa. Eaque quâ terminatur sinuosa curva $Ad\tau$, est Semiellipseos linea curva, in planitiem item expansa.

Intelligatur enim super Semicirculo $\alpha\tau\beta$ fig. 171. (qui sit ipsi $A\alpha B$ fig. 169 æqualis; adeoq; illius curva $\tau\beta\alpha$, fig. 171. curvæ hujus $AB\alpha$, fig. 169.) Semicylindrus rectus, altitudinem $A\alpha$, ipsi $A\alpha$ fig. 169, 170. æqualem habens. Quem secet planum ellipseos τ b A, (quod ipsi per axem Cylindri plano $\tau\alpha A$ rectum sit,) abscindens Semiquadrantalem Ungulam τ b $A\alpha$; cujus superficiem curvam compleant (juxta def. 1. cap. 4.) parallelæ

parallelæ rectæ β b &c. ſingulis curvæ τ β α punctis inſiſtentes: (ut & paralleli arcus b B, &c. ſingulis rectæ A α punctis occurrentes.)

Sumpto jam, in Trilinei baſe τ β α, fig. 170. puncto quovis β, cui reſpondeat punctum β in curva τ β α fig. 171. quæ huic in curva Ungulæ ſuperficie inſiſtit recta, ſit β b. Dico rectam hanc β b in curva Ungulæ ſuperficie, æqualem eſſe correſpondenti rectæ β b in Trilinei plano. Eſt enim (per conſtructionem) arcus τ β, æqualis τ β rectæ, hoc eſt arcui α B: Sed & huic ſimilis (propter æquales circulorum Diametros:) Adeoque hujus ſinui verſo α V, fig. 169, 170. æqualis eſt illius ſinus verſus τ a; hoc eſt, (propter angulum ſemiquadrantalem,) perpendicularis a v; & (propter parallelas) ipſa β b in Ungulæ ſuperficie curva. Sed & eidem α V fig. 170. æqualis eſt (ipſi parallela) β b in Trilineo. Æquales itaque ſunt, quæ in Ungulæ ſuperficie curva, & quæ in Trilineo plano, rectæ β b reſpective ſumptæ. (Similiter oſtendetur, arcus b B, d D, &c. fig. 171. æquales eſſe rectis b B, d D, fig. 170. hoc eſt, arcubus A B, A D, &c. fig. 169.) Cumque hoc ubique obtineat: Expanſa in planum ſuperficies illa curva, Trilineo ſuper impoſita congruet: adeoque tum tota toti, tum partes partibus reſpective ſumptis æquales. (Puta, ſuperficies curvæ A b β α, A b B, ipſis A b β α, A b B, planis: & ſic ubique.) Ipſaque quæ, in ſuperficie Cylindrica, erat ſemiellipſeos curva τ b A; eadem, in ſuperficie expanſâ, eſt ſinuoſa curva τ b A terminans Trilineum A τ α, *quam Figuram Sinuum Verſorum, Arcuumve*, diximus.

Eodem modo; ſi intelligatur idem τ A ſemicylindrus, plano A κ T ſecari, Semiquadrantalem Ungulam A T κ abſcindente, (cujus itaque altitudo δ κ ſit baſis ſemidiametro æqualis:) Oſtendetur, ſuperficiem Ungulæ curvam T δ A κ, in planum expanſam, congruere Bilineo τ δ α κ fig. 170. quam *Figuram Sinuum Rectorum* diximus. Quippe utrobique oſtendetur β υ, ipſi B V ſinui recto correſpondentis arcûs A B, hoc eſt τ β, æqualis: & ſic ubique. Adeoque & τ κ α ſemiellipſis curvam in ſuperficie Cylindri; expanſâ in planitiem ſuperficie curvâ, curvæ τ κ α figuram Sinuum rectorum terminanti congruere; & partes partibus reſpective ſumptis, Quæ pridem monuimus ad prop. 13. Fig. 170, 172.

PROP. XVIII.

PARS PRIMA.

A. Si ſuper A $\tau\alpha$ Figura Sinuum verſorum, Arcuúmve, Solidum inſiſtat altitudinem habens in ſingulis b β Sinibus verſis, æqualem reſpectivis $\beta\upsilon$ ſinibus rectis eorundem arcuum: Solidum ſic conſtructum, Triplum erit Semiquadrantalis Ungulæ Semicirculi, aciem habentis Semicirculi Diametrum. Et partes partium reſpective.

Fig. 170.

Unde; Solidi ſic conſtructi, partiumque ejuſdem, tum Magnitudines, tum Momenta, & Centra gravitatis, innoteſcent.

Nempe, (retentis Symbolis, ut in propoſitionibus aliquot præcedentibus;)

A, C. Solidi A $\tau\alpha$, ſic conſtructi; Magnitudo, $2R^3$: Diſtantia Centri gravitatis à plano A $\tau\alpha$, $\frac{1}{16}P$; Momentum correſpondens reſpectu $\tau\alpha$ in plano A $\tau\alpha$ erecto, $\frac{1}{8}R^3P$:

E. Diſtantia Centri gravitatis à plano $\tau\alpha\kappa$, $\frac{2}{3}R$; Momen-

H. tum reſpectu $\tau\alpha$ in plano $\tau\alpha\kappa$ erecto, $\frac{4}{3}R^4$: Diſtantia Centri gravitatis à plano ſuper A α erecto, $\frac{3}{16}P$; Momentum reſpectu A α, $\frac{3}{8}R^3P$.

A, C. Portionis, ejuſdem Solidi, A b $\beta\alpha$; Magnitudo, $vR^2 + \frac{1}{2}s^2R$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$ in erecto plano A $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{4}svR^2 + \frac{1}{6}s^3R$; Diſtantia Centri gravitatis ab

E. illo plano, $\frac{3eR^2 + 3svR + 2s^3}{12vR + 6s^2}$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$ in erecto plano $\tau\alpha\kappa$, $\frac{2}{3}vR^3 + \frac{2}{3}s^2R^2 - \frac{1}{6}s^2vR$; Diſtantia Centri gravitatis à plano $\tau\alpha\kappa$, $\frac{4vR^2+4s^2R-s^2v}{6vR+3s^2}$;

Momentum

Momentum respectu Aα, $-\frac{5}{4}eR^3+avR^2-\frac{1}{4}svR^2+\frac{1}{2}as^2R$; Distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{-5eR^2+4avR-svR+2as^2}{4vR+2s^2}$. H.

Portionis, ejusdem Solidi, b$\beta\tau$; Magnitudo, $2R^3-vR^2-\frac{1}{2}s^2R=hR^2-\frac{1}{2}s^2R=\frac{1}{2}h^2R$; Momentum respectu plani A$\tau\alpha$ erecti, $\frac{1}{8}R^3P-\frac{1}{4}eR^3-\frac{1}{4}svR^2-\frac{1}{6}s^3R$; respectu plani $\tau\alpha\kappa$ erecti, $\frac{4}{3}R^4-\frac{2}{3}vR^3-\frac{2}{3}s^2R^2+\frac{1}{6}s^2vR$; respectu A$\alpha$, $\frac{3}{8}R^3P+\frac{5}{4}eR^3-avR^2+\frac{1}{4}svR^2-\frac{1}{2}as^2R$; Distantia Centri gravitatis à plano A$\tau\alpha$, $\frac{3R^2P-6eR^2-6svR-4s^3}{48R^2-24vR-12s^2}$; à plano $\tau\alpha\kappa$, $\frac{8R^3-4vR^2-4s^2R+s^2v}{12R^2-6vR-3s^2}$; ab A$\alpha$, $\frac{3R^2P+10eR^2-8avR+2svR-4as^2}{16R^2-8vR-4s^2}$. A. I.

Portionis AbK; Magnitudo, $vR^2-\frac{1}{2}s^2R=\frac{1}{2}v^2R$; Momentum respectu plani A$\tau\alpha$ erecti, $\frac{1}{4}eR^3+\frac{1}{4}svR^2-\frac{1}{6}s^3R$; respectu plani $\tau\alpha\kappa$ erecti, $\frac{4}{3}vR^3-\frac{2}{3}s^2R^2+\frac{1}{6}s^2vR=\frac{2}{3}v^2R^2+\frac{1}{6}s^2vR$; respectu TA, $\frac{2}{3}vR^3-\frac{1}{3}s^2R^2-\frac{1}{6}s^2vR=\frac{1}{6}v^3R$; respectu A$\alpha$, $-\frac{1}{4}eR^3+avR^2+\frac{1}{4}svR^2-\frac{1}{2}as^2R$; Distantia Centri gravitatis à plano A$\tau\alpha$, $\frac{3eR^2+3svR^2-2s^3R}{12vR^2-6s^2R=6v^2R}$; à plano $\tau\alpha\kappa$, $\frac{4}{3}R+\frac{1}{3}h$; à TA, $\frac{2}{3}R-\frac{1}{3}h=\frac{1}{3}v$; ab A$\alpha$, $\frac{-3eR^2+4avR+svR-2as^2}{4vR-2s^2=2v^2}$. A. I.

Portionis AK$\beta\alpha$; magnitudo, $2vR^2$; Distantia Centri gravitatis à plano A$\tau\alpha$, $\frac{eR+sv}{4v}$; Momentum respectu ejusdem A$\tau\alpha$ plani (erecti) $\frac{1}{2}eR^3+\frac{1}{2}svR^2$; Distantia Centri gravitatis à TA, vel $\tau\alpha$, (hoc est, à planis super rectas illas erectis,) R; momentum respectu TA, vel $\tau\alpha$, $2vR^3$; Distantia Centri gravitatis ab Aα, $a-\frac{eR}{v}$; momentum respectu Aα, $2avR^2-2eR^3$. I.

Portionis AKbB; magnitudo, v^2R; Distantia Centri gravitatis à TA vel bB, $\frac{1}{2}v$; à $\tau\alpha$, $2R-\frac{1}{2}v$; ab Aα, I.

$a - \frac{eR}{v}$; à plano A $\tau\alpha$, $\frac{eR + sv}{4v}$; Momentum reſpectu T A, vel b B, $\frac{1}{2}v^3R$; reſpectu $\tau\alpha$, $2v^2R^2 - \frac{1}{2}v^3R$; reſpectu plani (erecti) A $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}evR^2 + \frac{1}{4}sv^2R$.

B. Portionis b β α B; Magnitudo, $vhR = s^2R$: Di-
D. ſtantia Centri gravitatis à plano A $\tau\alpha$, $\frac{eR + sv}{4v}$; momentum reſpectu $\tau\alpha$ in erecto plano A $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}ehR^2 + \frac{1}{4}s^3R$: Diſtan-
F. tia Centri grav. ab erecto plano $\tau\alpha\kappa$, $\frac{1}{2}h$; momentum reſpectu $\tau\alpha$ in erecto plano $\tau\alpha\kappa$, $s^2R^2 - \frac{1}{2}s^2vR = \frac{1}{2}s^2hR$:
H. Diſtantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{-eR + av}{v}$; Momentum reſpectu A α, $-2eR^3 + evR + as^2R$.

B. Segmenti Solidi A b B; Magnitudo, $\frac{1}{2}v^2R$: Momentum
D. reſpectu $\tau\alpha$ in erecto plano A $\tau\alpha$, $-\frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{4}avR^2 - \frac{1}{12}s^3R$; Diſtantia Centri gravitatis à plano A $\tau\alpha$,
F. $\frac{-3eR^2 + 3avR - s^3}{6v^2}$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$ in erecto plano $\tau\alpha\kappa$, $\frac{2}{3}vR^3 - \frac{1}{3}s^2R^2 + \frac{1}{3}s^2vR$; Diſtantia Centri gravitatis à plano $\tau\alpha\kappa$, $\frac{2}{3}R + \frac{2}{3}h$; & à b B, $\frac{2}{3}R - \frac{1}{3}h = \frac{1}{3}v$; à T A, $\frac{2}{3}v$; Momentum reſpectu bB, $\frac{2}{3}vR^3 - \frac{1}{3}s^2$
G. $R^2 - \frac{1}{6}s^2vR = \frac{1}{6}v^3R$; reſpectu T A, $\frac{1}{3}v^3R$: Momentum reſpectu A α, $\frac{3}{4}eR^3 + \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{2}as^2R$; Diſtantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{3eR^2 + 3svR - 2as^2}{4vR - 2s^2 = 2v^2}$.

Pars Secunda.

K. Porro; Si ſuper A $\tau\alpha$, (Figura Sinuum verſorum, Ar-
Fig. 169, 170. cuumve,) Solidum inſiſtat; altitudinem habens, in ſingulis b B rectis (ſeu arcubus in rectas expanſis,) æqualem reſpectivis B V in Semicirculo, (eorum reſpective arcuum ſinibus rectis:) Solidi ſic constructi, partiumque ejuſdem, tum magnitudines, tum momenta, & Centra gravitatis innoteſcunt.

Nempe

Nempe ; (retentis Symbolis, ut in propositionibus præcedentibus ;) Fig. 169, 170.

Solidi totius $A\tau\alpha$ sic constructi ; Magnitudo, $\frac{1}{16}RP^2$: Momentum respectu TA, $\frac{1}{16}R^2P^2+\frac{4}{9}R^4$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{16}R^2P^2-\frac{4}{9}R^4$; Distantia Centri gravitatis à TA, $R+\frac{64R^3}{9P^2}$; à $\tau\alpha$, $R-\frac{64R^3}{9P^2}$: Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{96}RP^3-\frac{1}{16}R^3P$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{6}P-\frac{R^2}{P}$: Momentum respectu plani $A\tau\alpha$ (erecti) $\frac{1}{6}R^3P$; Distantia Centri gravitatis ab illo plano, $\frac{8R^2}{3P}$. K. M. N.

Portionis, ejusdem Solidi, $Ab\beta\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{4}aRP-\frac{1}{4}a^2R+\frac{1}{4}s^2R=\frac{1}{4}aRP-\frac{1}{4}efR$: Momentum respectu TA, $\frac{1}{4}aR^2P-\frac{1}{4}a^2R^2+\frac{5}{36}s^2R^2+\frac{2}{9}vR^3+\frac{1}{9}s^2vR$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}aR^2P-\frac{1}{4}a^2R^2+\frac{13}{36}s^2R^2-\frac{2}{9}vR^3-\frac{1}{9}s^2vR$; Distantia Centri gravitatis à TA, $R+\frac{4v^2R+4s^2v}{9aP-9ef}$; à $\tau\alpha$, $R-\frac{4v^2R+4s^2v}{9aP-9ef}$: Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{8}a^2RP-\frac{1}{8}eR^3-\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{6}a^3R+\frac{1}{4}as^2R$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{3a^2P-3eR^2-3svR-4a^3+6as^2}{6aP-6ef}$: Momentum respectu plani $A\tau\alpha$, $\frac{1}{3}fR^3+\frac{1}{18}s^3R$; Distantia Centri gravitatis ab $A\tau\alpha$ plano, $\frac{12fR^2+2s^3}{9aP-9ef}$. K. M. N. O.

Portionis $AK\beta\alpha$; Mag. $\frac{1}{4}aRP$; Distantia Centri gravitatis à TA, vel $\tau\alpha$, R ; Momentum resp. TA, vel $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}aR^2P$: Dist. Cen. grav. ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}a$; Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{8}a^2RP$: Distantia Centri gravitatis à plano $A\tau\alpha$, $\frac{8R^2}{3P}$: Momentum respectu istius plani $A\tau\alpha$ (erecti) $\frac{2}{3}aR^3$. M. N. O.

Portionis, $b\beta\alpha B$; magnitudo, $\frac{1}{4}aRP-\frac{1}{2}a^2R+\frac{1}{2}asR-\frac{1}{2}asv=\frac{1}{4}aRP-\frac{1}{2}eaR-\frac{1}{2}asv$: Momentum respectu TA, L. P.

$\frac{1}{4}aR^2P$

$\frac{1}{4}aR^2P - \frac{1}{2}eaR^2 - \frac{1}{2}asvR + \frac{1}{3}as^3$; Respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}aR^2P - \frac{1}{2}eaR^2 - \frac{1}{2}asvR - \frac{1}{3}as^3$; respectu $A\alpha$, $\frac{1}{8}a^2RP - \frac{1}{4}a^3R + \frac{1}{4}a^2sR - \frac{1}{4}a^2sv$; respectu plani $A\tau\alpha$, $\frac{2}{3}aR^3 - \frac{1}{3}avR^2 + \frac{1}{6}as^2R - \frac{1}{6}as^2v$; Distantia Centri gravitatis, à TA, $R + \frac{4s^3}{3RP - 6eR - 6sv}$; à $\tau\alpha$, $R - \frac{4s^3}{3RP - 6eR - 6sv}$; ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}a$; à plano $A\tau\alpha$, $\frac{8R^3 - 4vR^2 + 2s^2R - 2s^2v}{3RP - 6eR - 6sv}$.

L. M. Portionis, A K b B; Magnitudo $\frac{1}{2}eaR + \frac{1}{2}asv$: Momentum respectu TA, $\frac{1}{2}eaR^2 + \frac{1}{2}asvR - \frac{1}{3}as^3$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}eaR^2 + \frac{1}{2}asvR + \frac{1}{3}as^3$; Distantia Centri gravitatis à
N. TA, $R - \frac{2s^3}{3eR + 3sv}$; à $\tau\alpha$, $R + \frac{2s^3}{3eR + 3sv}$: Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{4}a^3R - \frac{1}{4}a^2sR + \frac{1}{4}a^2sv$; Distantia
O. Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}a$: Momentum respectu plani (erecti) $A\tau\alpha$, $\frac{1}{6}av^2R + \frac{1}{6}as^2v$; Distantia Centri gravitatis ab illo plano, $\frac{v^2R + s^2v}{3eR + 3sv}$.

L. Portionis, A b B; Magnitudo, $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{4}s^2R +$
M. $\frac{1}{2}asv = \frac{1}{4}e^2R + \frac{1}{2}asv$: Momentum respectu TA, $\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{1}{2}asR^2 + \frac{5}{36}s^2R^2 + \frac{2}{9}vR^3 + \frac{1}{2}asvR + \frac{1}{9}s^2vR - \frac{1}{3}as^3$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{1}{2}asR^2 + \frac{13}{36}s^2R^2 - \frac{2}{9}vR^3 + \frac{1}{2}asvR - \frac{1}{9}s^2vR + \frac{1}{3}as^3$; Distantia Centri gravitatis à TA, $R + \frac{4v^2R^2 + 4s^2vR - 12as^3}{9e^2R + 18asv}$; à $\tau\alpha$, $R - \frac{4v^2R^2 + 4s^2vR - 12as^3}{9e^2R + 18asv}$:
N. Momentum respectu $A\alpha$, $-\frac{1}{8}eR^3 - \frac{1}{8}svR^2 + \frac{1}{12}a^3R - \frac{1}{4}a^2sR + \frac{1}{4}as^2R + \frac{1}{4}a^2sv$; Distantia Centri gravitatis ab
O. $A\alpha$, $\frac{-3eR^3 - 3svR^2 + 2a^3R - 6a^2sR + 6as^2R + 6a^2sv}{6e^2R + 12asv}$: momentum respectu plani $A\tau\alpha$, $-\frac{1}{3}eR^3 + \frac{1}{3}avR^2 - \frac{1}{6}as^2R + \frac{1}{18}s^3R + \frac{1}{6}as^2v$: Distantia Centri gravitatis ab $A\tau\alpha$ Plano, $\frac{-12eR^3 + 12avR^2 - 6as^2R + 2s^3R + 6as^2v}{9e^2R + 18asv}$.

K. M. Portionis A b K; Magnitudo, $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{4}s^2R = \frac{1}{4}efR$: Momentum respectu TA, $\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{5}{36}s^2R^2 - \frac{2}{9}vR^3 - \frac{1}{9}s^2vR$;

Re-

Reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{13}{36}s^2R^2 + \frac{2}{9}vR^3 + \frac{1}{9}s^2vR$; Diſtantia Centri gravitatis à T A, $R - \frac{4v^2R + 4s^2v}{9ef}$; à $\tau\alpha$, N.
$R + \frac{4v^2R + 4s^2v}{9ef}$: Momentum reſpectu A α, $\frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{8}svR^2 + \frac{1}{6}a^3R - \frac{1}{4}as^2R$; Diſtantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{3eR^2 + 3svR + 4a^3 - 6as^2}{6a^2 - 6s^2 = 6ef}$: Momentum reſpectu plani A $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}eR^3 - \frac{1}{18}\ {}^3R$; Diſtantia Centri gravitatis ab A $\tau\alpha$ plano, $\frac{12eR^2 - 2s^3}{9ef}$. O.

Portionis b $\beta\tau$; Magnitudo $\frac{1}{4}\alpha^2R - \frac{1}{4}s^2R$: Momentum K.
reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}\alpha^2R^2 - \frac{5}{36}s^2R^2 - \frac{2}{9}hR^3 - \frac{1}{9}s^2hR$; Reſpectu T A, $\frac{1}{4}\alpha^2R^2 - \frac{13}{36}s^2R^2 + \frac{2}{9}hR^3 + \frac{1}{9}s^2hR$; Reſpectu T τ, $\frac{1}{8}\alpha R^3 - \frac{1}{8}sR^3 + \frac{1}{8}shR^2 + \frac{1}{6}\alpha^3R - \frac{1}{4}\alpha s^2R$; reſpectu plani A$\tau\alpha$, $\frac{1}{3}\alpha R^3 - \frac{1}{3}sR^3 - \frac{1}{18}s^3R$; Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $R - \frac{4h^2R + 4s^2h}{9\alpha^2 - 9s^2}$; à T A, $R + \frac{4h^2R + 4s^2h}{9\alpha^2 - 9s^2}$; ab A α, $\frac{3\alpha R^2 - 3sR^2 + 3shR + 4\alpha^3 - 6\alpha s^2}{6\alpha^2 - 6s^2}$; à plano A $\tau\alpha$, $\frac{12\alpha R^2 - 12sR^2 - 2s^3}{9\alpha^2 - 9s^2}$. Q.

Adeoque exhibentur, in utroque ſolido; tum eo quod R.
fit ex A $\tau\alpha$ figuræ Sinuum verſorum rectis b β, in βv figuræ Sinuum rectorum reſpectivis rectis; tum eo quod fit ex A $\tau\alpha$ Figuræ Arcuum rectis b B, in B V, reſpectivas Semicirculi rectas; eorumque partibus expoſitis; Tum Magnitudines; tum Momenta reſpectu planorum aliquot expoſitorum; & Centrorum gravitatis ab illis planis diſtantiæ. Et propterea, propter exhibitas Centrorum gravitatis diſtantias à tribus ſaltem planis non parallelis; exhibentur (per prop. 26. cap. præced.) ipſa Centra gravitatis.

Quæque de expoſitis dicta ſunt; ad alia facile poterunt accommodari.

Et quidem quæ de his ſolidis traduntur; ad Protracta, & Contracta, facile transferentur.

Quæque de ſolidis Figuram Sinuum Rectorum unius Quadrantis reſpicientibus, traduntur; eadem ad Solida Figuram Chordarum Semicirculi ſimiliter reſpicientia, transferentur.

A. Fig. 169, 170. SUper ατκ Figura ſinuum rectorum, erigi intelligatur Cylindri (Priſmatiſve) recti portio; ea ratione, ut ſuper ſingulis βυ, figuram complentibus (arcuum arithmetice proportionalium ſinibus rectis,) altitudinem habeat reſpectivis βb (eorundem arcuum, eorumve complementorum ad ſemicirculum ſinibus verſis) æqualem. Aut etiam (quod eodem recidit) ſuper Aτα figura Sinuum verſorum (Arcuúmve) inſiſtens ad angulos rectos, in τα rectâ, Figura Sinuum rectorum ατκ, promoveri intelligatur ad TA, ſolidum deſcribens columnare (Cylindraceum dicas, Priſmaticúmve, perinde eſt,) Parallelogrammo TAατ incumbens; quod ſinuoſâ ſuperficie ſinuoſæ curvæ Adτ ad angulos rectos inſiſtente, ſecari porro intelligatur, Solidum Adτα abſcindente.

Manifeſtum eſt, ex conſtructione, Plana Solidum hoc complentia, rectis bβ inſiſtentia, Parallelogramma eſſe rectangula; ipſis bβυ rectangulis ubique æqualia; hoc eſt rectangulis *hs*; factis nempe ex arcuum τβ (hoc eſt αB fig. 169.) ſeu complementorum arcuum αβ (ſeu AB) ſinibus verſis; in βυ (hoc eſt BV fig. 169.) eorundem arcuum ſinibus rectis. Adeoque Solidum hoc ſive totum, ſive ipſius portio ut Abβα, eſt aggregatum omnium *hs*, ſeu *sh*, figuram ſive totam, ſive ipſius aſſumptam portionem, ſpectantium; diviſâ ατ in partes æquales; hoc eſt, ſumptis *a* arcubus arithmetice proportionalibus.

Manifeſtum item eſt, Plana rectis bB inſiſtentia, ſolidum hoc complentia, æqualia eſſe reſpectivis αβυ Figuræ ſinuum rectorum portionibus; diviſâ Aα in partes æquales, hoc eſt, ſumptis *v* arithmetice proportionalibus. Adeoque (propter $\alpha\beta\upsilon = vR$, per § Q. prop. 17.) Solidum hoc, ſive totum, ſive ipſius portio ut AbB, eſt aggretum omnium *vR*, eo ſpectantium, ſumptis *v* arithmetice proportionalibus.

Eſtque ſolidum hoc, Semiquadrantalis Ungulæ a Semicirculi ADα aciem habentis Aα, (ſeu Momenti ſemicirculi ADα reſpectu Aα rectæ,) Tiplum: Et partes partium reſpective ſumptarum: Puta

Solidi

Solidi portio Ab$\beta\alpha$, tripla correſpondentis Ungulæ BαA (aciem habentis Aα,)& Portio b$\beta\tau$,tripla Ungulæ correſpondentis α B α, (aciem habentis Aα ;)& ſic ubique.Sunt enim (per prop. 17.)ſingula α B triangula Semicirculum complentia, ad bβ Parallelogramma, complentia figuram Sinuum verſorum,ut 1 ad 2 : Item Trianguli αB cujuſque Centrum gravitatis ab α diſtat $\frac{2}{3}\alpha$B, (per prop.6.hujus ;) adeoque ab A α, $\frac{2}{3}$BV ; cujus itaque ad BV$=\beta\upsilon$ ratio, eſt ut 2 ad 3. Eſt ergo (propter $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$,) Trianguli cujuſque momentum reſpectu Aα, ſeu ſemiquadrantalis Ungula Pyramiſve (æqualis utique facto ex magnitudine, in illam diſtantiam ;) ad reſpectivum Parallelepipedum (factum ex bβ in $\beta\upsilon$;) ut 1 ad 3: Et ſic ubique. Hoc eſt, B α A Ungula, quam illæ complent Pyramides ; ad ſolidum b$\beta\alpha$A, ex Parallelepipedis conflatum ; ut 1 ad 3. Totumque Ad$\tau\alpha$ Solidum, Triplum iſtius Ungulæ Semicirculi (aciem habentis Aα:) Et partes partium reſpective ; Nempe Ab$\beta\alpha$ Solidum, triplum Ungulæ BαA aciem habentis Aα.

Eſt autem illa Semicirculi Ungula (ſeu momentum reſpectu Aα,) $\frac{2}{3}R^3$; & Sectoris BαA, $\frac{1}{3}vR^2+\frac{1}{6}s^2R$; & Segmenti αBα, $\frac{1}{6}h^2R$; (per § Q, S, prop. 15.) Ergo totius A$\tau\alpha$ ſolidi, magnitudo $2R^3$; & portionis Ab$\beta\alpha$, $vR^2+\frac{1}{2}s^2R$; & portionis b$\beta\tau$, $\frac{1}{2}h^2R=2R^3-vR^2-\frac{1}{2}s^2R=hR^2-\frac{1}{2}s^2R$.

Et ſimiliter oſtendetur portionis AbK (extra trilineum) magnitudo ; ſeu *Omn. sv* ; (ſumptis *a* arithm. propor.) $\frac{1}{2}v^2R=vR^2-\frac{1}{2}s^2R$.

Si vero ex hac portione Solidi Ab$\beta\alpha$; auferatur pars b$\beta\alpha$B (quæ nempe huic parallelogrammo incumbit ;) hoc eſt, factum ex plano A$\beta\upsilon$ ($=vR$, per § Q. prop. 17,) in βb$=h$; hoc eſt $hvR=s^2R$; (propter s mediam proportionalem inter v & h ; hoc eſt, BV inter AV & Vα :) Relinquitur Solidi ſegmentum AbB, $=vR^2+\frac{1}{2}s^2R-hvR=vR^2+\frac{1}{2}s^2R-s^2R=vR^2-\frac{1}{2}s^2R=\frac{1}{2}v^2R$. Quod eſt aggregatum Omnium vR eò ſpectantium, ſumptis v ſinibus verſis arithmetice proportionalibus : (Singulis enim bV rectis reſpective inſiſtit planum $\alpha\beta\upsilon=vR$.) Seu, quod tantundem valet, Omnium sv, ſumptis a arithmetice proportionalibus : (Ut ad § I. videbitur.) Hoc eſt factum ex omnibus $\beta\upsilon$ in reſpectivas bK. Adeoque Sinuoſa ſuperficies, curvæ Adτ inſiſtens, biſecat KbB ſolidum, facitque ſolidum AbB & ſolidum AbK, invicem æqualia ; (quod merito obſervandum ;) utrumvis utique $\frac{1}{2}v^2R$: Eſt enim (propter $\alpha\beta\upsilon=vR$, & AV$=v$,) Solidum KbBA $=v^2R$.

Idemque per ſe, (ſine ope portionis Ab$\beta\alpha$,) ſic colligitur. Cum ſingula plana (æqualibus intervallis ſumpta, Solidum complentia,) quæ

Fig. 169, 170.

B.

Fig. 169, 170. quæ rectis b B insistunt, sint respectivis $\alpha\beta\upsilon$ æqualia, (quod ex constructione manifestum est;) sintque plana illa $\alpha\beta\upsilon = vR$ respective, (per § P, Q, prop. 17.) Solidi segmentum A b B, aut etiam solidum integrum $A\tau\alpha$, est aggregatum Omnium vR, eo spectantium; sumptis v arithmetice proportionalibus, usque ad eorum maximum V. Sunt autem *Omnes* v, (arithmetice proportionales, usque ad maximum V,) $= \frac{1}{2}V^2$, (per prop. 1. hujus.) Ergo *Omn.* $vR := \frac{1}{2}V^2R$; seu (restituto minusculæ v valore) $\frac{1}{2}v^2R$; ut prius. (Adeoque solidum integrum, (propter $v = 2R$,) $= 2R^3$, ut prius.) Cui si addatur portio $b\beta\alpha B$, habebitur portio $Ab\beta\alpha$, eadem quam prius exhibuimus. Cumque Solidum A b B sit (ut dictum est) $\frac{1}{2}v^2R$; sitque solidum A K b B, v^2R (propter basin $\alpha\beta\upsilon = vR$, & altitudinem $AV = v$,) erit etiam pars residua A b K, $\frac{1}{2}v^2R$, (ipsi A b B æqualis;) adeoque Superficies curva, curvæ A b insistens, bisecat ipsum A K b B solidum.

C. Porro; Si intelligatur Solidum integrum ita positum, ut $\tau\alpha\kappa$ planum sit in situ horizontali, adeoque $A\tau\alpha$ (super illo erectum) in plano ad Horizontem recto: Momentum solidi totius, respectu $\tau\alpha$ rectæ; erit Duplum momenti Ungulæ semicirculi aciem habentis $A\alpha$, respectu ipsius $A\alpha$. (Et similiter in partibus respective sumptis.) Sunt utique singula $b\beta\upsilon$ parallelepipeda Solidum hoc complentia (ut ostensum est § A,) ad respectivas Pyramides αB Ungulam illam complentes, ut 3 ad 1. Eorumque Parallelepipedorum à perpendiculari plano $\tau\alpha A$ distantiæ Centri gravitatis, hoc est $\frac{1}{2}\beta\upsilon$ respective, (per prop. 2. hujus;) ad Pyramidum illarum distantias Centri gravitatis à perpendiculari plano $A\alpha$, $\frac{3}{4}BV$, (distant utique ab α, $\frac{3}{4}\alpha B$, per prop. 6 hujus; adeoque, $\frac{3}{4}BV$, ab $A\alpha$;) seu $\frac{3}{4}\beta\upsilon$; ut $\frac{1}{2}$ ad $\frac{3}{4}$, seu 2 ad 3. Ergo, (propter $\frac{3}{1}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{1}$,) momentum cujusque Parallelepipedi, (adeoque & simul omnium,) ad respectivæ Pyramidis (adeoque & simul omnium) momentum; est ut 2 ad 1. Quod quidem momentum, est aggregatum Omnium $\frac{1}{2}s^2h$, sive totum Solidum, sive ipsius portionem, spectantium. (Sunt utique magnitudines, aggregatum Omnium sh; distantiæque Centrorum gravitatis respective, $\frac{1}{2}s$.) Est autem Ungulæ Semicirculi $AD\alpha$ aciem habentis $A\alpha$, momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{16}R^3P$; Ungulæque Sectoris $B\alpha A$, $\frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{8}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R$; (per § P, R, prop. 16.) Ergo Totius Solidi $A\tau\alpha$ (situ illo politi) momentum respectu $\alpha\tau$, est $\frac{1}{8}R^3P$; & portionis $Ab\beta\alpha$, momentum, $\frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{4}svR^2 + \frac{1}{6}s^3R$. Atque hæc momenta, per respectivas magnitudines divisa,

divisa, (hoc est, per $2R^3$, & $vR^2 + \frac{1}{2}s^2R$, ut ad § A.) exhibent Fig. 169,
Centrorum gravitatis ab A τ α plano distantias; nempe totius Solidi, 170.
$\frac{a1}{16}p$; & portionis Solidi A b β α, $\frac{3eR^2 + 3svR + 2s^3}{12vR + 6s^2}$.

Si verò ex eo Solidi A b β α momento; auferatur momentum ipsius D.
b β α B: restat momentum Solidi A b B.

Est autem Solidi b β α B magnitudo (per § B.) $s^2R = vhR$;
ejusque Centri gravitatis ab A τ α plano distantia, (quanta plani A β υ
à τ α, per § C. prop. 5.) est $\frac{eR + sv}{4v}$, per § Q. prop. 17. adeoque
momentum (in eo situ) respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}ehR^2 + \frac{1}{4}svhR = \frac{1}{4}ehR^2 +$
$\frac{1}{4}s^3R = \frac{1}{2}eR^3 - \frac{1}{4}evR^2 + \frac{1}{4}s^3R = \frac{1}{2}eR^3 - \frac{1}{4}avR^2 + \frac{1}{4}svR^2 + \frac{1}{4}s^3R$:
Hoc itaque, ex totius A b β α momento, $\frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{4}svR^2 + \frac{1}{6}s^3R$,
(§ C.) subductum; relinquit $-\frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{4}avR^2 - \frac{1}{12}s^3R$, momentum Solidi A b B (super plano α β υ erecti) respectu τ α. (Quæ
est summa omnium vR solidum complentium in suas respective distantias $\frac{eR + sv}{4v}$ ductarum; seu, omnium $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR$; sumptis v
arithmetice proportionalibus.) Illudque momentum, per magnitudinem divisum (§ B. traditam) $vR^2 - \frac{1}{2}s^2R = \frac{1}{2}v^2R$; exhibet
ejusdem A b B, Centri gravitatis à plano A τ α distantiam
$\frac{-3eR^2 + 3avR - s^3}{12vR - 6s^2 = 6v^2}$.

Idem etiam per se (absque ope portionis A b β α) sic colligitur.
Cum singula plana rectis b B insistentia, Solidum complentia, æqualia sint ipsis respective $\alpha\beta\upsilon = vR$, (ut dictum est;) sintque eorum
Centra gravitatis in eadem ab A τ α plano distantia, quâ ipsorum
α β υ à τ α; hoc est $\frac{eR + sv}{4v}$ respective: Erunt singulorum momenta, respectu ipsius A τ α perpendicularis plani, $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR$, seu
$\frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}svR$. Adeoque Solidi A b B momentum, erit Omnium Summa; hoc est, *Omn.* $\frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}svR$: sumptis v arithmetice proportionalibus.

Sunt autem, *Omnes* a, (sumptis v arithmetice proportionalibus,)
ipsum A b B planum; hoc est, $-eR + av$, (per § B. prop. 17.)
Adeoque *Omn.* $\frac{1}{4}aR^2 = -\frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{4}avR^2$.

Et similiter, *Omnes* s, (sumptis v arithmetice proportionalibus)
sunt ipsum in semicirculo A B V planum; hoc est, $\frac{1}{2}eR + \frac{1}{2}sv$, (per
§ F. prop. 15.) Adeoque *Omn.* $_4sR^2 := \frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{8}svR^2$. Item,

Fig. 169, 170. Item, *Omnia* $s\,v$, (hoc ſenſu,) ſunt ipſius, in ſemicirculo, plani A B V, momentum reſpectu T A, (eſt enim ſingulorum s, à T A diſtantia v, reſpective;) hoc eſt, $\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}svR - \frac{1}{3}s^3$ per § F. prop. 15.) Adeoque, *Omn.* $\frac{1}{4}svR := \frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$.

Ergo, *Omn.* $\frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}svR := -\frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{4}avR^2 - \frac{1}{12}s^3R$, momentum Solidi A b B, reſpectu perpendicularis plani A $\tau\,\alpha$. Ut prius. Unde Centri gravitatis inde diſtantia habebitur. Atque huic momento, ſi addatur momentum Solidi b $\beta\,\alpha$ B, habebitur momentum Solidi A b $\beta\,\alpha$, idem quod aliâ methodo jam invenimus.

E. Deinde; Si intelligatur Solidum illud integrum A $\tau\,\alpha$, ita poſitum, ut ſit A $\tau\,\alpha$ planum in ſitu horizontali, adeoque $\alpha\,\tau\,\kappa$ planum, ſitu ad horizontem recto: Momentum Solidi totius, Duplum erit momenti Ungulæ Semicirculi A D α, aciem habentis A α, reſpectu rectæ $\tau\,\alpha$. Et ſimiliter in partibus reſpective ſumptis. Sunt enim (ut prius dictum § A, C.) Singula Parallelepipeda Solidum hoc complentia, ad reſpectivas Pyramides complentes illam Ungulam, ut 3 ad 1: Eorumque parallelepipedorum rectis β b inſiſtentium diſtantiæ Centrorum gravitatis ab erecto plano $\tau\,\alpha$, $\frac{1}{2}\beta\,\mathrm{b} = \frac{1}{2}h$, reſpective; Pyramidum verò à $\tau\,\alpha$ plano, Diſtantiæ Centrorum gravitatis, reſpective, $\frac{3}{4}\mathrm{V}\alpha = \frac{3}{4}h$. Cum igitur magnitudines ſint ut 3 ad 1; & diſtantiæ, ut $\frac{1}{2}$ ad $\frac{3}{4}$, ſeu 2 ad 3; erit (propter $\frac{3}{1} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{1}$) Momentorum ratio, ut 2 ad 1. Hoc eſt, Momentum Solidi A $\tau\,\alpha$ (hoc ſitu poſiti) reſpectu $\tau\,\alpha$ rectæ, duplum momenti Ungulæ Semicirculi A D α, aciem habentis A α, reſpectu rectæ $\tau\,\alpha$: Et portionis Solidi A b $\beta\,\alpha$ momentum, duplum momenti Ungulæ correſpondentis B α A, (aciem habentis A α,) reſpectu $\tau\,\alpha$. Eſt autem (per § C, F. prop. 16.) Ungulæ Semicirculi, aciem habentis A α, momentum reſpectu $\tau\,\alpha$, $\frac{2}{3}R^4$; Ungulæque Sectoris B α A, $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2vR$. Ergo Solidi A $\tau\,\alpha$ ſic poſiti, momentum reſpectu $\tau\,\alpha$, $\frac{4}{3}R^4$; & portionis A b $\beta\,\alpha$, $\frac{2}{3}vR^3 + \frac{2}{3}s^2R^2 - \frac{1}{6}s^2vR$. (Quæ eſt ſumma, omnium $\frac{1}{2}sh^2$, eo ſpectantium; ſumptis a arithmetice proportionalibus: Sunt enim magnitudines, ſumma omnium $s\,h$; & diſtantia $\frac{1}{2}h$ reſpective.) Eaque momenta per reſpectivas magnitudines, $2R^3$, & $vR^2 + \frac{1}{2}s^2R$, (per § A.) diviſa; exhibent Centrorum gravitatis ab erecto plano $\tau\,\alpha\,\kappa$, diſtantias: Nempe, totius Solidi, $\frac{2}{3}R$; & portionis A b $\beta\,\alpha$ $\frac{4vR^2 + 4s^2R - s^2v}{6vR + 3s^2}$.

F. Ex illo autem portionis A b $\beta\,\alpha$ momento; ſi eximatur momentum portionis b $\beta\,\alpha$ B: habetur momentum Segmenti A b B. Eſt,

Est autem b$\beta\alpha$B, (per § B.) vhR seu s^2R; distantia Centri gravitatis (per prop. 2 hujus,) $\frac{1}{2}b\beta = \frac{1}{2}h$: Ergo momentum (in hoc situ) respectu rectæ $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}vh^2R = \frac{1}{2}s^2hR$, seu (propter $vh = s^2$, & $h = 2R - v$,) $s^2R^2 - \frac{1}{2}s^2vR$. Hoc itaque subductum ex Portionis Solidi AB$\beta\alpha$ momento, $\frac{2}{3}vR^3 + \frac{2}{3}s^2R^2 - \frac{1}{6}s^2vR$ (§ præced.) Relinquit $\frac{2}{3}vR^3 - \frac{1}{3}s^2R^2 + \frac{1}{3}s^2vR$, momentum Solidi AbB (in hoc situ) respectu rectæ $\tau\alpha$. Quod per magnitudinem, $vR^2 - \frac{1}{2}s^2R$, (§ B.) divisum; exhibet ejusdem Distantiam Centri gravitatis à $\tau\alpha\kappa$ plano, $\frac{4vR^2 - 2s^2R + 2s^2v}{6vR - 3s^2}$: seu $\frac{4vR^2 - 2vhR + 2v^2h}{6vR - 3vh} = \frac{4R^2 - 2hR + 2vh}{6R - 3h = 3v} = \frac{2vR + 2vh}{3v} = \frac{2}{3}R + \frac{2}{3}h$: Adeoque, â bB, $\frac{2}{3}R - \frac{1}{3}h = \frac{1}{3}v$: Et propterea momentum ejusdem AbB solidi (sic positi) respectu bB, $\frac{1}{3}v^2R^2 - \frac{1}{6}s^2vR = \frac{2}{3}vR^3 - \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{1}{6}s^2vR = \frac{1}{6}v^3R$. Fig. 169, 170.

Quod quidem momentum, est summa omnium planorum $\alpha\beta v$ eo spectantium, (hoc est, omnium vR, per § O, Q. prop. 17. sumptis v arithmetice proportionalibus usque ad V eorum maximum,) in suas respective à bB distantias ductorum, hoc est, in $V - v$ respective: Hoc est, *Omnium* vVR, minus *Omn.* v^2R. Adeoque, (per prop. 1. hujus,) $\frac{1}{2}V^3R - \frac{1}{3}V^3R = \frac{1}{6}V^3R$, seu $\frac{1}{6}v^3R$: ut prius.

Idem per se habebitur, (sine ope portionis Ab$\beta\alpha$.) Cum enim singula rectis bB insistentia plana Solidum complentia, æqualibus intervallis ab invicem dissita, sint æqualia ipsis $\alpha\beta v = vR$ respective, (ut dictum est:) Sintque in distantiis à vertice TA, ipsis v respective æqualibus; erit cujusque momentum respectu TA, v^2R; adeoque summa omnium (propter v arithmetice proportionales, usque ad V maximum,) $\frac{1}{3}V^3R$, (per prop. 1. hujus.) Seu, restitutâ v minusculâ, $\frac{1}{3}v^3R$. Adeoque propter magnitudinem, $\frac{1}{2}v^2R$, (per § B.) Centri gravitatis à TA distantia $\frac{2}{3}v$: Ergo, à $\tau\alpha$, $2R - \frac{2}{3}v$, seu $\frac{2}{3}R + \frac{2}{3}h$; ut prius: Et propterea ejusdem, respectu $\tau\alpha$, momentum, $v^2R^2 - \frac{1}{3}v^3R$, seu $\frac{1}{3}v^2R^2 + \frac{1}{3}v^2hR$, hoc est $\frac{2}{3}vR^3 - \frac{1}{3}s^2R^2 + \frac{1}{3}s^2vR$, ut prius. Atque huic momento, si addatur momentum portionis b$\beta\alpha$B, habebitur momentum portionis Ab$\beta\alpha$; eadem quæ prius.

Idemque Solidum AbB, eodem situ positum, si respectu rectæ Aα consideretur; Momentum ejus est aggregatum omnium $\alpha\beta v$ planorum solidum complentium (hoc est, omnium vR, eo spectantium,) in suas respective centrorum gravitatis distantias ab Aα; (hoc est, in G.

—

Fig. 169, 170. $\frac{-eR+av}{v}$ respective, per § P, Q. prop. 17.) Hoc est, Omnium $= eR^2 + avR$, seu Omnium $- aR^2 + sR^2 + avR$; sumptis v arithmetice proportionalibus, usque ad V eorum maximum.

Sunt autem *Omn.* a, (sumptis v arithmetice proportionalibus;) ipsum planum A b B; hoc est, $-eR+av$, per § B. prop. 17. Adeoque *Omn.* $aR^2 := -eR^3 + avR^2$.

Et, *Omn.* s. (hoc sensu,) ipsum Semicirculi segmentum A B V $\frac{1}{2}eR + \frac{1}{2}sv$; per § F. prop. 15. Adeoque *Omn.* $sR^2 := \frac{1}{2}eR^3 + \frac{1}{2}svR^2$.

Item, *Omn.* av, sunt ipsæ b B rectæ, planum A b B complentes, in suas respective à T A distantias v; Hoc est, Plani A b B momentum respectu T A; Hoc est, $-\frac{3}{4}eR^2 + avR + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2$: per § F. prop. 17. Adeoque *Omn.* $avR := -\frac{3}{4}eR^3 + avR^2 + \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{2}as^2R$.

Ergo, *Omn.* $-aR^2 + sR^2 + avR := \frac{3}{4}eR^3 + \frac{3}{4}svR^2 - \frac{1}{2}as^2R$. Quod itaque est momentum Solidi A b B respectu A α.

Idemque momentum, per magnitudinem $vR^2 - \frac{1}{2}s^2R$ (§ B) divisum; exhibet ejusdem distantiam Centri gravitatis ab A α, $\frac{3eR^2 + 3svR - 2as^2}{4vR - 2s^2 = 2v^2}$.

H. Huic autem Solidi A b B momento sic reperto, si addatur momentum Solidi b β α B; habetur momentum Solidi A b β α, respectu Aα.

Est autem b β α B Solidi magnitudo $s^2R = vhR$. per § B: Ejusque ab A α distantia Centri gravitatis, (idem quod ipsius $\alpha\,\beta\,v$ plani, per prop. 1, 5. hujus) est $\frac{-eR+av}{v}$, per § Q. prop. 17. Ergo ejusdem, respectu A α, momentum est, $-ehR^2 + avhR = -2eR^3 + evR^2 + as^2R = -2eR^3 + avR^2 - svR^2 + as^2R$.

Hoc itaque, Solidi A b B momento (modo reperto) $\frac{3}{4}eR^3 + \frac{3}{4}svR^2 - \frac{1}{2}as^2R$, additum; exhibet Solidi A b β α momentum respectu A α, $-\frac{5}{4}eR^3 + avR^2 - \frac{1}{4}svR^2 + \frac{1}{2}as^2R$. (Adeoque totius A τ α Solidi, cum sit in hoc casu, $a = \frac{1}{2}P$, $v = 2R$, $s = 0$, & $e = a - s = a = \frac{1}{2}P$, momentum respectu A α, $-\frac{5}{8}R^3P + R^3P = \frac{3}{8}R^3P$.) Et momento per magnitudinem $vR^2 + \frac{1}{2}s^2R$ (§ A) diviso; habetur ipsius A b β α solidi, distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{-5eR^2 + 4avR - svR + 2as^2}{4vR + 2s^2}$. (Adeoque in integro A τ α Solido, $\frac{3}{16}P$.)

Atque hoc (sive totius A τ α Solidi, sive ipsius portionis A b β α) momen-

momentum respectu $A\alpha$, est aggregatum omnium ash eo spectantium; sumptis a arcubus arithmetice proportionalibus, usque ad maximum A. Sunt enim, rectangula seu parallelepipeda $b\beta v$, summa omnium sh (ut § A dictum est,) eorumque ab $A\alpha$ distantiæ, $b\alpha = a$, respective.

Quæque de his Solidi portionibus dicta sunt, facile ad alias ubi opus fuerit transferentur: Quarum tum magnitudines, tum momenta & Centra gravitatis, ab his quæ jam traduntur facile derivari poterunt: Puta, Portionis $b\beta\tau$, aut AbK, &c. I.

Si enim ex totius Solidi $A\tau\alpha$, magnitudine $2R^3$; Momento respectu $\tau\alpha$, in erecto plano $A\tau\alpha$, $\frac{3}{8}R^3P$; respectu $\tau\alpha$ in erecto plano $\tau\alpha\varkappa$, $\frac{4}{3}R^4$; & respectu plani super $A\alpha$ erecti, $\frac{3}{8}R^3P$; supra traditis: Auferantur Magnitudo, & respectiva momenta Solidi $Ab\beta\alpha$, $vR^2 + \frac{1}{2}s^2R$; & $\frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{4}svR^2 + \frac{1}{6}s^3R$; & $\frac{2}{3}vR^3 + \frac{2}{3}s^2R^2 - \frac{1}{6}s^2vR$; & $-\frac{5}{4}eR^3 + avR^2 - \frac{1}{4}svR^2 + \frac{1}{2}as^2R$; supra tradita: Relinquentur, Solidi $b\beta\tau$, magnitudo, $2R^3 - vR^2 - \frac{1}{2}s^2R$; Momentum respectu $\tau\alpha$, in erecto plano $A\tau\alpha$, $\frac{1}{8}R^3P - \frac{1}{4}eR^3 - \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{6}s^3R$; respectu $\tau\alpha$ in plano $\tau\alpha\varkappa$ erecto, $\frac{4}{3}R^4 - \frac{2}{3}vR^3 - \frac{2}{3}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR$; respectu plani $A\alpha$ erecti, $\frac{3}{8}R^3P + \frac{5}{4}eR^3 - avR^2 + \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{2}as^2R$. Atque hæc Momenta per Magnitudinem divisa; exhibent Solidi $b\beta\tau$ distantiam Centri gravitais à plano $A\tau\alpha$, $\frac{3R^2P\,6e - R^2 - 6svR - 4s^3}{48R^2 - 24vR - 12s^2}$; à plano $\tau\alpha\varkappa$, $\frac{8R^3 - 4vR^2 - 4s^2R + s^2v}{12R^2 - 6vR - 3s^2}$; ab $A\alpha$ plano, $\frac{3R^2P + 10eR^2 - 8avR + 2svR - 4as^2}{16R^2 - 8vR - 4s^2}$.

Similiter; cum solidi portio $AK\beta\alpha$ parallelogrammo incumbens, Magnitudinem habeat (ex ductu $A\alpha = 2R$, in $\alpha\beta v = vR$, factam,) $2vR^2$; & Momentum respectu plani $A\tau\alpha$ erecti, (ex ductu Magnitudinis $2vR^2$, in distantiam Centri gravitatis plani $\alpha\beta v$, à $\tau\alpha$, $\frac{eR+sv}{4v}$; per § O, Q. prop. 17.) $\frac{1}{2}eR^3 + \frac{1}{2}vR^2$; & respectu $\tau\alpha\varkappa$ erecti plani, (ex ductu $\alpha C = R$, dimidii longitudinis prismatis, in magnitudinem $2vR^2$,) $2vR^3$; & respectu $A\alpha$ erecti plani, (ex ductu magnitudinis $2vR^2$, in distantiam Centri gravitatis plani $\alpha\beta v$ ab $A\alpha$, hoc est, in $\frac{-eR + av}{v}$, per § P, Q. prop. 17.) $-2eR^3 + 2avR^2$ (est enim Prismatis centrum gravitatis in medio rectæ Centra gravitatis basium oppositarum jungente, per prop. 1, & 5 hujus:) Si ex his

Solidi

Fig. 169, 170. Solidi $AK\beta\alpha$ magnitudine & momentis; auferantur Magnitudo & Momenta respectiva Solidi $Ab\beta\alpha$; $vR^2 + \frac{1}{2}s^2R$; & $\frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{4}svR^2 + \frac{1}{6}s^3R$; & $\frac{2}{3}vR^3 + \frac{2}{3}s^2R^2 - \frac{1}{6}s^2vR$; & $-\frac{1}{4}eR^3 + avR^2 - \frac{1}{4}svR^2 + \frac{1}{2}as^2R$; supra tradita: Relinquentur, Solidi AbK, magnitudo, (hoc est, aggregatum *Omnium* sv, eo spectantium, sumptis a arithmetice proportionalibus,) $vR^2 - \frac{1}{2}s^2R = \frac{1}{2}v^2R$; Momentum respectu plani $A\tau\alpha$ erecti, (hoc est, *Omn.* $\frac{1}{2}s^2v$, eo spectantia,) $\frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{6}s^3R$; Momentum respectu plani $\tau\alpha\varkappa$ erecti, $\frac{4}{3}vR^3 - \frac{2}{3}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR = \frac{2}{3}v^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR$; Momentum respectu plani $A\alpha$, (hoc est, *Omnia* asv, eo spectantia,) $-\frac{1}{4}eR^3 + avR^2 + \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{2}as^2R$. Atque hæc momenta, per magnitudinem divisa; exhibent, Solidi AbK, distantiam Centri gravitatis à plano $A\tau\alpha$, $\frac{3eR^2 + 3svR - 2s^3}{12vR - 6s^2 = 6v^2}$; à plano $\tau\alpha\varkappa$, $\frac{16vR^2 - 8s^2R + 2s^2v}{12vR - 6s^2 = 6v^2} = \frac{4}{3}R + \frac{s^2 = hv}{3v}$; (adeoque, à TA, $\frac{2}{3}R - \frac{s^2}{3v} = \frac{2}{3}R - \frac{1}{3}h = \frac{1}{3}v$; & propterea ejusdem respectu TA, momentum, hoc est aggregatum Omnium $\frac{1}{2}sv^2$, eo spectantium, sumptis a arithmetice proportionalibus, $\frac{1}{6}v^3R = \frac{1}{3}v^2R^2 - \frac{1}{6}s^2vR = \frac{2}{3}vR^3 - \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{1}{6}s^2vR$;) distantiamque ab $A\alpha$ plano, $\frac{-3eR^2 + 4avR + svR - 2as^2}{4vR - 2s^2 = 2v^2}$.

Item; Portionis $AKbB$, magnitudo & momenta, habentur ex Portionum AbK, & AbB, magnitudinibus & momentis (respective) additis: Vel subductis Portionis $b\beta\alpha B$ magnitudine & momentis, ex magnitudine & momentis (respectivis) portionis $AK\beta\alpha$: Vel etiam eodem modo quo habentur ipsius $b\beta\alpha B$ magnitudo & momenta. Nempe ex ductu plani $\alpha\beta\upsilon = vR$, in $AV = v$, habetur ipsius $AKbB$ (prismatis) magnitudo v^2R. Atque ex hac magnitudine in $\frac{1}{2}v$ (ejusdem Centri gravitatis à TA vel bB distantiam,) habetur ejusdem, respectu TA vel bB, momentum, $\frac{1}{2}v^3R$. Ductâque in $h + \frac{1}{2}v = 2R - \frac{1}{2}v$ (distantiam à $\tau\alpha$,) ejusdem momentum respectu $\tau\alpha$, $2v^2R^2 - \frac{1}{2}v^3R$. Eâdémque magnitudine ductâ in Centri gravitatis distantiam ab $A\alpha$, $\frac{-eR + av}{v}$; & à plano $A\tau\alpha$, $\frac{eR + sv}{4v}$, (easdem utique quæ sunt, in $\alpha\beta\upsilon$ plano, distantiæ ab $A\alpha$, & $\tau\alpha$;) habentur ejusdem momenta, respectu $A\alpha$, $av^2R - evR^2$; & respectu plani $A\tau\alpha$, $\frac{1}{4}evR^2 + \frac{1}{4}sv^2R$.

Et

Et similiter de portionibus aliis, mutatis mutandis, judicandum erit. Fig. 169, 170. K.

Super A D α Semicirculo, erigi intelligatur Cylindri recti portio; ea ratione, ut super singulas B V ordinatim applicatas, altitudinem habeat respectivis b B æqualem, hoc est arcubus B A. Aut etiam (quod eodem recidit) super *Trilinei Restituti* A τ α, (quam *Figuram Sinuum versorum*, *Arcuumve*, dicimus,) rectâ A α, positus ad angulos rectos A D α Semicirculus, promoveri intelligatur usque ad T τ, Semicylindrum describens; qui Semicylindrus sinuosâ superficie, sinuosæ rectæ A d τ ad angulos rectos ubique insistente, secari intelligatur, Solidum A d τ α terminante.

Manifestum est, ex constructione, Plana Solidum hoc complentia, rectis b B directè insistentia, Parallelogramma esse rectangula; ex rectis b B fig. 170. hoc est arcubus B A fig. 169. in B V eorundem sinus rectos, seu ad diametrum circuli ordinatim-applicatas, ductis: Hoc est, rectangula b B V, fig. 166, 168. Hoc est, *a s* rectangula, sumptis arcubus *a* non quidem arithmetice proportionalibus, sed qui sinibus versis A V, &c. arithmetice proportionalibus conveniunt: quò plana Solidum hoc complentia sint æqualibus intervallis dissita. Adeoque A b V, Solidi frustum, est aggregatum omnium *a s*, eo spectantium, sumptis *v* sinibus versis arithmetice proportionalibus.

Manifestum item est, ex constructione, Plana rectis b β directè insistentia, Solidum idem complentia, (cum semicylindri portio sit,) semicirculo rectæ A α insistenti parallela, Segmenta esse Semicirculi, ut B V α fig. 169. ipsis b β rectis fig. 170. (arcuum arithmetice proportionalium sinibus versis) æquealta. Puta rectæ x ξ, Segmentum O X D α; rectæ z ζ, Segmentum S Z D α, & sic deinceps; usque ad ultimum Φ F α seu ipsum α punctum, si totum Solidum spectemus; vel usque ad V B α segmentum, si solidi portionem A b β α, spectemus. Et sic alibi. Adeoque A b β α, Solidi portio, est aggregatum omnium V B α Segmentorum Semicirculi, eò spectantium sumptis *a* arcubus, (puta A X, A Z, &c.) arithmetice proportionalibus. Sunt autem Omnia Segmenta O X D α, S Z D α, &c. totidem Semicirculi demptis contrariis Segmentis O X A, S Z A, &c. Hoc est, Semicirculus A D α in rectam α τ ductus seu A α τ T Semicylindrus, si totum Solidum spectemus; vel. si portionem A b β α Spectemus, idem Semicirculus in α β ductus, (seu A α β K Semicylindrus:) Demptis utrobique omnibus O X A, S Z A &c. hoc est omnibus A B V eo spectantibus; Hoc est, dempto Solido quod ipsi A τ T, vel A b K, trilineo insistere deberet ad respectivum Semicylindrum complendum; (cui

Fig. 169, (cui æquale eſt, quod ſimili portioni puncto τ adjacenti incumbit: Puta,
170. quod AzK trilineo incumberet, incumbenti trilineo τ e ϵ; & ſic ubique.)

Eſt autem Segmentum B V A quodvis, (per § F. prop. 15.) $\frac{1}{2}eR + \frac{1}{2}sv = \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR + \frac{1}{2}sv$. Adeoque ſumma omnium eo ſpectantium, ſunt *Omnia*, $\frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR + \frac{1}{2}sv$, uſque ad (eo ſpectantium) ultimum, quod dicamus impræſentiarum $\frac{1}{2}AR - \frac{1}{2}SR + \frac{1}{2}SV$.

Sunt autem *Omnes a*, (arcus arithmetice proportionales, uſque ad A maximum,) $= \frac{1}{2}A^2$, (per prop. 1. hujus:) adeoque *Omn.* $\frac{1}{2}aR = \frac{1}{4}A^2R$.

Item, *Omnes s*, (ſinus recti arcubus illis convenientes, uſque ad S maximum,) ſunt $= VR$, (per § Q. prop. 17.) adeoque *Omn.* $-\frac{1}{2}sR : = -\frac{1}{2}VR^2$.

Item, *Omnia s v*, uſque ad SV maximum; ſunt facta ex ſinibus rectis arcuum arithmetice proportionalium, puta XO, ZS, &c. fig. 169. hoc eſt ξo, $\zeta \upsilon$, &c. fig. 170. ductis in reſpectivos ſinus verſos, ut AO, AS, &c. Fig. 169, 170. hoc eſt, xq, zK, &c. ſinuum verſorum ξx, ζz, &c. reſiduos ad diametrum $A\alpha = 2R$. (Nempe, Solidi priùs conſtructi, portio AbK, § A, I, exhibita.) Hoc eſt, Omnes ξo, $\zeta \upsilon$, &c. in $2R$ ductæ; demptis eiſdem in ξx, ζz, &c. reſpective ductis. Sunt autem, Omn. ξo, $\zeta \upsilon$, &c. hoc eſt Omn. s uſque ad S maximum, hoc eſt $\alpha\beta\upsilon$ trilineum, $= VR$; (ut modo dictum:) adeoque eædem Omnes in $A\alpha = 2R$, ſunt $2VR^2$; Item eædem Omnes in reſpectivas ξx, ζz, &c. hoc eſt, *Omnes sh* uſque ad SH maximum, (ſeu Solidi, prius conſtructi, portio Ab$\beta\alpha$, § A exhibita;) ſunt Triplum momenti Sectoris correſpondentis BαA fig. 169. reſpectu rectæ Aα, (ut § L prop. 17. & § A hujus oſtenſum eſt,) hoc eſt, $VR^2 + \frac{1}{2}S^2R$; per § S. prop. 15. vel § A hujus. Ergo, eædem omnes ξo, $\zeta \upsilon$, &c. in reſpectivas AO, AS, &c. ſeu xq, zK, &c. hoc eſt, *Omn. sv*, uſque ad maximum SV; ſunt, $2VR^2$ minus $VR^2 + \frac{1}{2}S^2R$; hoc eſt $VR^2 - \frac{1}{2}S^2R$ ($= \frac{1}{2}V^2R$, ut § A, I.) Adeoque *Omn.* $\frac{1}{2}sv : = \frac{1}{2}VR^2 - \frac{1}{4}S^2R$.

Omnia igitur, AXO, AZS, &c. Semicirculi Segmenta, uſque ad maximum (eo ſpectantium) ABV, (Solidum AbK complentia;) hoc eſt, *Omn.* $\frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR + \frac{1}{2}sv$: uſque ad $\frac{1}{2}AR - \frac{1}{2}SR + \frac{1}{2}SV$: ſunt; $\frac{1}{4}A^2R$, minus $\frac{1}{2}VR^2$, plus $\frac{1}{2}VR^2 - \frac{1}{4}S^2R$: Hoc eſt, $\frac{1}{4}A^2R - \frac{1}{4}S^2R = \frac{1}{4}efR$. (Nempe Solidi hujus portio AbK.)

Ergo, Omnia OXα, SZα, &c. Segmenta; hoc eſt totidem Semicirculi, demptis ipſis AXO, AZS, &c. ſunt (propter Semicirculum $= \frac{1}{4}RP$;) $\frac{1}{4}ARP$, minus $\frac{1}{4}A^2R - \frac{1}{4}S^2R$; Hoc eſt, $\frac{1}{4}ARP - \frac{1}{4}A^2R + \frac{1}{4}S^2R$: ſeu (reſtitutis minuſcularum valoribus,) $\frac{1}{4}aRP - \frac{1}{4}a^2R$

+

$+\frac{1}{4}s^2R = \frac{1}{4}aRP - \frac{1}{4}efR$: Quæ eſt, Portionis Solidi quadrilineo A b $\beta\,\alpha$ incumbentis magnitudo. Fig. 169, 170.

Adeoque, totum A d $\tau\,\alpha$ ſolidum, (propter $a = \frac{1}{2}P$, & $s = 0$;) eſt $\frac{1}{8}RP^2 - \frac{1}{16}RP^2 = \frac{1}{16}RP^2$.

Sed & eadem totius Solidi magnitudo, ſic facilius colligitur. Sumptis in A α diametro, duobus punctis quibuſvis æqualiter à C Centro utrinque remotis, ut S, Σ: manifeſtum eſt, tum ſinus rectos S Z, Σ E, fig. 169. invicem æquales eſſe; tum rectas S z, Σ e, ſeu Z z, E e, fig. 170. hoc eſt, arcus B A, E A, ſeu B A, B α, fig. 169. ſimul æquales Semiperipheriæ A B α, ſeu $\tau\,\alpha$ rectæ. Adeoque duo ſimul rectangula, z Z × Z S, e E × E Σ, æqualia uni $\tau\,\alpha$ × S Z. Hoc eſt, Omnes B V totius Semicirculi, in reſpectivas b B; tantundem eſſe atque Omnes B V unius quadrantis (hoc eſt ipſe quadrans A D C $= \frac{1}{8}RP$,) in $\tau\,\alpha = \frac{1}{2}P$, ductæ. Hoc eſt, $\frac{1}{16}RP^2$; totius Solidi magnitudo; ut prius.

Hinc etiam; Portionis Solidi b $\beta\,\tau$ magnitudo colligitur. Nam totum Solidum $= \frac{1}{16}RP^2$; dempto ſegmento A b $\beta\,\alpha = \frac{1}{4}aRP - \frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{4}s^2R$: Relinquit Segmentum $\frac{1}{16}RP^2 - \frac{1}{4}aRP + \frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{4}s^2R$; Vel (ſumpto $\alpha = \frac{1}{2}P - a$,) $\frac{1}{4}\alpha^2R - \frac{1}{4}s^2R$. Quod ipſum in inquiſitione prius repertum erat. Quippe, Sumpto A K $= \tau\,\beta$, (adeoque reſtituto a pro α,) erit $\tau\,\beta$ b = A K b, cujus magnitudo ſupra inventa eſt $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{4}s^2R$; ſeu $\frac{1}{4}efR$. Eſt enim, ef, hoc eſt $a - s$ in $a + s$, $= a^2 - s^2$.

Porro; Si ex Solido A b $\beta\,\alpha = \frac{1}{4}aRP - \frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{4}s^2R$: auferatur Solidum b $\beta\,\alpha$ B; Hoc eſt, b B $= a$, in Segmentum Semicirculi V B $\alpha = \frac{1}{2}\alpha R - \frac{1}{2}sR + \frac{1}{2}sh$ (per § F. prop. 15. quippe quod in B V A eſt a, v, idem in B V α eſt α, h; & s utrobique idem;) hoc eſt (propter $\alpha = \frac{1}{2}P - a$, & $h = 2R - v$,) in $\frac{1}{4}RP - \frac{1}{2}aR + \frac{1}{2}sR - \frac{1}{2}sv$; Nempe $\frac{1}{4}aRP - \frac{1}{2}a^2R + \frac{1}{2}asR - \frac{1}{2}asv$, ſeu $\frac{1}{4}aRP - \frac{1}{2}eaR - \frac{1}{2}asv$; Relinquitur Solidi portio A b B $= \frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{4}s^2R + \frac{1}{2}asv = \frac{1}{4}e^2R + \frac{1}{2}asv$: Seu ſumma rectangulorum omnium as ſolidum illud complentium; ſumptis v arithmetice proportionalibus. L.

Aut etiam; Si, ex Semicylindri portione A K b B; hoc eſt, ex Semicirculi Segmento A B V $= \frac{1}{2}eR + \frac{1}{2}sv$ (per § F. prop. 15.) in b B $= a$ ducto; hoc eſt, ex $\frac{1}{2}eaR + \frac{1}{2}asv = \frac{1}{2}a^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{2}asv$; auferatur Semicylindri portio A b K $= \frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{4}s^2R$ (per § K,) reſtabit Semicylindri portio A b B, $= \frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{2}s^2R + \frac{1}{2}asv$; ut prius.

Similiter de Momentis judicandum erit. M.

Fig. 169, 170. Nempe, Momentum Solidi A b K, respectu T A; idem est atque Momenta Omnium A B V Semicirculi Segmentorum illud complentium respectu ipsius (plani tangentis) T A: Hoc est, (per § L. prop. 15.) *Omn* $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{2}svR - \frac{1}{3}s^3$: seu *Omn.* $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{2}svR - \frac{1}{3}s^3$: Sumptis *a* arithmetice proportionalibus.

Sunt autem *Omn. a*, (arithmetice proportionales usque ad, *a* maximum,) $\frac{1}{2}a^2$ (per prop. 1. hujus.) Adeoque *Omn.* $\frac{1}{2}aR^2 := \frac{1}{4}a^2R^2$.

Item, Omnes *s* (eo spectantes,) sunt ipsum $\alpha\beta v = vR$, (per § Q prop. 17.) Adeoque *Omn* $- \frac{1}{2}sR^2 : = - \frac{1}{2}vR^3$.

Item, *Omnes sv*, sunt ipsum A b K Solidum ex ductu rectarum, βv in b K; hoc est (per § I) $\frac{1}{2}v^2R = vR^2 - \frac{1}{2}s^2R$. Adeoque *Omn.* $\frac{1}{2}svR : = \frac{1}{2}vR^3 - \frac{1}{4}s^2R^2$.

Item, *Omn.* s^3: (per § V. prop. 13.) $=$ *Omn.* o^2R. Sunt autem *Omn.* o^2, hoc est, quadrata Ordinatim-applicatarum, Segmentum A B V complentium, seu *Omn.* s^2, sumptis *v* arithmetice proportionalibus: *Duplum* Momenti Segmenti A B V (fig. 69.) respectu A α: Hoc est (per § V prop. 15.) $\frac{2}{3}vR^2 - \frac{1}{3}s^2R + \frac{1}{3}s^2v$: Adeoque *Omn.* o^2R: ($=$ *Omn.* s^3:) $= \frac{2}{3}vR^3 - \frac{1}{3}s^2R^2 + \frac{1}{3}s^2vR$: Et propterea *Omn.* $- \frac{1}{3}s^3 : = - \frac{2}{9}vR^3 + \frac{1}{9}s^2R^2 - \frac{1}{9}s^2vR$.

Ergo; *Omn.* $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{2}svR - \frac{1}{3}s^3$: Hoc est, Momentum Solidi A b K, respectu T A; est, $\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{5}{36}s^2R^2 - \frac{2}{9}vR^3 - \frac{1}{9}s^2vR$.

Adeoque, propter ipsius magnitudinem, $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{4}s^2R$, (per § K.) Distantia Centri gravitatis à T A, $R - \frac{8vR^2 - 4s^2R + 4s^2v}{9a^2 - 9s^2} = R - \frac{4v^2R + 4s^2v}{9ef}$; & à $\tau\alpha$, $R + \frac{8vR^2 - 4s^2R + 4s^2v}{9a^2 - 9s^2} = R + \frac{4v^2R + 4s^2v}{9ef}$; & propterea ejusdem, respectu $\tau\alpha$, momentum, $\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{13}{36}s^2R^2 + \frac{2}{9}vR^3 + \frac{1}{9}s^2vR$.

Si autem Solidi hujus A b K momenta, ex respectivis Semicylindri AK$\delta\alpha$ momentis auferantur: Relinquuntur respectiva Solidi A B $\beta\alpha$ momenta. Est autem Semicylindri hujus magnitudo (ex ductu Semicirculi AD$\alpha = \frac{1}{4}RP$, in $\alpha\beta = a$,) $\frac{1}{4}aRP$; Centrique gravitatis distantia à T A, vel $\tau\alpha$, A C vel C$\alpha = R$. Adeoque ipsius respectu T A, vel $\tau\alpha$, momentum, $\frac{1}{4}aR^2P$. Unde subductis, Solidi A b K momentis, modo traditis, $\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{5}{36}s^2R^2 - \frac{2}{9}vR^3 - \frac{1}{9}s^2vR$; & $\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{13}{36}s^2R^2 + \frac{2}{9}vR^3 + \frac{1}{9}s^2vR$; Relinquitur Solidi A b $\beta\alpha$ momentum

tum reſpectu T A, $\frac{1}{4}aR^2P - \frac{1}{4}a^2R^2 + \frac{5}{36}s^2R^2 + \frac{2}{9}vR^3 + \frac{1}{9}s^2vR$; & Fig. 169, reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}aR^2P - \frac{1}{4}a^2R^2 + \frac{13}{36}s^2R^2 - \frac{2}{9}vR^3 - \frac{1}{9}s^2vR$: Hujuſque 170. propterea Diſtantia Centri gravitatis (propter magnitudinem $\frac{1}{4}aRP - \frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{4}s^2R$, per § K.) à T A, $R + \frac{8vR^2 - 4s^2R + 4s^2v}{9aP - 9a^2 + 9s^2} = R + \frac{4v^2R + 4s^2v}{9aP - 9ef}$; à $\tau\alpha$ $R - \frac{8vR^2 - 4s^2R + 4s^2v}{9aP - 9a^2 + 9s^2} = R - \frac{4v^2R + 4s^2v}{9aP - 9ef}$.

Si verò eadem Solidi A b K momenta, ex reſpectivis Segmenti Semicylindri A K b B, auferantur: habentur reſpectiva Momenta Solidi A b B. Eſt autem ſegmenti ſemicirculi A B V magnitudo $\frac{1}{2}eR + \frac{1}{2}sv$ (per § F. prop. 15.) quæ ducta in b B $= a$, exhibet magnitudinem ſegmenti Cylindri A K b B, $\frac{1}{2}eaR + \frac{1}{2}asv$: Centrique gravitatis diſtantia (utpote eadem quæ Segmenti Semicirculi A B V, per § C. prop. 5.) à T A, $R - \frac{2s^3}{3eR + 3sv}$; à $\tau\alpha$, $R + \frac{2s^3}{3eR + 3sv}$: Adeoque momentum reſpectu T A, $\frac{1}{2}eaR^2$ $(= \frac{1}{2}a^2R^2 - \frac{1}{2}asR^2) + \frac{1}{2}asvR - \frac{1}{3}as^3$; reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}eaR^2 + \frac{1}{2}asvR + \frac{1}{3}as^3$; (eadem quæ plani A B V momenta, in a ducta.) Unde ſubductis reſpectivis ſolidi A b K momentis, modo exhibitis, $\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{5}{36}s^2R^2 - \frac{2}{9}vR^3 - \frac{1}{9}s^2vR$, & $\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{13}{36}s^2R^2 + \frac{2}{9}vR^3 + \frac{1}{9}s^2vR$: Relinquitur Solidi A b B, momentum reſpectu T A, (hoc eſt, *Omnia a s v*, ſumptis v arithmetice proportionalibus,) $\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{1}{2}asR^2 + \frac{5}{36}s^2R^2 + \frac{2}{9}vR^3 + \frac{1}{2}asvR + \frac{1}{9}s^2vR - \frac{1}{3}as^3$; & reſpectu $\tau\alpha$, (hoc eſt, *Omnia a s h*, ſumptis v arithmetice proportionalibus,) $\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{1}{2}asR^2 + \frac{13}{36}s^2R^2 - \frac{2}{9}vR^3 + \frac{1}{2}asvR - \frac{1}{9}s^2vR + \frac{1}{3}as^3$. Adeoque (propter magnitudinem, $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{4}s^2R + \frac{1}{2}asv$, per § L) Solidi A b B, diſtantia Centri gravitatis à T A, $R + \frac{8vR^3 - 4s^2R^2 + 4s^2vR - 12as^3}{9a^2R - 18asR + 9s^2R + 18asv}$; à $\tau\alpha$, $R - \frac{8vR^3 - 4s^2R^2 + 4s^2vR - 12as^3}{9a^2R - 18asR + 9s^2R + 18asv} = R - \frac{4v^2R^2 + 4s^2vR - 12as^3}{9e^2R + 18asv}$.

Totumque A $\tau\alpha$ Solidum, (ſive ſpectetur ut A b $\beta\alpha$, ſive ut A b B, perinde eſt;) momentum habet (propter $a = \frac{1}{2}P$, $v = 2R$, $s = 0$,) reſpectu T A, $\frac{1}{16}R^2P^2 + \frac{4}{9}R^4$; reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{16}R^2P^2 - \frac{4}{9}R^4$.

Centrique

Fig. 170. Centrique gravitatis diſtantia à T A, eſt $R + \frac{64R^3}{9P^2}$; à $\tau\alpha$, $R - \frac{64R^3}{9P^2}$.

N. Porro; eadem A B V Segmenta plana, Solidum A b K complentia; ſeu, *Omnia*, $\frac{1}{2}eR + \frac{1}{2}sv$, (per § F. prop. 15.) ab A α, diſtant ipſis b B $= a$ arcubus arithmetice proportionalibus: Adeoque eorundem omnium, hoc eſt ipſius A b K Solidi, Momentum reſpectu A α, ſunt *Omn.* $\frac{1}{2}eaR + \frac{1}{2}asv$; ſeu *Omn.* $\frac{1}{2}a^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{2}asv$: Sumptis a arithmetice proportionalibus.

Sunt autem, *Omn.* $a^2 := \frac{1}{3}a^3$ (per prop. 1.) Adeoque *Omn.* $\frac{1}{2}a^2R := \frac{1}{6}a^3R$.

Et *Omn.* as: hoc eſt, Omnes s, trilineum $\alpha\beta\upsilon$ complentes, in a, eorundem ab A α diſtantias ductæ; ſunt ejuſdem $\alpha\beta\upsilon$ momentum reſpectu A α; hoc eſt (per § P, Q. prop. 17.) $-eR^2 + avR$. Adeoque *Omn.* $-\frac{1}{2}asR := \frac{1}{2}eR^3 - \frac{1}{2}avR^2$.

Item, *Omn.* asv: Sunt ipſum A b K præcedentis Solidi (ex ductu rectarum $\beta\upsilon$ in b K reſpective) momentum reſpectu A α; hoc eſt, $-\frac{3}{4}eR^3 + avR^2 + \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{2}as^2R$; per § I. Adeoque *Omn.* $\frac{1}{2}asv$: $= -\frac{5}{8}eR^3 + \frac{1}{2}avR^2 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{4}as^2R$.

Ergo; *Omn.* $\frac{1}{2}a^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{2}asv$: Hoc eſt ipſius A b K Solidi Momentum reſpectu A α; eſt, $\frac{1}{8}eR^3$ $(= \frac{1}{8}aR^3 - \frac{1}{8}sR^3)$ $+ \frac{1}{8}svR^2 + \frac{1}{6}a^3R - \frac{1}{4}as^2R$.

Hoc itaque per ipſius magnitudinem, $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{4}s^2R$ (per § K.) diviſum; exhibet ejuſdem diſtantiam Centri gravitatis ab A α, $\frac{3eR^2 + 3svR + 4a^3 - 6as^2}{6a^2 - 6s^2 = 6ef}$.

Illudque Solidi A b K momentum, ex momento Semicylindri A K $\beta\alpha$, Subductum; hoc eſt, ex magnitudine $\frac{1}{4}aRP$ (§ M. oſtenſâ) in $\frac{1}{2}a$ diſtantiam Centri gravitatis ab A α (per prop. 2.) ductâ; hoc eſt, ex $\frac{1}{8}a^2RP$ ſubductum: Relinquit Solidi A b $\beta\alpha$ momentum reſpectu ejuſdem A α, $\frac{1}{8}a^2RP - \frac{1}{8}eR^3 - \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{6}a^3R + \frac{1}{4}as^2R$. Adeoque (propter magnitudinem $\frac{1}{4}aRP - \frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{4}s^2R$, per § K.) Diſtantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{3a^2P - 3eR^2 - 3svR - 4a^3 + 6as^2}{6aP - 6a^2 + 6s^2 = 6aP - 6ef}$.

Idemque Solidi A b K momentum, ex momento Solidi A K b B, ſubductum; hoc eſt, ex magnitudine $\frac{1}{2}eaR + \frac{1}{2}asv$ (§ M. oſtenſâ) in $\frac{1}{2}a$ (Diſtantiam Centri gravitatis ab A α) ductâ; hoc eſt, ex

$\frac{1}{4}ea^2R$

$\frac{1}{4}ea^2R + \frac{1}{4}a^2sv$: Relinquit Momentum Solidi A b B, respectu ejusdem A α, (seu *Omn.* $\frac{1}{2}a^2s$: eo spectantia, sumptis v arithmetice proportionalibus,) $-\frac{1}{8}eR^3 - \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{6}a^3R + \frac{1}{4}ea^2R + \frac{1}{4}as^2R + \frac{1}{4}a^2sv$, seu (propter $e = a - s$,) $-\frac{1}{8}aR^3 + \frac{1}{8}sR^3 - \frac{1}{8}svR^2 + \frac{1}{12}a^3R - \frac{1}{4}a^2sR + \frac{1}{4}as^2R + \frac{1}{4}a^2sv$. Adeoque (propter magnitudinem $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{4}s^2R + \frac{1}{2}asv$, per § L.) Distantia Centri gravitatis ab A α, est $\frac{-3eR^3 - 3svR^2 + 2a^3R - 6a^2sR + 6as^2R + 6a^2sv}{6a^2R - 12asR + 6s^2R (= 6e^2R) + 12asv}$. Fig. 170.

Totumque A$\tau\alpha$ solidum quod spectat; (sive consideretur ut A b $\beta\alpha$, sive ut A b B, perinde est,) Momentum ejus resp. A α (propter $a = \frac{1}{2}P$, $v = 2R$, & $s = 0$,) est $\frac{1}{96}RP^3 - \frac{1}{16}R^3P$: Distan. Cen. grav. ab Aα, $\frac{1}{6}P - \frac{R^2}{P}$.

Denique; Eadem A B V segmenta plana, Solidum A b K fig. 170. complentia Centra gravitatis habent tantundem à plano A $\tau\alpha$ distantia, quantum ab A α distant eorundem Centra in fig. 169. Eorumque omnium respectu A α fig. 169. momenta; Hoc est, *Omn.* $\frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2v$: (per § R. V. prop. 15.) sunt ipsum solidi A b K momentum respectu plani A $\tau\alpha$ erecti. O.

Sunt autem *Omnes* v, (sumptis a arithmetice proportionalibus,) Hoc est, arcuum arithmetice proportionalium Sinus versi; eo spectantes; idem atque A b K planum; hoc est, eR, (per § B. prop. 17.) Adeoque *Omn.* $\frac{1}{3}vR^2 := \frac{1}{3}eR^3$.

Et, *Omnia* s^2, eo spectantia; *Duplum* Momenti ipsius $\alpha\beta v$ respectu $\tau\alpha$; hoc est, $\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}svR$, (per § Q. prop. 17.) Adeoque *Omn.* $-\frac{1}{6}s^2R := -\frac{1}{12}eR^3 - \frac{1}{12}svR^2$.

Item, *Omn.* s^2v; sunt *Duplum* Momenti Solidi A b K praecedentis, (ex ductu rectarum βv, in b K respective,) respectu Plani (erecti) A $\tau\alpha$; seu $\frac{1}{2}eR^3 + \frac{1}{2}svR^2 - \frac{1}{3}s^3R$; (per § I. prop. hujus.) Adeoque *Omn.* $\frac{1}{6}s^2v := \frac{1}{12}eR^3 + \frac{1}{12}svR^2 - \frac{1}{18}s^3R$.

Ergo *Omn.* $\frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2v := \frac{1}{3}eR^3 - \frac{1}{18}s^3R = \frac{1}{3}aR^3 - \frac{1}{3}sR^3 - \frac{1}{18}s^3R$. Quod itaque est Solidi A b K momentum respectu erecti plani A $\tau\alpha$. Adeoque (propter magnitudinem, $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{4}s^2R = \frac{1}{4}efR$, per § K.) Distantia Centri gravitatis à plano A $\tau\alpha$, est $\frac{12aR^2 - 12sR^2 - 2s^3}{9a^2 - 9s^2} = \frac{12eR^2 - 2s^3}{9ef}$.

Illudque Solidi A b K momentum; ex Semicylindri A K $\beta\alpha$ momento respectivo subductum; hoc est (propter magnitudinem $\frac{1}{4}aRP$,

atque

Fig. 169, 170. atque Diſtantiam Centri gravitatis à plano A $\tau\alpha$, eandem quæ Semicirculi à ſua diametro, $\frac{8R^2}{3P}$, per § Q. prop. 15.) ex $\frac{2}{3}aR^3$: Relinquit Momentum Solidi A b $\beta\alpha$ reſpectu plani A $\tau\alpha$ (erecti,) $\frac{2}{3}aR^3 - \frac{1}{3}eR^3 + \frac{1}{18}s^3R - \frac{1}{3}aR^3 + \frac{1}{3}sR^3 + \frac{1}{18}s^3R = \frac{1}{3}fR^3 + \frac{1}{18}s^3R$. Adeoque (propter hujus magnitudinem $\frac{1}{4}aRP - \frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{4}s^2R = \frac{1}{4}aRP - \frac{1}{4}efR$, per § K.) Diſtantia Centri gravitatis à plano A $\tau\alpha$, $\frac{12fR^2 + 2s^3}{9aP - 9ef} = \frac{12aR^2 + 12sR^2 + 2s^3}{9aP - 9a^2 + 9s^2}$.

Idemque Solidi A b K momentum; ex Segmenti Semicylindri A K b B momento reſpectivo ſubductum; hoc eſt (propter magnitudinem $\frac{1}{2}eaR + \frac{1}{2}asv$, & diſtantiam Centri gravitatis a plano A $\tau\alpha$, eandem quæ Segmenti Semicirculi ABV à diametro A α, $\frac{v^2R + s^2v}{3eR + 3sv}$, per § R. prop. 15.) ex $\frac{1}{6}av^2R + \frac{1}{6}as^2v = \frac{1}{3}avR^2 - \frac{1}{6}as^2R + \frac{1}{6}as^2v$: Relinquitur Solidi A b B momentum reſpectu ejuſdem plani A $\tau\alpha$, (hoc eſt, *Omn.* $\frac{1}{2}as^2$: ſumptis v arithmetice proportionalibus,) $-\frac{1}{3}eR^3 + \frac{1}{6}av^2R + \frac{1}{18}s^3R + \frac{1}{6}as^2v = -\frac{1}{3}aR^3 + \frac{1}{3}sR^3 + \frac{1}{3}avR^2 - \frac{1}{6}as^2R + \frac{1}{18}s^3R + \frac{1}{6}as^2v$. Adeoque (propter magnitudinem $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{4}s^2R + \frac{1}{2}asv = \frac{1}{4}e^2R + \frac{1}{2}asv$, per § L.) Diſtantia Centri gravitatis à plano A $\tau\alpha$, $\frac{-12eR^3 + 12avR^2 - 6as^2R + 2s^3R + 6as^2v}{9e^2R + 18asv}$.

Totiuſque A $\tau\alpha$ Solidi, (ſive conſideretur ut A b $\beta\alpha$, ſive ut AbB,) Momentum reſpectu A $\tau\alpha$ plani (propter $a = \frac{1}{2}P$, & $v = 2R$, & $s = 0$,) $\frac{1}{6}R^3P$; Diſtantia Centri gravitatis ab A $\tau\alpha$ plano, $\frac{8R^2}{3P}$. Nempe tantundem atque Semicylindri A K $\delta\alpha$: Tantundem utique ponderat reſpectu A $\tau\alpha$ plani, atque tantundem inde diſtat; ſive ſit in ſitu A $\tau\alpha$, ſive intelligatur pars d $\delta\tau$ in ſitum d K A replicata Semicylindrum complere.

P. Sed & eadem quæ jam Traduntur Solidi A b B momenta, ſimiliter haberi poterunt, ſi, ex Solidi A B $\beta\alpha$ momentis, auferantur Solidi b $\beta\alpha$ B momenta reſpectiva.

Eſt autem Solidi b $\beta\alpha$ B magnitudo, $\frac{1}{4}aRP - \frac{1}{2}a^2R + \frac{1}{2}asR - \frac{1}{2}asv$, (ut § L. oſtenſum eſt;) ejuſque Centri gravitatis ab A α diſtantia, $\frac{1}{2}a$; Atque à $\tau\alpha$, & T A, quantum inde diſtat Centrum gravitatis Segmenti Semicirculi B V α; atque ab A $\tau\alpha$ plano, quantum ab A α diſtat ipſius B V α plani Centrum gravitatis; (eſt enim, per prop. 1.

&

& 1 hujus, in medio rectæ centra gravitatis oppositarum basium conjungente: Hoc est, à $\tau\alpha$, $R - \frac{2s^3}{3aR - 3sR + 3sb} = R - \frac{4s^3}{3RP - 6aR + 6sR - 6sv}$; à TA, $R + \frac{4s^3}{3RP - 6aR + 6sR - 6sv}$; à plano A $\tau\alpha$, $\frac{b^2R + s^2b}{3aR - 3sR + 3sb} = \frac{8R^3 - 4vR^2 + 2s^2R - 2s^2v}{3RP - 6aR + 6sR - 6sv}$: Adeoque momentum respectu A α, $\frac{1}{8}a^2RP - \frac{1}{4}a^3R + \frac{1}{4}a^2sR - \frac{1}{4}a^2sv$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}aR^2P - \frac{1}{2}a^2R^2 + \frac{1}{2}asR^2 - \frac{1}{2}asvR - \frac{1}{3}as^3$; respectu TA, $\frac{1}{4}aR^2P - \frac{1}{2}a^2R^2 + \frac{1}{2}asR^2 - \frac{1}{2}asvR + \frac{1}{3}as^3$; respectu plani A $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}aR^3 - \frac{1}{3}avR^2 + \frac{1}{6}as^2R - \frac{1}{6}as^2v$. Fig. 169, 170.

Hæc itaque momenta, momentis respectivis Solidi A b $\beta\alpha$ subducta, Relinquent Solidi A b B momenta respectiva: eadem quæ prius exhibentur.

Eademque Solidi b $\beta\alpha$ B momenta, momentis respectivis A b B addita; exhibebunt eadem quæ prius momenta Solidi A b $\beta\alpha$ respectiva.

Solidóque b $\beta\tau$, eadem applicantur omnia quæ de b K A traduntur: Q.
Substitutis ubique α pro a, b pro v, $\tau\alpha$ pro T A, & τ T pro A α. Similiter enim ipsis $\tau\alpha$, τ T, adjacet b $\beta\tau$; atque b K A, ipsis A T, A α.

Exhibuimus itaque, in utroque Solido; tum eo scilicet quod ex R.
Figuræ Sinuum versorum A $\tau\alpha$ rectis b β, in βv, respectivas Figuræ Sinuum Rectorum rectas, ductis; tum eo quod ex Figuræ Arcuum A $\tau\alpha$ rectis b B, in B V, respectivas Semicirculi rectas, ductis componitur; Eorumque partibus; Tum Magnitudines, tum Momenta respectu planorum aliquot expositorum, & Centrorum gravitatis ab illis planis distantias. Et propterea, (per prop. 26. cap. præced.) propter exhibitas Centrorum gravitatis à tribus saltem planis, quorum ne duo quidem sunt invicem parallela, (puta à plano A $\tau\alpha$, & duobus aliis quæ huic in rectis A α, $\tau\alpha$, ad rectos angulos insistunt,) exhibentur ipsa gravitatis Centra. Quæque de his dicta sunt; facile erit ad alia ampliare.

Et quidem, quæ de Solidis his tradidimus; eadem ad Protracta & Contracta facile transferuntur. Manentibus utique, (ut in propositione præcedente) A $\alpha = 2R$, adeoque A V $= v$, & V$\alpha = b$: Si sit $\tau\alpha$, major (ut in Solido Protracto) vel minor (ut in Contracto) quam $\frac{1}{2}P$, (reliquæque his parallelæ similiter vel protractæ vel contractæ;) Quoties rectæ b B in calculum veniunt; pro a substituenda erit

Fig. 169, 170. erit alia quantitas, quæ ad illam sit in eadem ratione qua est τα, ad ½ P.

Quæque de solidis figuram Sinuum Rectorum unius quadrantis αδκ fig. 170. respicientibus, dicta sunt; eadem omnia, ad solida figuram chordarum seu subtensarum totius Semicirculi, ut Aδκ fig. 183. accommodanda erunt: Propter chordas subtensarum in semicirculo, ubique duplas sinuum rectorum arcuum dimidiatorum; adeoque figuras αδκ fig. 170. & Aδκ fig. 183. omnino similes. Qua de re plura videantur ad prop. 22. § G, H, I, ubi hac operatione opus erit.

PROP. XIX.

PARS PRIMA.

A. *Ungula* Figuræ Sinuum versorum Arcuumve Aτα insistens, Aciem habens τα, est ad correspondentem Ungulam Semicirculi, ut 3 ad 2; seu *Sesquialtera*.

Ejusque *Momentum* respectu aciei suæ; est *Sesquitertium* Momenti Ungulæ respectivæ Semicirculo ADα insistentis, aciem habentis τα, respectu aciei suæ; seu ut 4 ad 3.

Idemque in respectivis Portionibus obtinet: puta, *Ungula* Quadrilineo bβαA insistens, (aciem habens τα,) est *Sesquialtera* Ungulæ respectivæ, sectori BαA insistentis; seu ut 3 ad 2. Ejusque *Momentum*, respectu aciei suæ τα, est *Sesquitertium* momenti respectivæ Ungulæ insistentis Sectori BαA, respectu aciei τα; seu ut 4, ad 3.

Atque hinc, eadem respective determinantur, tum quoad Magnitudines, tum quoad Momenta, & Centra gravitatis, in Ungulis Figuræ Sinuum versorum, ejusve por-

portionibus, insistentibus; atque in illis quæ Semi- Fig. 169,
circulo, ejusve portionibus respectivis insistunt. 170.

Nempe (retentis Symbolis ut in propositionibus præcedentibus,) Semiquadrantalis Ungulæ, Trilinei $A\tau\alpha$, aciem habentis $\tau\alpha$, Magnitudo $\frac{1}{8}R^2P$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{12}R^3P$; respectu T A, $\frac{1}{3}R^3P$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{10}{9}R$; à T A, $\frac{8}{9}R$: Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{32}R^2P^2 - 2R^4$; respectu $T\tau$, $\frac{1}{32}R^2P^2 + 2R^4$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{4}P - \frac{16R^2}{3P}$; à $T\tau$, $\frac{1}{4}P + \frac{16R^2}{3P}$. B. G.

Aciemque habentis T A; Magnitudo $\frac{5}{8}R^2P$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}R^3P$; respectu T A, $\frac{11}{12}R^3P$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{8}{15}R$; à T A, $\frac{22}{15}R$: Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{5}{32}R^2P^2 - 2R^4$; respectu $T\tau$, $\frac{5}{32}R^2P^2 + 2R^4$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{4}P - \frac{16R^2}{5P}$; à $T\tau$, $\frac{1}{4}P + \frac{16R^2}{5P}$. B. G.

Aciemque habentis $A\alpha$; Mag. $\frac{1}{8}RP^2 - 2R^3$; Momentum resp. $\tau\alpha$, $\frac{1}{32}R^2P^2 - 2R^4$; resp. TA, $\frac{5}{32}R^2P^2 - 2R^4$; Distan. Cent. grav. à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}R - \frac{4R^3}{P^2 - 16R^2}$; à TA, $\frac{5}{4}R + \frac{4R^3}{P^2 - 16R^2}$: Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{24}RP^3 - R^3P$; respectu $T\tau$, $\frac{1}{48}RP^3$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{3}P - \frac{8R^2P}{3P^2 - 48R^2}$; à $T\tau$, $\frac{1}{6}P + \frac{8R^2P}{3P^2 - 48R^2}$. G. K.

Aciemque habentis $T\tau$; Magnitudo, $\frac{1}{8}RP^2 + 2R^3$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{32}R^2P^2 + 2R^4$; respectu T A, $\frac{5}{32}R^2P^2 + 2R^4$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}R + \frac{4R^3}{P^2 + 16R^2}$; à T A, $\frac{5}{4}R - \frac{4R^3}{P^2 + 16R^2}$: Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{48}RP^3$, respectu $T\tau$, $\frac{1}{24}RP^3 + R^3P$; G. K.

Fig. 169, 170. Distantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{6}P - \frac{8R^2P}{3P^2+48R^2}$; à T τ, $\frac{1}{3}P + \frac{8R^2P}{3P^2+48R^2}$.

C. Ungulæ (Semiquadrantalem intellige) Quadrilinei A b β α, aciem habentis $\tau\alpha$; magnitudo, $\frac{3}{4}fR^2 + \frac{1}{4}shR$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{6}fR^3 + \frac{1}{2}shR^2 - \frac{1}{9}s^3R$; respectu T A, $\frac{2}{3}fR^3 + \frac{1}{9}s^3R$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{10}{9}R + \frac{4sh^2}{27fR+9sh}$; à T A, $\frac{8}{9}R - \frac{4sh^2}{27fR+9sh}$: Momentum

F. respectu b β, $\frac{3}{8}a^2R^2 + vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2$; respectu A α, $\frac{3}{8}a^2R^2 + \frac{5}{4}asR^2 - \frac{1}{4}asvR - vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$; Distantia Centri gravitatis à b β, $\frac{1}{2}a + \frac{8vR^2 - 5asR + s^2R + asv}{6aR + 10sR - 2sv}$; ab A α, $\frac{1}{2}a - \frac{8vR^2 - 5asR + s^2R + asv}{6aR + 10sR - 2sv}$.

C. Aciemque habentis T A; Magnitudo $\frac{5}{4}fR^2 - \frac{1}{4}shR$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}fR^3 + \frac{1}{9}s^3R$; respectu T A, $\frac{11}{6}fR^3 - \frac{1}{2}shR^2 - \frac{1}{9}s^3R$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{8}{15}R + \frac{24shR + 20s^3}{225fR - 45sh}$; à T A, $\frac{22}{15}R - \frac{24shR + 20s^3}{225fR - 45sh}$: Mo-

F. mentum respectu b β, $\frac{5}{8}a^2R^2 + vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$; respectu A α, $\frac{5}{8}a^2R^2 - vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{3}{4}asR^2 + \frac{1}{4}asvR$; Distantia Centri gravitatis à bβ, $\frac{1}{2}a + \frac{8vR^2 - s^2R - 3asR - asv}{10aR + 6sR + 2sv}$; ab A α, $\frac{1}{2}a - \frac{8vR^2 - s^2R - 3asR - asv}{10aR + 6sR + 2sv}$.

F. Aciemque habentis A α; Magnitudo, $\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}a^2R^2 + \frac{5}{4}asR^2 - \frac{1}{4}asvR - vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$; respectu T A, $\frac{5}{8}a^2R^2 + \frac{3}{4}asR^2 - vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{4}asvR$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}R - \frac{2vR^2 - 4asR + s^2R + 2asv}{4a^2 + 8as - 8vR}$; à T A, $\frac{5}{4}R +$

K. $\frac{2vR^2 - 4asR + s^2R + 2asv}{4a^2 + 8as - 8vR}$: Momentum respectu A α, $2eR^3$

$-2avR^2$,

$-2avR^2+\frac{1}{3}a^3R+a^2sR$; reſpectu b β, $-2eR^3+avR^2$ Fig. 169, 170.
$+\frac{1}{6}a^3R$; Diſt. Cen. grav. ab Aα, $\frac{12eR^2-12avR+2a^3+6a^2s}{3a^2+6as-6vR}$;
à b β, $\frac{-12eR^2+6avR+a^3}{3a^2+6as-6vR}$.

Aciemque habentis b β; Magnitudo, $\frac{1}{2}a^2R+vR^2$; Momentum reſpectu τα, $\frac{3}{8}a^2R^2+vR^3+\frac{1}{8}s^2R^2$; reſpectu T A, $\frac{5}{8}a^2R^2+vR^3-\frac{1}{8}s^2R^2$; Diſtantia Centri gravitatis à τα, $\frac{3}{4}R+\frac{2vR+s^2}{4a^2+8vR}R$; à T A, $\frac{5}{4}R-\frac{2vR+s^2}{4a^2+8vR}R$: F.
Momentum reſpectu A α, $-2eR^3+avR^2+\frac{1}{6}a^3R$; reſpectu b β, $2eR^3+\frac{1}{3}a^3R$; Diſtantia Centri gravitatis ab A α, $a-\frac{12eR^2+2a^3}{3a^2+6vR}$; à b β, $\frac{12eR^2+2a^3}{3a^2+6vR}$. K.

Ungulæ Trilinei A b K, aciem habentis τα, Magnitudo, $\frac{5}{4}eR^2+\frac{1}{4}svR$; Momentum reſpectu τα, $\frac{11}{6}eR^3+\frac{1}{2}svR^2+\frac{1}{9}s^3R$; reſpectu T A, $\frac{2}{3}eR^3-\frac{1}{9}s^3R$; Diſtantia Centri gravitatis à τα, $\frac{22}{15}R+\frac{24svR+20s^3}{225eR+45sv}$; à D.
T A, $\frac{8}{15}R-\frac{24svR+20s^3}{225eR+45sv}$: Momentum reſpectu βbK, $\frac{5}{8}a^2R^2-\frac{5}{4}vR^3+\frac{1}{8}v^2R^2$; reſpectu A α, $\frac{5}{8}a^2R^2-\frac{5}{4}asR^2+\frac{1}{4}asvR+\frac{5}{4}vR^3-\frac{1}{8}v^2R^2$: Diſtantia Centri gravitatis à βbK, $\frac{1}{2}a-\frac{10vR^2-v^2R-5asR+asv}{10eR+2sv}$; ab A α, $\frac{1}{2}a+\frac{10vR^2-v^2R-5asR+asv}{10eR+2sv}$. H.

Aciemque habentis T A; Magnitudo $\frac{3}{4}eR^2-\frac{1}{4}svR$; Momentum reſpectu τα, $\frac{2}{3}eR^3-\frac{1}{9}s^3R$; reſpectu T A, $\frac{5}{6}eR^3-\frac{1}{2}svR^2+\frac{1}{9}s^3R$; Diſtantia Centri gravitatis à τα, $\frac{8}{9}R+\frac{4sv^2}{27eR-9sv}$; à T A, $\frac{10}{9}R-\frac{4sv^2}{27eR-9sv}$: Momentum reſpectu βbK, $\frac{3}{8}a^2R^2-\frac{3}{4}vR^3-\frac{1}{8}v^2R^2$; reſpectu A α, $\frac{3}{8}a^2R^2-\frac{3}{4}asR^2-\frac{1}{4}asvR+\frac{3}{4}vR^3+\frac{1}{8}v^2R^2$; Diſtan- D. H.

tia

Fig. 170. tia Centri gravitatis à βbK, $\frac{1}{2}a + \frac{3asR + asv - 6vR^2 - v^2R}{6eR - 2sv}$; ab Aα, $\frac{1}{2}a - \frac{3asR + asv - 6vR^2 - v^2R}{6eR - 2sv}$.

H. Aciemque habentis Aα; Magnitudo, $\frac{1}{2}a^2R - asR + vR^2$; Momentum reſpectu TA, $\frac{3}{8}a^2R^2 - \frac{3}{4}asR^2 - \frac{1}{4}asvR + \frac{3}{4}vR^3 + \frac{1}{8}v^2R^2$; reſpectu τα, $\frac{5}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 + \frac{5}{4}vR^3 + \frac{1}{4}asvR - \frac{1}{8}v^2R^2$; Diſtantia Centri gravitatis à TA,

L. $\frac{3}{4}R + \frac{v^2R - 2asv}{4a^2 - 8as + 8vR}$; à τα, $\frac{5}{4}R - \frac{v^2R - 2asv}{4a^2 - 8as + 8vR}$: Momentum reſpectu bK, $2eR^3 - avR^2 + \frac{1}{6}a^3R$; reſpectu Aα, $-2eR^3 + 2avR^2 + \frac{1}{3}a^3R - a^2sR$; Diſtantia Centri gravitatis à bK, $\frac{12eR^2 - 6avR + a^3}{3a^2 - 6as + 6vR}$; ab Aα, $\frac{-12eR^2 + 12avR + 2a^3 - 6a^2s}{3a^2 - 6as + 6vR}$.

H. Aciemque habentis βbK; Magnitudo, $\frac{1}{2}a^2R - vR^2$; Momentum reſpectu TA, $\frac{3}{8}a^2R^2 - \frac{3}{4}vR^3 - \frac{1}{8}v^2R^2$; reſpectu τα, $\frac{5}{8}a^2R^2 - \frac{5}{4}vR^3 + \frac{1}{8}v^2R^2$; Diſtantia Centri gravitatis à TA, $\frac{3}{4}R - \frac{v^2R}{4a^2 - 8vR}$; à τα, $\frac{5}{4}R +$

L. $\frac{v^2R}{4a^2 - 8vR}$: Momentum reſpectu Aα, $2eR^3 - avR^2 + \frac{1}{6}a^3R$; reſpectu bK, $-2eR^3 + \frac{1}{3}a^3R$; Diſtantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{12eR^2 - 6avR + a^3}{3a^2 - 6vR}$; à bK, $\frac{-12eR^2 + 2a^3}{3a^2 - 6vR}$.

D. Ungulæ Trilinei bβτ, aciem habentis TA; Magnitudo, $\frac{5}{4}\alpha R^2 - \frac{5}{4}sR^2 + \frac{1}{4}shR$; Momentum reſpectu TA, $\frac{11}{16}\alpha R^3 - \frac{1}{6}sR^3 + \frac{1}{2}shR^2 + \frac{1}{9}s^3R$, reſpectu τα, $\frac{2}{3}\alpha R^3 - \frac{2}{3}sR^3 - \frac{1}{9}s^3R$; Diſtantia Centri gravitatis à TA, $\frac{22}{15}R + \frac{24shR + 20s^3}{225\alpha R - 225sR + 45sh}$; à τα, $\frac{8}{15}R -$

24shR

$\frac{24shR + 20s^3}{225\alpha R - 225sR + 45sh}$: Momentum respectu b β, $\frac{5}{8}\alpha^2 R^2$ H.
$- \frac{5}{4}hR^3 + \frac{1}{8}h^2R^2$; respectu T τ, $\frac{5}{8}\alpha^2R^2 - \frac{5}{4}\alpha sR^2$ Fig. 170.
$+ \frac{1}{4}\alpha shR + \frac{5}{4}hR^3 - \frac{1}{8}h^2R^2$; Distantia Centri gravitatis à b β, $\frac{1}{2}\alpha - \frac{10hR^2 - h^2R - 5\alpha sR + \alpha sh}{10\alpha R - 10sR + 2sh}$; à T τ, $\frac{1}{2}\alpha + \frac{10hR^2 - h^2R - 5\alpha sR\alpha + sh}{10\alpha R - 10sR + 2sh}$.

Aciemque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{3}{4}\alpha R^2 - \frac{3}{4}sR^2 - \frac{1}{4}shR$; D.
Momentum respectu T A, $\frac{2}{3}\alpha R^3 - \frac{2}{3}sR^3 - \frac{1}{9}s^3R$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{6}\alpha R^3 - \frac{5}{6}sR^3 - \frac{1}{2}shR^2 + \frac{1}{9}s^3R$; Distantia Centri gravitatis à T A, $\frac{8}{9}R + \frac{4sh^2}{27\alpha R - 27sR - 9sh}$; à $\tau\alpha$, $\frac{10}{9}R - \frac{4sh^2}{27\alpha R - 27sR - 9sh}$: Momentum respectu H.
b β, $\frac{3}{8}\alpha^2R^2 - \frac{3}{4}hR^3 - \frac{1}{8}h^2R^2$; respectu T τ, $\frac{3}{8}\alpha^2R^2 - \frac{3}{4}\alpha sR^2 - \frac{1}{4}\alpha shR + \frac{3}{4}hR^3 + \frac{1}{8}h^2R^2$; Distantia Centri gravitatis à b β, $\frac{1}{2}\alpha + \frac{3\alpha sR + \alpha sh - 6hR^2 - h^2R}{6\alpha R - 6sR - 2sh}$; à T τ, $\frac{1}{2}\alpha - \frac{3\alpha sR + \alpha sh - 6hR^2 - h^2R}{6\alpha R - 6sR - 2sh}$.

Aciemque habentis T τ; Magnitudo, $\frac{1}{2}\alpha^2R - \alpha sR + hR^2$; H.
Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}\alpha^2R^2 - \frac{3}{4}\alpha sR^2 - \frac{1}{4}\alpha shR + \frac{3}{4}hR^3 + \frac{1}{8}h^2R^2$; respectu T A, $\frac{5}{8}\alpha^2R^2 - \frac{5}{4}\alpha sR^2 + \frac{5}{4}hR^3 + \frac{1}{4}\alpha shR - \frac{1}{8}h^2R^2$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}R + \frac{h^2R - 2\alpha sh}{4\alpha^2 - 8\alpha s + 8hR}$; à T A, $\frac{5}{4}R - \frac{h^2R - 2\alpha sh}{4\alpha^2 - 8\alpha s + 8hR}$: Momentum respectu b β, $2\alpha R^3 - 2sR^3 - \alpha hR^2 + \frac{1}{6}\alpha^3R$, L.
respectu T τ, $-2\alpha R^3 + 2sR^3 + 2\alpha hR^2 + \frac{1}{3}\alpha^3R - \alpha^2sR$; Distantia Centri gravitatis à b β, $\frac{12\alpha R^2 - 12sR^2 - 6\alpha hR + \alpha^3}{3\alpha^2 - 6\alpha s + 6hR}$; à T τ, $\frac{-12\alpha R^2 + 12sR^2 + 12\alpha hR + 2\alpha^3 - 6\alpha^2 s}{3\alpha^2 - 6\alpha s + 6hR}$.

Aciemque habentis b β; Magnitudo, $\frac{1}{2}\alpha^2R - hR^2$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}\alpha^2R^2 - \frac{3}{4}hR^3 - \frac{1}{8}h^2R^2$; respectu H.
T A

Fig. 169, 170. L. T A $\frac{5}{8}\alpha^2 R^2 - \frac{5}{4} b R^3 + \frac{5}{8} b^2 R^2$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}R - \frac{b^2 R}{4\alpha^2 - 8bR}$; à T A, $\frac{5}{4}R + \frac{b^2 R}{4\alpha^2 - 8bR}$: Momentum respectu T τ, $2\alpha R^3 - 2sR^3 - \alpha b R^2 + \frac{1}{6}\alpha^3 R$; respectu b β, $-2\alpha R^3 + 2sR^3 + \frac{1}{3}\alpha^3 R$; Distantia Centri gravitatis à T τ, $\frac{12\alpha R^2 - 12sR^2 - 6\alpha bR + \alpha^3}{3\alpha^2 - 6bR}$; à b β, $\frac{-12\alpha R^2 + 12sR^2 + 2\alpha^3}{3\alpha^2 - 6bR}$.

E. Ungulæ Parallelogrammi b $\beta\alpha$ B, aciem habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{2}ab^2$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}b$; à T A, $2R - \frac{2}{3}b$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}ab^3$;
I. respectu T A, $ab^2 R - \frac{1}{3}ab^3$: Distantia Centri gravitatis ab A α, seu b β, $\frac{1}{2}a$; momentum respectu A α, vel b β, $\frac{1}{4}a^2 b^2$.

E. Aciemque habentis T A; Magnitudo, $2abR - \frac{1}{2}ab^2 = 2aR^2 - \frac{1}{2}av^2$; Momentum respectu T A, $\frac{8}{3}aR^3 - \frac{1}{3}av^3$; respectu $\tau\alpha$, $ab^2 R - \frac{1}{3}ab^3$; Distantia Centri gravitatis à
I. T A, $\frac{16R^3 - 2v^3}{12R^2 - 3v^2}$; à $\tau\alpha$, $2R - \frac{16R^3 - 2v^3}{12R^2 - 3v^2}$: Momentum respectu A α, seu b β, $a^2 bR - \frac{1}{4}a^2 b^2$: Distantia Centri gravitatis, ab A α, seu b β, $\frac{1}{2}a$.

I. Aciemque habentis A α; Magnitudo, $\frac{1}{2}a^2 b$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}b$; à T A, $2R - \frac{1}{2}b$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}a^2 b^2$; respectu T A, $ab^2 R$
M. $- \frac{1}{4}a^2 b^2$: Distantia Centri gravitatis à b β, $\frac{1}{3}a$; ab Aα, $\frac{2}{3}a$; Momentum respectu b β, $\frac{1}{6}a^3 b$; respectu A α, $\frac{1}{3}a^3 b$.

I. Aciemque habentis b β; magnitudo, $\frac{1}{2}a^2 b$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}b$; à T A, $2R - \frac{1}{2}b$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}a^2 b^2$; respectu T A, $ab^2 R - \frac{1}{4}a^2 b^2$:
M. Distantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{3}a$; à b β, $\frac{2}{3}a$; Momentum respectu Aα, $\frac{1}{6}a^3 b$; respectu b β, $\frac{1}{3}a^3 b$.

Eadem-

Eademque ab Ungulis b $\beta\alpha$ B, ad Ungulas b K A B, transferentur, ſubſtitutis ubique v pro h, & T A pro $\tau\alpha$, & vice verſa. I. Fig. 169. 170.

Ungulæ Segmenti b B A, aciem habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{3}{4}fR^2 + \frac{1}{4}shR - \frac{1}{2}ah^2$; Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{6}fR^3 + \frac{1}{2}shR^2 - \frac{1}{9}s^3R - \frac{1}{3}ah^3$; reſpectu T A, $\frac{2}{3}fR^3 - ah^2R + \frac{1}{9}s^3R + \frac{1}{3}ah^3$; reſpectu b B, $\frac{5}{6}fR^3 - \frac{3}{4}ahR^2 - \frac{1}{4}shR^2 - \frac{1}{9}s^3R - \frac{1}{4}sh^2R + \frac{1}{6}ah^3$; Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{30fR^3 + 18shR^2 - 4s^3R - 12ah^3}{27fR^2 + 9shR - 18ah^2}$; à T A, $\frac{24fR^3 - 36ah^2R + 4as^3R + 12ah^3}{27fR^2 + 9shR - 18ah^2}$; à b B, $\frac{30fR^3 + 18shR^2 - 4s^3R - 12ah^3}{27fR^2 + 9shR - 18ah^2} - h = v - \frac{24fR^3 - 36ah^2R + 4s^3R + 12ah^3}{27fR^2 + 9shR - 18ah^2}$. E.

Momentum reſpectu bβ, $-\frac{5}{8}a^2R^2 + vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{2}a^2vR + \frac{1}{4}a^2s^2$; reſpectu A$\alpha$, $-\frac{5}{8}a^2R^2 + \frac{5}{4}asR^2 - vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2 - \frac{1}{4}asvR + \frac{1}{2}a^2vR + \frac{1}{4}a^2s^2$; Diſtantia Centri gravitatis à bβ, $\frac{1}{2}a + \frac{8vR^3 - 5asR^2 + s^2R^2 + asvR}{-10eR^2 + 8avR - 2svR + 4as^2}$; ab A α, $\frac{1}{2}a - \frac{8vR^3 - 5asR^2 + s^2R^2 + asvR}{-10eR^2 + 8avR - 2svR + 4as^2}$. I.

Aciemque habentis T A; Magnitudo, $-\frac{3}{4}eR^2 + avR + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2$; Momentum reſpectu T A, $-\frac{5}{6}eR^3 + \frac{4}{3}avR^2 + \frac{1}{2}svR^2 - \frac{2}{3}as^2R - \frac{1}{9}s^3R - \frac{1}{3}as^2v$; reſpectu $\tau\alpha$, $-\frac{2}{3}eR^3 + \frac{2}{3}avR^2 - \frac{1}{3}as^2R + \frac{1}{9}s^3R + \frac{1}{3}as^2v$; reſpectu b B, $\frac{5}{6}eR^3 - \frac{1}{12}avR^2 + \frac{3}{4}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{5}{36}s^3R - \frac{1}{6}as^2v$; Diſtantia Centri gravitatis à T A, $\frac{-30eR^3 + 48avR^2 + 18svR^2 - 24as^2R - 4s^3R - 12as^2v}{-27eR^2 + 36avR + 9svR - 18as^2}$; à $\tau\alpha$, $\frac{-24eR^3 + 24avR^2 - 12as^2R + 4s^3R + 12as^2v}{-27eR^2 + 36avR + 9svR - 18as^2}$; E.

Fig. 169, 170.

à bB; $\frac{30eR^3 - 3avR^2 + 27svR^2 - 12as^2R - 5s^3R - 6as^2v}{-27eR^2 + 36avR + 9svR - 18as^2}$:

I. Momentum reſpectu bβ, $-\frac{3}{8}a^2R^2 + vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{2}a^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2$; reſpectu Aα, $-\frac{3}{8}a^2R^2 + \frac{3}{4}asR^2 - vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{4}asvR + \frac{1}{2}a^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2$; Diſtantia Centri gravitatis à bβ, $\frac{1}{2}a + \frac{8vR^3 - s^2R^2 - 3asR^2 - asvR}{-6eR^2 + 8avR + 2svR - 4as^2}$; ab Aα, $\frac{1}{2}a - \frac{8vR^3 - s^2R^2 - 3asR^2 - asvR}{-6eR^2 + 8avR + 2svR - 4as^2}$.

E. Aciemque habentis bB; Magnitudo, $\frac{3}{4}eR^2 + \frac{3}{4}svR - \frac{1}{2}as^2$; Momentum reſpectu τα, $\frac{2}{3}eR^3 + \frac{1}{12}avR^2 + \frac{3}{4}svR^2 - \frac{2}{3}as^2R + \frac{5}{36}s^3R + \frac{1}{6}as^2v$; reſpectu TA, $\frac{5}{6}eR^3 - \frac{1}{12}avR^2 + \frac{3}{4}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{5}{36}s^3R - \frac{1}{6}as^2v$; reſpectu bB, $-\frac{5}{6}eR^3 + \frac{5}{6}avR^2 + \frac{1}{3}as^2R - \frac{11}{18}s^3R - \frac{1}{3}as^2v$; Diſt. Cen. grav. à τα $\frac{24eR^3 + 3avR^2 + 27svR^2 - 24as^2R + 5s^3R + 6as^2v}{27eR^2 + 27svR - 18as^2}$;

à TA, $\frac{30eR^3 - 3avR^2 + 27svR^2 - 12as^2R - 5s^3R - 6as^2v}{27eR^2 + 27svR - 18as^2}$;

I. à bB $\frac{-30eR^3 + 30avR^2 + 12as^2R - 22s^3R - 12as^2v}{27eR^2 + 27svR - 18as^2}$: Momentum reſpectu bβ, $\frac{3}{8}a^2R^2 + vR^3 - \frac{7}{8}s^2R^2 - \frac{1}{4}a^2s^2$; reſpectu Aα, $\frac{3}{8}a^2R^2 - vR^3 + \frac{7}{8}s^2R^2 - \frac{3}{4}asR^2 + \frac{3}{4}asvR - \frac{1}{4}a^2s^2$; Diſtantia Centri gravitatis à bβ, $\frac{1}{2}a + \frac{8vR^3 - 7s^2R^2 + 3asR^2 - 3asvR}{6eR^2 + 6svR - 4as^2}$; ab Aα, $\frac{1}{2}a - \frac{8vR^3 - 7s^2R^2 + 3asR^2 - 3asvR}{6eR^2 + 6svR - 4as^2}$.

I. Aciemque habentis Aα; Magnitudo, $-\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2 + \frac{1}{2}a^2v$; Momentum reſpectu τα, $-\frac{5}{8}a^2R^2 + \frac{5}{4}asR^2 - vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2 - \frac{1}{4}asvR + \frac{1}{2}a^2vR + \frac{1}{4}a^2s^2$; reſpectu TA, $-\frac{3}{8}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 - vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{4}asvR + \frac{1}{2}a^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2$; Diſtantia Centri gravitatis à τα, $\frac{5}{4}R - \frac{2asvR + a^2vR - 2vR^3 + s^2R^2 - 2a^2s^2}{-4a^2R + 8asR - 8vR^2 + 4a^2v}$; à TA, $\frac{3}{4}R +$

2asvR

$\frac{2asvR + a^2vR - 2vR^3 + s^2K^2 - 2a^2s^2}{-4a^2R + 8asR - 8vR^2 + 4a^2v}$; à bB, $\frac{5}{4}R - b -$ Fig. 169, 170.

$\frac{2asvR + a^2vR - 2vR^3 + s^2R^2 - 2a^2s^2}{-4a^2R + 8asK - 8vK^2 + 4a^2v}$; Momentum respectu bB, $\frac{3}{8}a^2K^2 - vR^3 + \frac{7}{8}s^2R^2 - \frac{3}{4}asR^2 + \frac{3}{4}asvR - \frac{1}{4}a^2s^2$: Momentum respectu bβ, $- 2eR^3 + avR^2 - \frac{1}{6}\iota^3R + \frac{1}{6}a^3v$; respectu Aα, $2eR^3 - 2avR^2 - \frac{1}{3}a^3R + a^2sR + \frac{1}{3}a^3v$; Distantia Centri gravitatis à bβ, $\frac{-12eR^3 + 6avR^2 - a^3R + a^3v}{-3a^2R + 6asR - 6vK^2 + 3a^2v}$; ab Aα, $\frac{12eR^3 - 12avR^2 - 2a^3R + 6a^2sR + 2a^3v}{-3a^2R + 6asR - 6vR^2 + 3a^2v}$. M.

Aciemque habentis bβ; Magnitudo, $-\frac{1}{2}a^2R + vR^2 + \frac{1}{2}a^2v$; Momentum respectu τα, $-\frac{5}{8}a^2R^2 + vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{2}a^2vR + \frac{1}{4}a^2s^2$; respectu TA, $-\frac{3}{8}a^2R^2 + vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{2}a^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2$; Distantia Centri gravitatis à τα, $\frac{5}{4}R - \frac{2vR^3 + a^2vR - s^2R^2 - 2a^2s^2}{-4a^2R + 8vK^2 + 4a^2v}$; à TA, $\frac{3}{4}R + \frac{2vR^3 + a^2vR - s^2R^2 - 2a^2s^2}{-4a^2R + 8vK^2 + 4a^2v}$; à bB, $\frac{5}{4}R - b - \frac{2vR^3 + a^2vR - s^2R^2 - 2a^2s^2}{-4a^2R + 8vR^2 + 4a^2v}$; Momentum respectu bB, $\frac{3}{8}a^2R^2 + vR^3 - \frac{7}{8}s^2R^2 - \frac{1}{4}a^2s^2$: Momentum respectu Aα, $-2eR^3 + avR^2 - \frac{1}{6}a^3R + \frac{1}{6}a^3v$; respectu bβ, $2eR^3 - \frac{1}{3}a^3R + \frac{1}{3}a^3v$; Distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{-12eR^3 + 6avR^2 - a^3R + a^3v}{-3a^2R + 6vR^2 + 3a^2v}$; à bβ, $\frac{12eR^3 - 2a^3R + 2a^3v}{-3a^2R + 6vR^2 + 3a^2v}$. I. M.

PARS SECUNDA.

Eademque in Ungulis Figuram Sinuum Rectorum, ejusque partes spectantibus; determinantur. N.

 Nempe

Nempe (retentis ſymbolis ut prius ;)

N. Ungulæ $\alpha\tau\kappa$, aciem habentis $\tau\alpha$, Mag. $\frac{1}{8}R^2P$; Momentum

Fig. 169. 170. reſp. $\tau\alpha$, $\frac{4}{9}R^4$; diſt. à $\tau\alpha$, $\frac{32R^2}{9P}$; à $T\tau$, vel $A\alpha$, $\frac{1}{4}P$; Momentum reſpectu $T\tau$, vel $A\alpha$, $\frac{1}{32}R^2P^2$.

N. Aciemque habentis $T\tau$, vel $A\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{2}R^2P$; Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{32}R^2P^2$; Diſtantia Centri

O. gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{16}P$: Momentum reſpectu Aciei ſuæ, $\frac{1}{4}R^2P^2 - 4R^4$; reſpectu extremi oppoſiti, $4R^4$; Diſtantia Centri gravitatis ab acie ſua, $\frac{1}{2}P - \frac{8R^2}{P}$; ab oppoſito extremo, $\frac{8R^2}{P}$.

N. Ungulæ $\alpha\delta\kappa$, aciem habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{16}R^2P$; Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{9}R^4$; Diſtantia Centri gra-

P. vitatis à $\tau\alpha$, $\frac{32R^2}{9P}$: Momentum reſpectu $\delta\kappa$, $\frac{1}{128}R^2P^2 - \frac{1}{8}R^4$; reſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{128}R^2P^2 + \frac{1}{8}R^4$; Diſtantia Centri gravitatis à $\delta\kappa$, $\frac{1}{8}P - \frac{2R^2}{P}$; ab $A\alpha$, $\frac{1}{8}P + \frac{2R^2}{P}$.

O. Aciemque habentis $\delta\kappa$; magnitudo, $\frac{1}{4}PR^2 - R^3$; Momentum reſpectu $A\alpha$, $2R^4 - \frac{1}{4}R^3P$; reſpectu $\delta\kappa$, $\frac{1}{16}R^2P^2 - 2R^4$; Diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$,

P. $\frac{8R^2 - RP}{P - 4R}$; à $\delta\kappa$, $\frac{P^2 - 32R^2}{4P - 16R}$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{128}R^2P^2 - \frac{1}{8}R^4$; Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{32}P + \frac{1}{8}R = \frac{P^2 - 16R^2}{32P - 128R}$.

O. Aciemque habentis $A\alpha$; magnitudo, R^3; momentum reſpectu $\delta\kappa$, $2R^4 - \frac{1}{4}R^3P$; reſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{2}R^3P - 2R^4$; Diſtantia Centri gravitatis à $\delta\kappa$, $2R - \frac{1}{4}P$; ab $A\alpha$,

P. $\frac{1}{2}P - 2R$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{128}R^2P^2$

+

$+\frac{1}{8}R^4$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}R + \frac{p^2}{128R}$. Fig. 169, 170.

Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$, aciem habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{9}v^2R^2 + \frac{1}{9}s^2vR$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{4v^2R + 4s^2v}{9eR + 9sv}$: Momentum respectu $\beta\upsilon$, $\frac{1}{8}efR^2$; respectu $A\alpha$, $\frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 + \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{4}asvR = \frac{1}{8}e^2R^2 + \frac{1}{4}asvR$; Distantia Centri gravitatis à $\beta\upsilon$, $\frac{efR}{2eR + 2sv}$; ab $A\alpha$, $\frac{e^2R + 2asv}{2eR + 2sv}$. N. P.

Aciemque habentis $\beta\upsilon$; Magnitudo, eR^2; Momentum respectu $A\alpha$, $2vR^3 - asR^2$; respectu $\beta\upsilon$, $a^2R^2 - 2vR^3$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{2vR - as}{e}$; à $\beta\upsilon$, $\frac{a^2 - 2vR}{e}$: Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}efR^2$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}f$. O. P.

Aciemque habentis $A\alpha$; Magnitudo, $-eR^2 + avR$; Momentum respectu $\beta\upsilon$, $2vR^3 - asR^2$; respectu $A\alpha$, $-a^2R^2 + 2asR^2 + a^2vR - 2vR^3$; Distantia Centri gravitatis à $\beta\upsilon$, $\frac{2vR^2 - asR}{-eR + av}$; ab $A\alpha$, $a - \frac{2vR^2 - asR}{-eR + av}$: Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}e^2R^2 + \frac{1}{4}asvR$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{e^2R + 2asv}{-8eR + 8av}$. O. P.

Adeoque in expositis Ungulis, tum quæ figuram Sinuum Versorum, tum quæ figuram Sinuum Rectorum, earumque partes spectant; determinavimus tum Magnitudines & Momenta, tum & ipsa gravitatis Centra. Q.

Quæque de Ungulis dicta sunt, ad solida conversione (perfectâ vel imperfectâ) descripta, facile transferentur.

Quod-

Fig. 169, 170. Quodque in expositis factum est, ad alias portiones facile ampliabitur.

R. Quæque de Ungulis, Solidisque conversione factis, ex his figuris oriundis traduntur; ad ea quæ ex Protractis Contractisve figuris similiter oriuntur facile accommodantur.

Et quæ de Solidis figuram Sinuum rectorum unius quadrantis traduntur; eadem ad Solida figuram Chordarum semicirculi similiter respicientia, transferentur.

A. DIstributis, (ut ad propositiones præcedentes,) tum Semicirculo A D α, in Sectores seu Triangula; tum Figurâ Sinuum Versorum A τ α, in Quadrilinea seu Parallelogramma, Sectoribus illis seu Triangulis correspondentia: Intelligatur, utrique insistere, Semiquadrantalis Ungula, aciem habens τ α.

Quarum quidem Ungularum, ea quæ vel toti semicirculo, vel ipsius sectori ut B α A, insistit; componi intelligatur ex infinitis numero Ungulis seu Pyramidulis, minutis illis Triangulis (ut α B, seu Y α P, &c) incumbentibus: quarum communis vertex sit α punctum; Basesque super Triangulorum illorum basibus (ut Y B, &c.) erectæ altitudines habeant ipsis V α respectivis æquales.

Quæque Trilineo sive toti, sive ipsius Portioni, ut b β α A, (quæ Sectori B α A respondet) insistit; ex totidem Ungulis, quæ respectivis Parallelogrammis, β b, seu y δ ξ p, &c. incumbunt; acies habentibus in τ α rectâ continuè jacentes, altitudines vero super ipsis y b p parallelogrammorum basibus (pro semiquadrantalis ungulæ ratione) ipsis V α (respective) earundem à τ α distantiis æquales. Quæ quidem Ungulæ, sunt Cunei, seu Prismata basibus triangularibus (ipsis δ y, ξ p insistentibus) interjecta.

Sunt autem hæc Minuta Prismata, (utpote Semiquadrantales Ungulæ, parallelogrammorum quibus incumbunt, momentis respectu τ α, æquales, seu Parallelepipedorum dimidia;) Pyramidularum illarum (respectivis Triangulis incumbentium, horumque momentis respectivis æqualium,) tum singula singulorum, tum omnia omnium, Sesquialtera, (per 9 C. prop 17.) seu ut . ad 2. (& quidem Pyramis illa, est ad Parallelepipedum super eadem base æque altum, ut 1 ad 3; Cuneus vero, ut 1 ad 2: Estque $\frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{3}$, ut 3 ad 2.)

Cunei

Cunei vero seu Prismatis cujusque, Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$ (intellige, perpendiculare planum super $\tau\alpha$ erectum,) utpote eadem quæ est basium Triangularium quibus interjacet (per prop 5. hujus;) est ad distantiam inde Centri gravitatis Pyramidis correspondentis (æque altæ) ut $\frac{2}{3}$ ad $\frac{3}{4}$, (per prop. 6. hujus) Hoc est, ut 8 ad 9. Fig. 169, 170.

Ergo; (propter $\frac{3}{2}\times\frac{8}{9}=\frac{4}{3}$) Momentum Ungulæ seu Prismatis Parallelogrammo, ut βb, incumbentis; ad momentum correspondentis Ungulæ seu Pyramidis incumbentis Triangulo, ut αB; (respectu ejusdem $\tau\alpha$;) est ut 4 ad 3, seu Sesquitertium. Et sicubique.

Est itaque, illius quæ ex Prismatis componitur, Ungulæ, sive toti A$\tau\alpha$ Trilineo, sive ipsius Portioni, ut b$\beta\alpha$A vel b$\beta\delta$d, vel b$\beta\tau$, &c. insistentis momentum; ad illius, quæ ex Pyramidulis componitur, Ungulæ, sive toti Semicirculo, sive ipsius correspondenti sectori, BαA, vel BαD, vel segmento αBα, insistentis momentum; ut 4 ad 3, seu Sesquitertium.

Est autem toti Semicirculo insistentis Ungulæ, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$; $\frac{5}{16}R^3P$; (per § T. prop. 16) Adeoque Trilineo A$\tau\alpha$ insistentis Ungulæ, (aciem habentis $\tau\alpha$,) momentum respectu $\tau\alpha$, (utpote istius Sesquitertium) $\frac{5}{12}R^3P$. Et (propter magnitudinem $\frac{3}{8}R^2P$, per § C. prop. 17.) Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{10}{9}R$: Adeoque, à TA, $\frac{8}{9}R$; ejusque momentum respectu TA, $\frac{1}{3}R^3P$. B.

Eademque momenta ex Ungulæ toti Parallelogrammo AT$\tau\alpha$ insistentis momentis subducta, exhibent (mutatis mutandis) momenta Ungulæ aciem habentis TA; Nempe momentum Ungulæ totius Parallelogrammi AT$\tau\alpha$ (propter $A\alpha=2R$, & $\tau\alpha$ vel $TA=\frac{1}{2}P$) aciem habentis $\tau\alpha$; respectu aciei suæ, est $\frac{1}{2}A\alpha q\times\frac{2}{3}A\alpha\times\tau\alpha=\frac{4}{3}R^3P$: Unde subductum momentum Ungulæ Trilinei A$\tau\alpha$, respectu $\tau\alpha$; relinquit momentum Ungulæ Trilinei AτT, ungulam habentis $\tau\alpha$, respectu $\tau\alpha$; hoc est Ungulæ Trilinei A$\tau\alpha$ (ipsi AτT simili & æqualis, inverso situ) aciem habentis TA, respectu ipsius TA, $\frac{11}{12}R^3P$; adeoque (propter magnitudine $\frac{5}{8}R^2P$, per § C. prop. 17.) Distantia Centri gravitatis ab acie sua $\frac{22}{15}R$; atque ab extremo opposito $\frac{8}{15}R$; &, respectu hujus, momentum, $\frac{1}{3}R^3P$.

Item; Ungulæ Sectoris BαA, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$ (per § W. prop. 16.) est $\frac{5}{8}aR^3+\frac{11}{8}sR^3-\frac{3}{8}svR^2-\frac{1}{12}s^3R$ $=\frac{5}{8}fR^3+\frac{3}{8}sbR^2-\frac{1}{12}s^3R$, Ergo Ungulæ quadrilinei correspondentis b$\beta\alpha$A, respectu $\tau\alpha$, momentum (utpote istius Sesquitertium) $\frac{5}{6}fR^3+\frac{1}{2}sbR^2-\frac{1}{9}s^3R=\frac{5}{6}fR^3+\frac{1}{2}sbR^2-\frac{1}{9}sbvR$ C.

=

Fig. 169, 170. $= \frac{5}{6}aR^3 + \frac{11}{6}sR^3 - \frac{1}{2}svR^2 - \frac{1}{9}s^3R$: Centrique gravitatis distantia a $\tau\alpha$ (propter magnitudinem $\frac{3}{4}aR^2 + \frac{5}{4}sR^2 - \frac{1}{4}svR = \frac{3}{4}fR^2 + \frac{1}{4}shR$, per § D. prop. 17.) $\frac{30fR^2 + 18shR - 4s^3}{27fR + 9sh} = \frac{10}{9}R + \frac{8shR - 4s^3}{27fR + 9sh} = \frac{10}{9}R + \frac{8shR - 4shv}{27fR + 9sh} = \frac{10}{9}R + \frac{4sh^2}{27fR + 9sh}$; Adeoque, à TA, $\frac{8}{9}R - \frac{4sh^2}{27fR + 9sh}$; ejusque, respectu TA, momentum, $\frac{2}{3}fR^3 + \frac{2}{9}shR^2 - \frac{1}{9}sh^2R = \frac{2}{3}fR^3 + \frac{1}{9}s^3R$.

Idemque $\frac{2}{3}fR^3 + \frac{1}{9}s^3R$, est momentum Ungulæ eidem $b\beta\alpha A$ insistentis; aciem habentis TA, respectu $\tau\alpha$, (propter altitudines & distantias ubique reciprocatas;) & (propter magnitudinem $\frac{5}{4}fR^2 - \frac{1}{4}shR$, per § D. prop. 17.) Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{24fR^2 + 4s^3}{45fR - 9sh} = \frac{8}{15}R + \frac{24shR + 20s^3}{225fR - 45sh}$; & à TA, $\frac{66fR^2 - 18shR - 4s^3}{45fR - 9sh} = \frac{22}{15}R - \frac{24shR + 20s^3}{225fR - 45sh}$: Ejusque respectu TA, momentum, $\frac{11}{6}fR^3 - \frac{1}{2}shR^2 - \frac{1}{9}s^3R$.

D. Est autem, Semiquadrantalis Ungulæ toti $A\alpha\beta K$ quadrilineo insistentis aciem habentis $\tau\alpha$, (propter $A\alpha = 2R$, & $AK = \alpha\beta = a$,) momentum respectu $\tau\alpha$, (aut etiam, aciem habentis TA, momentum respectu TA,) $\frac{8}{3}aR^3$. Unde, si dematur momentum Ungulæ quadrilinei $b\beta\alpha A$, modo inventum, $\frac{5}{6}fR^3 + \frac{1}{2}shR^2 - \frac{1}{9}s^3R = \frac{5}{6}aR^3 + \frac{11}{6}sR^3 - \frac{1}{2}svR^2 - \frac{1}{9}s^3R$; relinquitur momentum, respectu $\tau\alpha$, Ungulæ insistentis Trilineo reliquo AbK, aciem habentis $\tau\alpha$, $\frac{11}{6}aR^3 - \frac{11}{6}sR^3 + \frac{1}{2}svR^2 + \frac{1}{9}s^3R = \frac{11}{6}eR^3 + \frac{1}{2}svR^2 + \frac{1}{9}s^3R$. Adeoque (propter magnitudinem, $\frac{5}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR$, per § E. prop. 17.) Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{66eR^2 + 18svR + 4s^3}{45eR + 9sv} = \frac{22}{15}R + \frac{24svR + 20s^3}{225eR + 45sv}$; atque à TA, $\frac{8}{15}R - \frac{24svR + 20s^3}{225eR + 45sv}$. Ideoque, ejusdem AbK Ungulæ aciem habentis $\tau\alpha$, momentum resp. TA, $\frac{2}{3}eR^3 - \frac{1}{9}s^3R$.

Idemque $\frac{2}{3}eR^3 - \frac{1}{9}s^3R$, est momentum Ungulæ eidem AbK insistentis, aciem habentis TA, respectu $\tau\alpha$; (propter altitudines & distantias ubique reciprocatas:) Adeoque (propter magnitudinem $\frac{3}{4}eR^2 - \frac{1}{4}svR$, per § E. prop. 17.) Centri gravitatis à $\tau\alpha$ distantia, $\frac{24eR^2 - 4s^3}{27eR - 9sv} = \frac{8}{9}R + \frac{8svR - 4s^3}{27eR - 9sv} = \frac{8}{9}R + \frac{8svR - 4svh}{27eR - 9sv} = \frac{8}{9}R +$

$\frac{4sv^2}{27eR - 9sv}$; Atque, à T A, $\frac{10}{9}R - \frac{4sv^2}{27eR - 9sv} =$ Fig. 169, 170.
$\frac{30eR^2 - 18svR + 4s^3}{27eR - 9sv}$; Ideoque ejuſdem, reſpectu T A, momentum $\frac{5}{6}eR^3 - \frac{1}{2}svR^2 + \frac{1}{9}s^3R$.

Similiter oſtendetur; Semiquadrantalis Ungulæ Trilineo $b\beta\tau$, aciem habentis T A, momentum reſpectu aciei ſuæ T A, $\frac{11}{6}\alpha R^3 - \frac{11}{6}sR^3 + \frac{1}{2}shR^2 + \frac{1}{9}s^3R$; & reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}\alpha R^3 - \frac{2}{3}sR^3 - \frac{1}{9}s^3R$: Centriq; gravitatis diſtantiam à TA eſſe $\frac{22}{15}R + \frac{24shR + 20s^3}{225\alpha R - 225sR + 45sh}$; atque à $\tau\alpha$, $\frac{8}{15}R - \frac{24shR + 20s^3}{225\alpha R - 225sR + 45sh}$.

Aciemque habentis $\tau\alpha$, momentum reſpectu T A, $\frac{2}{3}\alpha R^3 - \frac{2}{3}sR^3 - \frac{1}{9}s^3R$; & reſpectu $\tau\alpha$, aciei ſuæ, $\frac{5}{6}\alpha R^3 - \frac{5}{6}sR^3 - \frac{1}{2}shR^2 + \frac{1}{9}s^3R$: Centrique gravitatis diſtantiam à T A, $\frac{8}{9}R + \frac{4sh^2}{27\alpha R - 27sR - 9sh}$: &, à $\tau\alpha$, $\frac{10}{9}R - \frac{4sh^2}{27\alpha R - 27sR - 9sh}$. Nam, eodem plano modo rectæ $\tau\alpha$ adjacet Trilineum $b\beta\tau$, atque (huic ſimile & æquale) Trilineum b K A rectæ A T: adeoque idem valet a, h, in illo, atque a, v, in hoc.

Deinde (per prop. 11. hujus § F.) ſi ex Ungulæ quadrilinei $b\beta\alpha$A, aciem habentis $\tau\alpha$, momento reſpectu $\tau\alpha$, auferatur Ungulæ Parallelogrammi $b\beta\alpha$B, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum reſpectu $\tau\alpha$; relinquitur Ungula ſegmento b B A inſiſtentis aciem habentis $\tau\alpha$, momentum reſpectu $\tau\alpha$. E.

Illa autem Parallelogrammi $b\beta\alpha$B Ungula, aciem habentis $\tau\alpha$, eſt Priſma, oppoſitarum baſium triangularium, rectis βb, αB inſiſtentium: Cujus itaque Centri gravitatis diſtantia à $\tau\alpha$ (quippe eadem quæ baſium triangularium, per prop. 5. hujus,) eſt $\frac{2}{3}\alpha V = \frac{2}{3}h$; adeoque à T A, $2R - \frac{2}{3}h$: Quæ, ductæ in magnitudinem $\frac{1}{2}ah^2$ (per § F. prop. 17.) exhibent ejuſdem momentum reſpectu aciei ſuæ $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}ah^3 = \frac{8}{3}aR^3 - 4avR^2 + 2av^2R - \frac{1}{3}av^3 = \frac{8}{3}aR^3 - 2as^2R - \frac{1}{3}av^3 = \frac{8}{3}aR^3 - \frac{4}{3}avR^2 - \frac{4}{3}as^2R + \frac{1}{3}as^2v$: Et reſpectu T A, $ah^2R - \frac{1}{3}ah^3$. (Quod etiam erit momentum, reſpectu $\tau\alpha$, aciem habentis T A.)

Illud itaque (Ungulæ $b\beta\alpha$B, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum reſpectu $\tau\alpha$,) ex Momento Ungulæ quadrilinei $b\beta\alpha$A, aciem item habentis $\tau\alpha$, reſpectu $\tau\alpha$, (nempe $\frac{5}{6}fR^3 + \frac{1}{2}shR^2 - \frac{1}{9}s^3R = \frac{5}{6}aR^3$ +

Fig. 169, 170. $+\frac{11}{6}sR^3-\frac{1}{2}svR^2-\frac{1}{9}s^3R$, per § C.) subductum: relinquit $-\frac{11}{6}aR^3+\frac{11}{6}sR^3+\frac{4}{3}avR^2-\frac{1}{2}svR^2+\frac{4}{3}as^2R-\frac{1}{9}s^3R-\frac{1}{3}as^2v=\frac{5}{6}fR^3+\frac{1}{2}shR^2-\frac{1}{9}s^3R-\frac{1}{3}ah^3$, momentum Ungulæ Trilinei bBA, aciem habentis $\tau\alpha$, respectu $\tau\alpha$; ejusque (propter magnitudinem, $-\frac{5}{4}aR^2+\frac{5}{4}sR^2+avR-\frac{1}{4}svR+\frac{1}{2}as^2=\frac{3}{4}fR^2+\frac{1}{4}shR-\frac{1}{2}ah^2$ per § F. prop. 17.) Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, erit

$$\frac{-66eR^3+48avR^2-18svR^2+48as^2R-4s^3R-12as^2v}{-45eR^2+36avR-9svR+18as^2}=\frac{20fR^3+18shR^2-4s^3R-12ah^3}{27fR^2+9shR-18ah^2};$$

à TA, $\frac{24fR^3-36ah^2R+4s^3R+12ah^3}{27fR^2+9shR-18ah^2}$; à bB, $\frac{30fR^3+18shR^2-4s^3R-12ah^3}{27fR^2+9shR-18ah^2}$

$$-h=v-\frac{24fR^3-36ah^2R+4s^3R+12ah^3}{27fR^2+9shR-18ah^2}=\frac{24eR^3+3avR^2+27svR^2-24as^2R+5s^3R+6as^2v}{-45aR^2+45sR^2+36avR-9svR+18as^2}$$

: Adeoque ejusdem respectu TA momentum, $\frac{2}{3}fR^3-ah^2R+\frac{1}{9}s^3R+\frac{1}{3}ah^3=-\frac{2}{3}eR^3+\frac{2}{3}avR^2-\frac{4}{3}as^2R+\frac{1}{9}s^3R+\frac{1}{3}as^2v$; & respectu bB, $\frac{5}{6}fR^3-\frac{3}{4}ahR^2-\frac{1}{4}shR^2-\frac{1}{9}s^3R-\frac{1}{4}sh^2R+\frac{1}{6}ah^3=\frac{2}{3}eR^3+\frac{1}{12}avR^2+\frac{3}{4}svR^2-\frac{2}{3}as^2R+\frac{5}{36}s^3R+\frac{1}{6}as^2v$.

Atque ex illo porro momento Ungulæ ipsi bBA insistentis, aciem habentis $\tau\alpha$, respectu ipsius $\tau\alpha$; si subducatur Prismatis eidem bBA insistentis, altitudinem habentis $V\alpha=h$, momentum respectu ipsius $\tau\alpha$; hoc est, ipsius bBA, respectu ejusdem $\tau\alpha$, momentum in $h=R-v$, ductum; hoc est (per § F. prop. 17.) $-\frac{5}{4}eR^2+avR-\frac{1}{4}svR+\frac{1}{2}as^2$ in $h=2R-v$; hoc est, $-\frac{5}{4}ehR^2+avhR-\frac{1}{4}svhR+\frac{1}{2}as^2h=-\frac{5}{2}eR^3+\frac{5}{4}evR^2+2as^2R-\frac{1}{4}s^3R-\frac{1}{2}as^2v$: Relinquitur Ungulæ eidem bBA insistentis, aciem habentis bB momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}aR^3-\frac{2}{3}sR^3+\frac{1}{12}avR^2+\frac{3}{4}svR^2-\frac{2}{3}as^2R+\frac{5}{36}s^3R+\frac{1}{6}as^2v$. Adeoque (propter mag. $\frac{3}{4}eR^2+\frac{3}{4}svR-\frac{1}{2}as^2$, per § F. pr. 17) Dist. Cen. grav. à $\tau\alpha$, $\frac{24eR^3+3avR^2+27svR^2-24as^2R+5s^3R+6as^2v}{27eR^2+27svR-18as^2}$

& à TA, $\frac{30eR^3-3avR^2+27svR^2-12as^2R-5s^3R-6as^2v}{27eR^2+27svR-18as^2}$;

atque à bB, $\frac{-30eR^3+30avR^2+12as^2R-22s^3R-12as^2v}{27eR^2+27svR-18as^2}$: Ejusque momentum respectu TA, $\frac{5}{6}eR^3-\frac{1}{12}avR^2+\frac{3}{4}svR^2-\frac{1}{3}as^2R-\frac{5}{36}s^3R-\frac{1}{6}as^2v$: Et respectu bB, $-\frac{5}{6}eR^3+\frac{5}{6}avR^2+\frac{1}{3}as^2R-\frac{11}{18}s^3R-\frac{1}{3}as^2v$.

Idemque

Idemque $\frac{5}{6}eR^3 - \frac{1}{12}avR^2 + \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{5}{36}s^3R - \frac{1}{6}as^2v$, est Fig. 169,
momentum respectu b B, Ungulæ eidem b B A insistentis aciem ha- 170.
bentis T A; (propter altitudines & distantias ubique reciprocatas:) Adeoque (propter magnitudinem, $-\frac{3}{4}eR^2 + avR + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2$, per § F. prop. 17.) Distantia Centri gravitatis à b B, $\frac{30eR^3 - 3avR^2 + 27svR^2 - 12as^2R - 5s^3R - 6as^2v}{-27eR^2 + 36avR + 9svR - 18as^2}$: Adeoque à T A, $\frac{-30eR^3 + 48avR^2 + 18svR^2 - 24as^2R - 4s^3R - 12as^2v}{-27eR^2 + 36avR + 9svR - 18as^2}$; à $\tau\alpha$, $\frac{-24eR^3 + 24avR^2 - 12as^2R + 4s^3R + 12as^2v}{-27eR^2 + 36avR + 9svR - 18as^2}$: Ejusque respectu T A momentum, $-\frac{5}{6}eR^3 + \frac{4}{3}avR^2 + \frac{1}{2}svR^2 - \frac{2}{3}as^2R - \frac{1}{9}s^3R - \frac{1}{3}as^2v$; & respectu $\tau\alpha$, $-\frac{2}{3}eR^3 + \frac{2}{3}avR^2 - \frac{1}{3}as^2R + \frac{1}{9}s^3R + \frac{1}{3}as^2v$.

Illud autem, ejusdem Ungulæ, trilineo b B A insistentis aciem habentis T A, momentum, respectu ipsius T A, ex momento Ungulæ quadrilineo b $\beta\alpha$ A insistentis aciem item habentis T A, respectu ejusdem T A, subductum; hoc est, ex $\frac{11}{6}fR^3 - \frac{1}{2}shR^2 - \frac{1}{9}s^3R = \frac{11}{6}aR^3 + \frac{5}{6}sR^3 + \frac{1}{2}svR^2 - \frac{1}{9}s^3R$, (per § C.) relinquit Ungulæ parallelogrammo b $\beta\alpha$ B insistentis, aciem habentis T A, momentum respectu T A, $\frac{8}{3}aR^3 - \frac{4}{3}avR^2 + \frac{2}{3}as^2R + \frac{1}{3}as^2v = \frac{8}{3}aR^3 - \frac{1}{3}av^3$.

Idem habetur, si ex Ungulæ parallelogrammi K $\beta\alpha$ A, aciem habentis T A, momento respectu T A, $\frac{8}{3}aR^3$; subducatur parallelogrammi K b B A, (aciem item habentis T A,) momentum respectu T A, $\frac{1}{3}av^3$: Quippe quod restat, est Ungulæ Parallelogrammi b $\beta\alpha$ B, aciem habentis T A, momentum respectu T A, $\frac{8}{3}aR^3 - \frac{1}{3}av^3$; ut prius.

Adeoque, (propter magnitudinem, $2ahR - \frac{1}{2}ah^2 = 2aR^2 - \frac{1}{2}av^2$, per § F. prop. 17.) Distantia Centri gravitatis à T A, $\frac{16R^3 - 2v^3}{12R^2 - 3v^2}$; atq; à $\tau\alpha$, $2R - \frac{16R^3 - 2v^3}{12R^2 - 3v^2} = \frac{8R^3 - 6v^2R + 2v^3}{12R^2 - 3v^2}$; ejusque respectu $\tau\alpha$ momentum, $\frac{4}{3}aR^3 - av^2R + \frac{1}{3}av^3 = \frac{4}{3}aR^3 - \frac{2}{3}avR^2 + \frac{1}{3}as^2R - \frac{1}{3}as^2v = ah^2R - \frac{1}{3}ah^3$; ut etiam prius ostensum est.

Aut etiam ejusdem Ungulæ Parallelogrammo b $\beta\alpha$ B insistentis, aciem habentis T A, magnitudo, momenta, & Centrum gravitatis, per se facile determinantur; est utique solidum ex Prismate, eique super imposito Cuneo constante; eidem b $\beta\alpha$ B super eminentibus: Quorum utriusque separatim magnitudines, & Centra gravitatis, adeoque & momenta, facile determinantur; adeoque & aggregati ex utroque conflati.

F. Fig. 169, 170. Accedimus ad Ungularum Trilinei $A\tau\alpha$, ejusque partium, aciem habentium $\tau\alpha$ aut huic parallelam, momenta respectu $A\alpha$: Aciemque habentium $A\alpha$, momenta respectu $\tau\alpha$ aut parallelarum huic; quæque hinc dependent.

Si *Trilineo restituto*, seu *Figuræ Sinuum versorum*, $A\tau\alpha$, insistat Semiquadrantalis Ungula aciem habens $\tau\alpha$: Quæ rectis $b\beta$, planum complentibus, insistunt plana Ungulam complentia, sunt (propter angulum Semiquadrantalem) Triangula Rectangula Isoscelia; ipsarum $b\beta$, seu b, semiquadrata: Adeoque ipsa Ungula, (sive quæ toti $A\tau\alpha$, sive quæ ipsius portioni $Ab\beta\alpha$ insistit,) aggregatum omnium $\frac{1}{2}b^2$, eo spectantium. Eorumque ab $A\alpha$ distantia est bB $(=a)$ respective: Adeoque simul omnium, hoc est ipsius Ungulæ momentum, respectu $A\alpha$, est Aggregatum omnium $\frac{1}{2}ab^2$, eo spectantium, sumptis a arithmetice proportionalibus: Hoc est, Arcuum arithmetice proportionalium in Semiquadrata Sinuum versorum, arcuum ad Semicirculum residuorum.

Quæ autem rectis bB, æqualiter ab invicem distantibus, planum similiter complentibus, insistunt plana Ungulam complentia, totidem erunt parallelogramma, quorum bases $bB = a$, & altitudines (propter angulum Semiquadrantalem) æquales eorum à $\tau\alpha$ distantiis respectivis, hoc est ipsis $V\alpha = b$ respective: Adeoque Ungula, sive quæ toti $A\tau\alpha$ Trilineo insistit, sive quæ ipsius Portioni AbB; est Aggregatum omnium ab, eo spectantium; sumptis AB, seu AV, hoc est v, arithmetice proportionalibus. Eorumque ab $A\alpha$ distantia, $\frac{1}{2}bB = \frac{1}{2}a$ respective, (per prop. 2. hujus.) Adeoque simul omnium, hoc est ipsius Ungulæ, momentum respectu $A\alpha$; Aggregatum omnium $\frac{1}{2}a^2b$: Hoc est, Semiquadratorum arcuum sinibus versis arithmetice proportionalibus respondentium, in sinus versus arcuum ad semicirculum residuorum.

Hujusque Ungulæ aciem habentis $\tau\alpha$ momentum respectu $A\alpha$, idem est atque Ungulæ aciem habentis $A\alpha$ momentum respectu $\tau\alpha$; propter magnitudines & distantias reciprocatas. Ut ad § H. prop. 16. ostensum est.

Nempe, si eidem Trilineo Restituto $A\tau\alpha$, Ungula insistat semiquadrantalis, aciem habens $A\alpha$: Quæ rectis bB insistunt plana, Ungulam complentia, erunt (propter angulum ad $A\alpha$ semiquadrantalem) ipsarum bB Semiquadrata, seu $\frac{1}{2}a^2$; adeoque ipsa Ungula, sive quæ toti $A\tau\alpha$, sive quæ illius Segmento AbB, insistit, est aggregatum omnium $\frac{1}{2}a^2$; sumptis AB, seu AV, hoc est v, arithmetice

pro-

proportionalibus. Eorumque à $\tau\alpha$ diſtantia eſt $V\alpha = h$: Adeoque ſimul omnium, hoc eſt ipſius Ungulæ, momentum reſpectu $\tau\alpha$; eſt aggregatum omnium $\frac{1}{2}a^2h$; ſumptis v arithmetice proportionalibus. Atque eadem ratione, ejuſdem reſpectu T A, erit Aggregatum omnium $\frac{1}{2}a^2v$; propter ſingulorum planorum à T A diſtantiam, v reſpective. Fig. 169. 170.

Planaque ipſis b β inſiſtentia, eandem Ungulam complentia, erunt rectangula b $\beta\alpha$, hoc eſt ah reſpective; eorumque à $\tau\alpha$ diſtantia, $\frac{1}{2}h$: Adeoque Ungulæ aciem habentis A α, ſive quæ toti A $\tau\alpha$, ſive quæ ipſius portioni A b $\beta\alpha$ inſiſtit, eſt aggregatum omnium $\frac{1}{2}ah^2$, eo ſpectantium; ſumptis a arithmetice proportionalibus.

Sed & eadem Ungula, ſi tertiis adhuc planis ſecetur, baſi parallelis, æqualiter ab invicem diſtantibus: Erunt ea plana, (propter obliquam Ungulæ ſectionem, adeoque plana ſuperiora continue magis magiſque ab A α deficientia,) æqualia ipſis A $\alpha\tau$, x $\xi\tau$, & ſic deinceps, uſque ad ultimum f $\varphi\tau$, ſeu ipſum τ punctum; ſi Ungulam totius A $\tau\alpha$ trilinei ſpectemus: Vel, ſi portionem A b $\beta\alpha$ ſpectemus; ipſis A $\alpha\beta$ b, x $\xi\beta$ b, & ſic deinceps uſque ad ipſam β b. Hoc eſt, in totius Trilinei Ungula; æqualia totidem A $\alpha\tau$ planis (hoc eſt, priſmati ipſi A $\tau\alpha$ inſiſtenti altitudinem habenti $\tau\alpha$,) demptis omnibus A x $\xi\alpha$, A z $\zeta\alpha$, &c. (hoc eſt, demptâ contrariâ Ungulâ ſuper eodem plano aciem habente T τ.) Et ſimiliter, in portione A b $\beta\alpha$; æqualia totidem A b $\beta\alpha$ planis (ſeu priſmati A b $\beta\alpha$ altitudinem habenti ipſi $\alpha\beta$ æqualem) demptis omnibus A x $\xi\alpha$, A z $\zeta\alpha$, &c. eo ſpectantibus; hoc eſt, demptâ Ungulâ contraria A b $\beta\alpha$ aciem habente b β. (Ut ſupra dictum eſt, § G. prop. 17.) Ergo, Ungulæ momentum, (ſive totius Trilinei, ſive portionis A b $\beta\alpha$,) reſpectu $\tau\alpha$; eſt Aggregatum Momenti planorum horum omnium. Quæ calculo facile exquirentur.

Eſt utique ejuſmodi plani A b $\beta\alpha$ cujuſvis momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}fR^2 + \frac{1}{4}shR = \frac{3}{4}aR^2 + \frac{3}{4}sR^2 + \frac{1}{4}shR$; per § D. prop. 17. Adeoque priſmatis huic inſiſtentis, altitudinem habentis $\beta\alpha = a$; $\frac{3}{4}a^2R^2 + \frac{3}{4}asR^2 + \frac{1}{4}ashR$.

Item, *Omnia* $\frac{3}{4}aR^2 + \frac{3}{4}sR^2 + \frac{1}{4}hR$, uſque ad maximum $\frac{3}{4}AR^2 + \frac{3}{4}SR^2 + \frac{1}{4}SHR$, (ſumptis a arithmetice proportionalibus,) eſt ungulæ A b $\beta\alpha$, aciem habentis b β, momentum reſpectu $\tau\alpha$; (adeoque & aciem habentis $\tau\alpha$, momentum reſpectu b β; propter altitudines & diſtantias reciprocatas, ut ſæpius ante dictum eſt)

Sunt autem *omnes a*, (arcus arithmetice proportionales,) uſque ad A maximum, $\frac{1}{2}A^2$; per prop. 1. hujus. Ergo *Omn.* $\frac{3}{4}aR^2 := \frac{3}{8}A^2R^2$. Item,

Fig. 169, 170. Item, *Omnes S*, (eorundem arcuum Sinus recti,) sunt ipsum $\alpha\beta v$ Trilineum, hoc est VR, per § O, Q, prop. 17.) Ergo, *Omn.* $\frac{1}{4}sR^2 := \frac{1}{4}VR^3$.

Et *Omnia sh*, sunt $VR^2 + \frac{1}{2}S^2R$, (ut ostensum est ad § A. prop. 18.) Ergo, *Omn.* $\frac{1}{4}shR := \frac{1}{4}VR^3 + \frac{1}{8}S^2R^2$.

Ergo, *Omn.* $\frac{3}{4}aR^2 + \frac{3}{4}sR^2 + \frac{1}{4}shR$: (hoc est, Ungulæ A b $\beta\alpha$ aciem habentis b β, momentum respectu $\tau\alpha$; vel aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu b β;) sunt $\frac{3}{8}A^2R^2 + VR^3 + \frac{1}{8}S^2R^2$; seu (restitutis minuscularum valoribus) $\frac{3}{8}a^2R^2 + vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2$.

(Quod quidem, ex Prismatis respectu $\tau\alpha$ momento, modò reperto, $\frac{3}{4}a^2R^2 + \frac{3}{4}asR^2 + \frac{1}{4}ashR = \frac{3}{4}a^2R^2 + \frac{5}{4}asR^2 - \frac{1}{4}asvR$, subductum; relinquit Ungulæ A b $\beta\alpha$, aciem habentis A α, momentum respectu $\tau\alpha$, (vel etiam aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu A α;) Nempe, $\frac{3}{8}a^2R^2 + \frac{5}{4}asR^2 - \frac{1}{4}asvR - vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$. Sed & idem (sine ope Prismatis) mox alio modo obtinebitur.)

Illud autem $\frac{3}{8}a^2R^2 + vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2$ Momentum, per Ungulæ A b $\beta\alpha$, aciem habentis b β, magnitudinem $\frac{1}{2}a^2R + vR^2$ (per § H. prop. 17.) divisum; exhibet ejusdem Distantiam Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}R + \frac{2vR + s^2}{8vR + 4a^2}R$; adeoque à T A, $\frac{5}{4}R - \frac{2vR + s^2}{8vR + 4a^2}R$; ejusque respectu T A momentum, $\frac{5}{8}a^2R^2 + vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$. Quod ipsum est aciem habentis T A, momentum respectu b β.

Idemque $\frac{3}{8}a^2R^2 + vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2$ momentum, per Ungulæ A b $\beta\alpha$, aciem habentis $\tau\alpha$, magnitudinem, $\frac{3}{4}fR^2 + \frac{1}{4}shR = \frac{3}{4}aR^2 + \frac{5}{4}sR^2 - \frac{1}{4}svR$, (§ D. prop. 17. inventam,) divisum; exhibet hujus Distantiam Centri gravitatis à b β, $\frac{1}{2}a + \frac{8vR^2 - 5asR + s^2R + asv}{6aR + 10sR - 2sv}$; adeoque ab A α, $\frac{1}{2}a - \frac{8vR^2 - 5asR + s^2R + asv}{6aR + 10sR - 2sv}$; ejusque respectu A α, momentum, $\frac{3}{8}a^2R^2 + \frac{5}{4}asR^2 - \frac{1}{4}asvR - vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$: Idemque est momentum Ungulæ A b $\beta\alpha$, aciem habentis A α, respectu $\tau\alpha$; priùs exhibitum.

Quod quidem $\frac{3}{8}a^2R^2 + \frac{5}{4}asR^2 - \frac{1}{4}asvR - vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$ momentum, per Ungulæ A b $\beta\alpha$, aciem habentis A α, magnitudinem $\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2$ (per § H. prop. 17.) divisum; exhibet hujus Distantiam Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}R - \frac{2vR^2 + s^2R + 2asv - 4asR}{4a^2 + 8as - 8vR}$; adeoque à T A, $\frac{5}{4}R + \frac{2vR^2 + s^2R + 2asv - 4asR}{4a^2 + 8as - 8vR}$; ejusque, respectu

T A,

T A, Momentum $\frac{5}{8}a^2k^2 + \frac{3}{4}asR^2 - vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{4}asvR$: aciemve habentis T A, momentum respectu A α. Fig. 169, 170.

Atque hoc demum $\frac{5}{8}a^2R^2 + \frac{3}{4}asR^2 - vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{4}asvR$ momentum, per Ungulæ A b β α, aciem habentis T A, magnitudinem $\frac{5}{4}fR^2 - \frac{1}{4}shR = \frac{5}{4}aR^2 + \frac{3}{4}sR^2 + \frac{1}{4}svR$ (§ D. prop. 17. inventam,) divisum; exhibet hujus Distantiam Centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{2}a - \frac{8vR^2 - s^2R - 3asR - asv}{10aR + 6sR + 2sv}$; adeoque à b β; $\frac{1}{2}a + \frac{8vR^2 - s^2R - 3asR - asv}{10aR + 6sR + 2sv}$: Ejusque, respectu b β, momentum, $\frac{5}{8}a^2R^2 + vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$; idem quod prius repertum est momentum aciem habentis b β, respectu T A.

Adeoque; Si totius A τ α Ungulas spectemus; (propter $a = \frac{1}{2}P$, $v = 2R$, $s = 0$;) Erit Ungulæ A τ α, aciem habentis T τ, magnitudo, $\frac{1}{8}RP^2 + 2R^3$: Momentum respectu τ α, $\frac{3}{32}R^2P^2 + 2R^4$; respectu T A, $\frac{5}{32}R^2P^2 + 2R^4$: Distantia Centri gravitatis à τ α, $\frac{3}{4}R + \frac{4R^3}{P^2 + 16R^2}$; à T A, $\frac{5}{4}R - \frac{4R^3}{P^2 + 16R^2}$. G.

Aciemque habentis A α; Magnitudo, $\frac{1}{8}RP^2 - 2R^3$; Momentum respectu τ α, $\frac{3}{32}R^2P^2 - 2R^4$; respectu T A, $\frac{5}{32}R^2P^2 - 2R^4$: Distantia Centri gravitatis à τ α, $\frac{3}{4}R - \frac{4R^3}{P^2 - 16R^2}$; à T A, $\frac{5}{4}R + \frac{4R^3}{P^2 - 16R^2}$.

Aciemque habentis τ α; Magnitudo, $\frac{3}{8}R^2P$; momentum respectu T τ; $\frac{3}{32}R^2P^2 + 2R^4$; respectu A α, $\frac{3}{32}R^2P^2 - 2R^4$: Distantia Centri gravitatis à T τ, $\frac{1}{4}P + \frac{16R^2}{3P}$; ab A α, $\frac{1}{4}P - \frac{16R^2}{3P}$.

Aciemque habentis T A; Mgnitudo $\frac{5}{8}R^2P$: Momentum respectu T τ, $\frac{5}{32}R^2P^2 + 2R^4$; respectu A α, $\frac{5}{32}R^2P^2 - 2R^4$: Distantia Centri gravitatis à T τ, $\frac{1}{4}P + \frac{16R^2}{5P}$; ab A α, $\frac{1}{4}P - \frac{16R^2}{5P}$.

Eademque per se poterant, eodem modo, calculo exquiri; quo Ungularum portionis A b β α momenta prius exquirebantur; quæque inde dependent.

Ex

H. Fig. 169. 170. Ex his item sic traditis, Ungularum portionis $b\beta\tau$ momenta (quæque hinc dependent) haberi poterunt. Nempe; ex Momentis Ungularum totius Trilinei $A\tau\alpha$, subductis respectivis Ungularum portionis $Ab\beta\alpha$, restant Momenta respectiva Ungularum $b\beta\tau$; sive respectu ipsarum $\tau\alpha$, TA, sive respectu ipsarum $A\alpha$, $T\tau$, &c. Atque ex cognitis aliquibus reliqua facile derivantur.

Sed & eadem possunt per se eodem modo exquiri, quo in ipsis $Ab\beta\alpha$ factum est.

Est utique (per § E. prop. 17.) plani cujusque $b\beta\tau$, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}\alpha R^2 - \frac{3}{4}sR^2 - \frac{1}{4}shR$; Adeoque *Omnia*, $\frac{3}{4}\alpha R^2 - \frac{3}{4}sR^2 - \frac{1}{4}shR$; (hoc est, momenta planorum omnium Ungulam $b\beta\tau$, aciem habentem $b\beta$, complentium;) sunt istius Ungulæ momentum.

Sed *Omnes* α, (arcus arithmetice proportionales, ab ipso α, usque ad maximum αb seu $\tau\beta = \alpha$,) sunt, (per prop. 1. hujus,) $\frac{1}{2}\alpha^2$. Ergo, *Omn.* $\frac{3}{4}\alpha R^2 := \frac{3}{8}\alpha^2 R^2$.

Item *Omnes* s, (eorundem arcuum Sinus recti,) sunt ipsum Trilineum $\tau\beta\upsilon = hR$ per § Q. prop. 17.) Ergo *Omn.* $\frac{3}{4}sR^2 := -\frac{3}{4}hR^3$.

Item *Omnia* sh (ad $b\beta\tau$ spectantia) $\frac{1}{2}h^2R$, (per § A. prop. 18.) Ergo *Omn.* $-\frac{1}{4}shR := -\frac{1}{8}h^2R^2$.

Ergo; *Omn.* $\frac{3}{4}\alpha R^2 - \frac{3}{4}sR^2 - \frac{1}{4}shR^2$: (hoc est, Ungulæ $b\beta\tau$, aciem habentis $b\beta$, momentum respectu $\tau\alpha$; seu aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $b\beta$;) $\frac{3}{8}\alpha^2R^2 - \frac{3}{4}hR^3 - \frac{1}{8}h^2R^2 = \frac{3}{8}\alpha^2R^2 - hR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2$; seu (propter $\alpha = \frac{1}{2}P - a$, & $h = 2R - v$,) $\frac{3}{32}R^2P^2 - \frac{3}{8}aR^2P + \frac{3}{8}a^2R^2 - 2R^4 + vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2$.

Quod quidem, $\frac{3}{8}\alpha^2R^2 - \frac{3}{4}hR^3 - \frac{1}{8}h^2R^2$ momentum, per Ungulæ $b\beta\tau$, aciem habentis $b\beta$, magnitudinem $\frac{1}{2}\alpha^2R - hR^2$ (per § H. prop. 17.) divisum; exhibet ejusdem centri gravitatis distantiam à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}R - \dfrac{h^2R}{4\alpha^2 - 8hR}$; adeoque à TA, $\frac{5}{4}R + \dfrac{h^2R}{4\alpha^2 - 8hR}$; ejusque respectu TA momentum, $\frac{5}{8}\alpha^2R^2 - \frac{5}{4}hR^3 + \frac{1}{8}h^2R^2$.

Idemque $\frac{3}{8}\alpha^2R^2 - \frac{3}{4}hR^3 - \frac{1}{8}h^2R^2$ momentum, per Ungulæ $b\beta\tau$, aciem habentis $\tau\alpha$, magnitudinem $\frac{3}{4}\alpha R^2 - \frac{3}{4}sR^2 - \frac{1}{4}shR$ (per § E. prop. 17.) divisum; exhibet hujus distantiam centri gravitatis à $b\beta$, $\frac{1}{2}\alpha + \dfrac{3\alpha sR + \alpha sh - 6hR^2 - h^2R}{6\alpha R - 6sR - 2sh}$; à $T\tau$, $\frac{1}{2}\alpha - \dfrac{3\alpha sR + \alpha sh - 6hR^2 - h^2R}{6\alpha R - 6sR - 2sh}$.

Adeoque

Adeoque ejuſdem Ungulæ b $\beta\tau$ (aciem habentis $\tau\alpha$) momentum Fig. 169,
reſpectu T τ, $\frac{3}{8}\alpha^2R^2 - \frac{3}{4}\alpha sR^2 - \frac{1}{4}\alpha shR + \frac{3}{4}hR^3 + \frac{1}{8}h^2R^2$. Idemque 170.
eſt, aciem habentis T τ, momentum reſpectu $\tau\alpha$.

Quod quidem $\frac{3}{8}\alpha^2R^2 - \frac{3}{4}\alpha sR^2 - \frac{1}{4}\alpha shR + \frac{3}{4}hR^3 + \frac{1}{8}h^2R^2$ momentum, per Ungulæ b $\beta\tau$, aciem habentis T τ, magnitudinem, $\frac{1}{2}\alpha^2R - \alpha sR + hR^2$ (per § H. prop. 17.) diviſum; exhibet ejuſdem Diſtantiam Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}R + \frac{h^2R - 2\alpha sh}{4\alpha^2 - 8\alpha s + 8hR}$; adeoque à T A, $\frac{5}{4}R - \frac{h^2R - 2\alpha sh}{4\alpha^2 - 8\alpha s + 8hR}$; ejuſque, reſpectu T A, momentum, $\frac{5}{8}\alpha^2R^2 - \frac{5}{4}\alpha sR^2 + \frac{5}{4}hR^3 + \frac{1}{4}\alpha shR - \frac{1}{8}h^2R^2$. Idemque eſt, aciem habentis T A, momentum reſpectu T τ.

Atque hoc demum $\frac{5}{8}\alpha^2R^2 - \frac{5}{4}\alpha sR^2 + \frac{5}{4}hR^3 + \frac{1}{4}\alpha shR - \frac{1}{8}h^2R^2$ momentum, per Ungulæ b $\beta\tau$ aciem habentis T A, magnitudinem, $\frac{5}{4}\alpha R^2 - \frac{5}{4}sR^2 + \frac{1}{4}shR$ (per § E. prop. 17.) diviſum; exhibet ejuſdem diſtantiam Centri gravitatis à T τ, $\frac{1}{2}\alpha + \frac{10hR^2 - h^2R - 5\alpha sR + \alpha sh}{10\alpha R - 10sR + 2sh}$; adeoque, à b β, $\frac{1}{2}\alpha - \frac{10hR^2 - h^2R - 5\alpha sR + \alpha sh}{10\alpha R - 10sR + 2sh}$; ejuſque, reſpectu b β, momentum, $\frac{5}{8}\alpha^2R^2 - \frac{5}{4}hR^3 + \frac{1}{8}h^2R^2$; idem quod momentum, aciem habentis b β, momentum reſpectu T A, modo repertum.

Quæque de Ungulis b $\beta\tau$ hic dicta ſunt; eadem omnino Ungulis A b K conveniunt; ſubſtitutis a pro α, v pro h, T A pro $\tau\alpha$, A α pro T τ, & vice verſâ. Quippe A b K portio, ſimiliter adjacet rectis T A, A α, atque τ b β rectis $\alpha\tau$, τ T.

Solidorum autem, ſive ſemiſolidorum, reſpondentium magnitudo, ad magnitudinem Ungulæ correſpondentis; eorúmque momentum ad momentum hujus, (reſp. ejuſdem plani ad converſionis axem, aciémque Ungulæ, recti;) eſt ut P vel $\frac{1}{2}P$, ad R. Diſtantiaque à planis ad converſionis axem, aciemve Ungulæ, rectis, utrobique eadem reſpective.

Deinde: Si ex Ungularum B b $\beta\alpha$ momentis, § F traditis; auferantur reſpectiva Ungularum B b $\beta\alpha$ momenta: habentur reſpectiva Momenta Ungularum A b B: & quæ hinc dependent. I.

Eſt autem Ungulæ A b $\beta\alpha$, aciem habentis b β vel A α, (propter magnitudinem $\frac{1}{2}a^2h$, per § I. prop. 17. Centrique gravitatis, in media longitudine poſiti, per prop. 2. diſtantiam à $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}h$; adeoque à T A, $2R - \frac{1}{2}h$:) Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}a^2h^2$; reſpectu T A, $a^2hR - \frac{1}{4}a^2h^2$: Illudque $\frac{1}{4}a^2h^2$, (ob diſtantias & altitudines reciprocatas,) momentum etiam, aciem habentis $\tau\alpha$, reſpectu b β vel

Fig. 169, 170. A α: Et $a^2hR - \frac{1}{4}a^2h^2$, momentum etiam aciem habentis T A, respectu b β vel A α. Estque utriusque horum, Distantia Centri gravitatis à b β vel A α, $\frac{1}{2}a$, per prop. 2. Magnitudo autem, aciem habentis $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}ah^2$; aciemque habentis T A, $2ahR - \frac{1}{2}ah^2$; (per § F. prop. 17.) Adeoq; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}h$; à T A, $R - \frac{2}{3}h$.

Si, itaque ex Ungulæ A b $\beta\alpha$, aciem habentis T A, momento respectu b β; aciemve habentis b β, momento respectu T A; $\frac{5}{8}a^2R^2 + vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$, (per § F.) Auferatur respectivum Ungulæ B b $\beta\alpha$ momentum, modò exhibitum, $a^2hR - \frac{1}{4}a^2h^2 = a^2R^2 - \frac{1}{2}a^2vR + \frac{1}{4}a^2s^2$: Relinquetur, Ungulæ A b B, aciem habentis T A, momentum respectu b β; aciemve habentis b β, momentum respectu T A; $-\frac{3}{8}a^2R^2 + vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{2}a^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2$. Quod per Ungulæ A b B, aciem habentis T A, magnitudinem, $-\frac{3}{4}aR^2 + \frac{3}{4}sR^2 + avR + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2$, (per § F. prop. 17.) divisum; exhibet ejusdem distantiam Centri grav. à b β, $\frac{1}{2}a + \frac{8vR^3 - s^2R^2 - 3asR^2 - asvR}{-6eR^2 + 8avR + 2svR - 4as^2}$; ab A α, $\frac{1}{2}a - \frac{8vR^3 - s^2R^2 - 3asR^2 - asvR}{-6eR^2 + 8avR + 2svR - 4as^2}$.

Item; si ex Ungulæ A b $\beta\alpha$, aciem habentis T A, momento respectu A α; aciemve habentis A α, momento respectu T A; $\frac{5}{8}a^2R^2 + \frac{3}{4}asR^2 - vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{4}asvR$, (per § F.) Auferatur correspondens momentum Ungulæ B b $\beta\alpha$, modò exhibitum, $a^2hR - \frac{1}{4}a^2h^2 = a^2R^2 - \frac{1}{2}a^2vR + \frac{1}{4}a^2s^2$: Relinquetur, Ungulæ A b B, aciem habentis T A, momentum respectu A α; aciemve habentis A α, momentum respectu T A; $-\frac{3}{8}a^2R^2 + \frac{3}{4}asR^2 - vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{4}asvR + \frac{1}{2}a^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2$.

Item; Si ex Ungulæ A b $\beta\alpha$, aciem habentis $\tau\alpha$, momento respectu b β; aciemve habentis b β, momento respectu $\tau\alpha$; $\frac{3}{8}a^2R^2 + vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2$, (per § F.) Auferatur correspondens momentum Ungulæ B b $\beta\alpha$, modò exhibitum, $\frac{1}{4}a^2h^2 = a^2R^2 - a^2vR + \frac{1}{4}a^2v^2 = a^2R^2 - \frac{1}{2}a^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2$: Relinquitur, Ungulæ A b B, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu b β; aciemve habentis b β, momentum respectu $\tau\alpha$, $-\frac{5}{8}a^2R^2 + vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{2}a^2vR + \frac{1}{4}a^2s^2$. Quod, per Ungulæ A b B, aciem habentis $\tau\alpha$, magnitudinem $\frac{3}{4}fR^2 + \frac{1}{4}shR - \frac{1}{2}ah^2 = -\frac{5}{4}aR^2 + \frac{5}{4}sR^2 + avR - \frac{1}{4}svR + \frac{1}{2}as^2$, (per § F. prop. 17.) divisum; exhibet ejusdem Distantiam Centri gravitatis à b β, $\frac{1}{2}a + \frac{8vR^3 - 5asR^2 + s^2R^2 + asvR}{-10eR^2 + 8avR - 2svR + 4as^2}$; ab A α, $\frac{1}{2}a -$

8vR³

$\frac{8vR^3 - 5asR^2 + s^2R^2 + asvR}{-10eR^2 + 8avR - 2svR + 4as^2}$. Idemque, per Ungulæ A b B, Fig. 169, 170. aciem habentis b β, magnitudinem, $-\frac{1}{2}a^2R + vR^2 + \frac{1}{2}a^2v$, (per § I. prop. 17.) diviſum; exhibet hujus Ungulæ diſtantiam Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{5}{4}R - \frac{2vR^3 + a^2vR - s^2R^2 - 2a^2s^2}{-4a^2R + 8vR^2 + 4a^2v}$; à T A, $\frac{3}{4}R + \frac{2vR^3 + a^2vR - s^2R^2 - 2a^2s^2}{-4a^2R + 8vR^2 + 4a^2v}$: Adeoque, à b B, $\frac{5}{4}R - h$ $(= v - \frac{3}{4}R) - \frac{2vR^3 + a^2vR - s^2R^2 - 2a^2s^2}{-4a^2R + 8vR^2 + 4a^2v}$. Et propterea ejuſdem, reſpectu b B, momentum, $\frac{3}{8}a^2R^2 + vR^3 - \frac{7}{8}s^2R^2 - \frac{1}{4}a^2s^2$. Idemque eſt Ungulæ A b B, aciem habentis b B, momentum reſpectu b β. Quod itaque per hujus magnitudinem, $\frac{3}{4}aR^2 - \frac{3}{4}sR^2 + \frac{3}{4}svR - \frac{1}{2}as^2$ (per § F. prop. 17.) diviſum; exhibet hujus Ungulæ A b B, aciem habentis b B, diſtantiam Centri gravitatis à b β, $\frac{1}{2}a + \frac{8vR^3 - 7s^2R^2 + 3asR^2 - 3asvR}{6eR^2 + 6svR - 4as^2}$; adeoque ab A α, $\frac{1}{2}a - \frac{8vR^3 - 7s^2R^2 + 3asR^2 - 3asvR}{6eR^2 + 6svR - 4as^2}$; ejuſque reſpectu A α momentum, $\frac{3}{8}a^2R^2 - vR^3 + \frac{7}{8}s^2R^2 - \frac{3}{4}asR^2 + \frac{3}{4}asvR - \frac{1}{4}a^2s^2$: quod etiam (propter altitudines & diſtantias reciprocatas) eſt Ungulæ A b B, aciem habentis A α, momentum reſpectu b B.

Item; ſi ex Ungulæ A b $\beta\alpha$, aciem habentis $\tau\alpha$, momento reſp. A α, aciemve habentis A α, momento reſpectu $\tau\alpha$; $\frac{3}{8}a^2R^2 + \frac{5}{4}asR^2 - \frac{1}{4}asvR - vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$ (per § F.) Auferatur correſpondens Ungulæ Bb $\beta\alpha$ momentum, modò exhibitum, $\frac{1}{4}a^2b^2 = a^2R^2 - \frac{1}{2}a^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2$: Relinquetur, Ungulæ A b B, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum reſpectu A α; aciemve habentis A α, momentum reſpectu $\tau\alpha$, $-\frac{5}{8}a^2R^2 + \frac{5}{4}asR^2 - vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2 - \frac{1}{4}asvR + \frac{1}{2}a^2vR + \frac{1}{4}a^2s^2$. Quod, per Ungulæ A b B, aciem habentis A α, magnitudinem, $-\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2 + \frac{1}{2}a^2v$, (per § I. prop. 17.) diviſum; exhibet hujus diſt. Cen. grav. à $\tau\alpha$, $\frac{5}{4}R - \frac{2asvR + a^2vR - 2vR^3 + s^2R^2 - 2a^2s^2}{-4a^2R + 8asR - 8vR^2 + 4a^2v}$; à T A, $\frac{3}{4}R + \frac{2asvR + a^2vR - 2vR^3 + s^2R^2 - 2a^2s^2}{-4a^2R + 8asR - 8vR^2 + 4a^2v}$: Adeoque à b B, $\frac{5}{4}R - h\ (= v - \frac{3}{4}R) - \frac{2asvR + a^2vR - 2vR^3 + s^2R^2 - 2a^2s^2}{-4a^2R + 8asR - 8vR^2 + 4a^2v}$. Et propterea, ejuſdem reſpectu b B momentum, $\frac{3}{8}a^2R^2 - vR^3$

Fig. 169, 170. $+\frac{7}{8}s^2R^2 - \frac{3}{4}asK^2 + \frac{3}{4}asvR - \frac{1}{4}a^2s^2$; ut prius. Atque hinc etiam, regrediendo, reliqua quæ Ungulam A b B aciem habentem b B ſpectantia modò tradebantur, ſimiliter derivari poterunt.

Sed & hæc omnia Momenta Ungularum A b B, (quæque hinc dependent,) ſimiliter haberi poſſent, ex Ungulis A K b B, ſubductis reſpectivis Ungulis A b K. Habentur autem Ungularum A K b B momenta, reliquaque inde dependentia, eodem plano modo quo Ungularum B b $\beta\alpha$: ſubſtitutis ubique v pro b, & T A pro $\tau\alpha$, & vice verſâ. Quæ monuiſſe ſufficiat.

K. Reſtat, ut Ungularum acies habentium A α, (aut huic parallelas,) momenta reſpectu acierum ſuarum (rectarumque his parallelarum) oſtendam; & Centrorum gravitatis inde diſtantias.

Si intelligatur portioni A b $\beta\alpha$ ſemiquadrantalis Ungula inſiſtere aciem habens b β; quæ hanc complent plana ipſi A $\tau\alpha$ parallela, ſunt ipſa A x $\xi\alpha$, A z $\zeta\alpha$, &c. uſque ad A b $\beta\alpha$; ſeu Omnia A b $\beta\alpha$, eo ſpectantia, ut ad § F. oſtenſum eſt: Adeoque, & eorum omnium, reſpectu A α, momenta; hoc eſt, (per § H. prop. 17.) *Omnia*, $\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2$, eo ſpectantia, (ſumptis a arithmetice proportionalibus,) eſt ipſum Ungulæ A b $\beta\alpha$ aciem habentis b β, momentum reſpectu A α; aut etiam (propter altitudines & diſtantias reciprocatas) aciem habentis A α, momentum reſpectu b β.

Sunt autem *Omnia* a^2, (ſumptis a arithmetice proportionalibus,) $\frac{1}{3}a^3$; per prop. 1. hujus. Adeoque *Omn.* $\frac{1}{2}a^2R: = \frac{1}{6}a^3R$.

Et *Omnia* as, (hoc eſt, momentum reſpectu A α omnium βv, trilineum $\alpha\beta v$ complentium;) ſunt, $-eR^2 + avR$, per § Q. prop. 17. Adeoque, *Omn.* $asR: = -eR^3 + avR^2$.

Item, *Omnes* v, (ſumptis a arithmetice proportionalibus,) hoc eſt, ipſum A b K trilineum, eſt eR; per § B. prop. 17. Adeoque *Omn.* $-vR^2: = -eR^3$.

Ergo, *Omn.* $\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2$; hoc eſt, momentum Ungulæ A b $\beta\alpha$ aciem habentis b β reſpectu A α; aciemve habentis A α momentum reſpectu b β; eſt, $-2eR^3 + avR^2 + \frac{1}{6}a^3R$.

Hoc itaque momentum, per Ungulæ A b $\beta\alpha$, aciem habentis b β, magnitudinem $\frac{1}{2}a^2R + vR^2$, (per § H. prop. 17.) diviſum; exhibet ejuſdem Diſtantiam Centri gravitatis ab A α, $a - \frac{12eR^2 + 2a^3}{3a^2 + 6vR}$: Adeoque, à b β, $\frac{12eR^2 + 2a^3}{3a^2 + 6vR}$: Et propterea; ejuſdem, reſpectu b β, momentum, $2eR^3 + \frac{1}{3}a^3R$.

Idemque,

Idemque $-2eR^3+avR^2+\frac{1}{6}a^3R$ momentum, divisum per Ungulæ A b β α aciem habentis A α, magnitudinem $\frac{1}{2}a^2R+asR-vR^2$ (per § H. prop. 17.) exhibet hujus Distantiam Centri gravitatis à b β, $\frac{-12eR^2+6avR+a^3}{3a^2+6as-6vR}$; Adeoq; ab A α, $\frac{12eR^2-12avR+2a^3+6a^2s}{3a^2+6as-6vR}$; & propterea, ejusdem, respectu A α, momentum (seu *Omnia* a^2h eò spectantia,) $2eR^3-2avR^2+\frac{1}{3}a^3R+a^2sR$. Fig. 169. 170.

Et quidem si totius A τ α Ungulam spectemus; erit (propter $a=\frac{1}{2}P$, $v=2R$, & $s=0$;) aciem habentis T τ, momentum respectu A α; aciemve habentis A α momentum respectu T τ, $\frac{1}{48}RP^3$. Adeoque (propter illius magnitudinem $\frac{1}{8}RP^2+2R^3$; hujusque $\frac{1}{8}RP^2-2R^3$, per § G. prop. 17.) erit, Aciem habentis T τ Distantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{P^3}{6P^2+96R^2}=\frac{1}{6}P-\frac{8R^2P}{3P^2+48R^2}$; à T τ, $\frac{1}{3}P+\frac{8R^2P}{3P^2+48R^2}$; ejusque, respectu T τ, momentum, $\frac{1}{24}RP^3+R^3P$.

Aciemque habentis A α, Distantia Centri gravitatis à T τ, $\frac{P^3}{6P^2-96R^2}=\frac{1}{6}P+\frac{8R^2P}{3P^2-48R^2}$; ab A α, $\frac{1}{3}P-\frac{8R^2P}{3P^2-48R^2}$; hujusque, respectu A α, momentum, $\frac{1}{24}RP^3-R^3P$.

Si autem ex Ungularum parallelogrammi A K β α momentis, auferantur respectiva momenta Ungularum A b β α; habentur Ungularum A b K momenta respectiva, L.

Est autem Ungulæ A K β α aciem habentis K β, vel A α, (utpote Prismatis, oppositarum basium triangularium,) magnitudo, $\frac{1}{2}a^2\times 2R=a^2R$; ejusque ab acie sua Distantia Centri gravitatis, $\frac{2}{3}a$; à termino opposito, $\frac{1}{3}a$. Adeoque Aciem habentis b β momentum respectu A α, vel aciem habentis A α momentum respectu b β, est $\frac{1}{3}a^3R$: Aciemque habentis b β momentum respectu ipsius b β; aciemve habentis A α, respectu ipsius A α, momentum $\frac{2}{3}a^3R$.

Ex his itaque; si subducantur respectiva Ungularum A b β α momenta, § K tradita: Relinquitur Ungularum A b K momenta respectiva.

Nempe; Ungulæ A b K aciem habentis β b K; momentum respectu A α; aciemve habentis A α, momentum respectu β b K; $2eR^3-avR^2+\frac{1}{6}a^3R$. Adeoque (propter illius magnitudinem, $\frac{1}{2}a^2R-vR^2$; hujus $\frac{1}{2}a^2R-asR+vR^2$; per § H. prop. 17.) Aciem habentis

Fig. 169, 170. habentis β b K, Distantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{12eR^2-6avR+a^3}{3a^2-6vR}$; adeoque à β b K, $\frac{-12eR^2+2a^3}{3a^2-6vR}$: Aciemque habentis A α, Distantia Centri gravitatis à β b K, $\frac{12eR^2-6avR+a^3}{3a^2-6as+6vR}$; adeoque ab A α, $\frac{-12eR^2+12avR+2a^3-6a^2s}{3a^2-6as+6vR}$.

Aciemque habentis β b K, momentum respectu β b K, $-2eR^3+\frac{1}{3}a^3R$; Aciemque habentis A α momentum respectu A α, $-2eR^3+2avR^2+\frac{1}{3}a^3R-a^2sR$.

Quæque de Ungulis A b K dicta sunt; eadem Ungulis τ b β, accommodantur, substitutis α pro a, b pro v; & T τ, pro A α. Quippe similiter adjacet rectis τ T, τ α, ipsum τ b β; atque ipsum A b K, rectis A α, A T.

Nempe, Ungulæ τ b β, aciem habentis β b K, momentum respectu T τ; aciemve habentis T τ, momentum respectu β b K; $2\alpha R^3-2sR^3-\alpha bR^2+\frac{1}{6}\alpha^3R$: Aciem habentis β b K momentum respectu β b K, $-2\alpha R^3+2sR^3+\frac{1}{3}\alpha^3R$: Aciemque habentis T τ, respectu ipsius T τ, $-2\alpha R^3+2sR^3+2\alpha bR^2+\frac{1}{3}\alpha^3R-\alpha^2sR$: Et Aciem habentis β b K, Distantia Centri gravitatis à T τ, $\frac{12\alpha R^2-12sR^2-6\alpha bR+\alpha^3}{3\alpha^2-6bR}$; à β b K $\frac{-12\alpha R^2+12sR^2+2\alpha^3}{3\alpha^2-6bR}$; Aciemq; habentis T τ, dist. Cen. grav. à β b K, $\frac{12\alpha R^2-12sR^2-6\alpha bR+\alpha^3}{3\alpha^2-6\alpha s+6bR}$; à T τ, $\frac{-12\alpha R^2+12sR^2+12\alpha bR+2\alpha^3-6\alpha^2s}{3\alpha^2-6\alpha s+6bR}$.

Sed & earundem Ungularum τ b β momenta, haberi poterunt; ex Ungularum totius A τ α momentis, subductis momentis respectivis Ungularum A b β α: Restabunt utique momenta respectiva Ungularum τ b β; quæ & ad alias, ut opus fuerit, rectas facile transferentur.

M. Ex momentis autem Ungularum A b β α; si subducantur respectiva Ungularum b β α B momenta; habentur momenta respectiva Ungularum A b B.

Est autem Ungulæ b β α B, aciem habentis b β, vel B α, (utpote Prismatis,) magnitudo, $\frac{1}{2}a^2\times b=\frac{1}{2}a^2b$; ejusque ab acie sua Distantia Centri gravitatis, $\frac{2}{3}a$; à termino opposito, $\frac{1}{3}a$. Adeoque aciem ha-

habentis b β momentum respectu A α; aciemve habentis A α, momentum respectu b β; $\frac{1}{6}a^3h = \frac{1}{3}a^3R - \frac{1}{6}a^3v$. Aciemque habentis b β, momentum respectu b β; aciemve habentis A α, respectu A α, momentum, $\frac{1}{3}a^3h = \frac{2}{3}a^3R - \frac{1}{3}a^3v$. Fig. 169, 170.

Hæc itaque, ex respectivis momentis Ungularum A b β α (§ K. inventis,) subducta; relinquunt respectiva Ungularum A b B momenta.

Nempe; Ungulæ A b B, aciem habentis b K, momentum respectu A α, aciemve habentis A α, momentum resp. bK; $-2eR^3 + avR^2 - \frac{1}{6}a^3R + \frac{1}{6}a^3v$: Aciemque habentis b K momentum respectu b K, $2eR^3 - \frac{1}{3}a^3R + \frac{1}{3}a^3v$: Aciemque habentis A α, momentum respectu A α, (hoc est, *Omn* $\frac{1}{3}a^3$, eo spectantia,) $2eR^3 - 2avR^2 - \frac{1}{3}a^3R + a^2sR + \frac{1}{3}a^3v$.

Adeoque, (propter illius magnitudinem, $-\frac{1}{2}a^2R + vR^2 + \frac{1}{2}a^2v$; hujusque $-\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2 + \frac{1}{2}a^2v$; per § I. prop. 17.) Ungulæ A b B, aciem habentis b β, Distantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{-12eR^3 + 6avR^2 - a^3R + a^3v}{-3a^2R + 6vR^2 + 3a^2v}$; à b β, $\frac{12eR^3 - 2a^3R + 2a^3v}{-3a^2R + 6vR^2 + 3a^2v}$: Aciemq; habentis A α. Dist. Cen. grav. à b K, $\frac{-12eR^3 + 6avR^2 - a^3R + a^3v}{-3a^2R + 6asR - 6vR^2 + 3a^2v}$; ab A α, $\frac{12eR^3 - 12avR^2 - 2a^3R + 6a^2sR + 2a^3v}{-3a^2R + 6asR - 6vR^2 + 3a^2v}$.

Atque his in Figuræ Sinuum versorum A τ α, ejusve partium, Ungulis, si, expeditis: Eâdem operâ, eadem in Figuræ Sinuum Rectorum α τ κ expediuntur. Est enim (ut § M. prop. 17. ostensum est,) Figura Sinuum Rectorum Unius quadrantis α δ κ, eadem plane figura atque d D A, figuræ Sinuum versorum portio. Adeoque ex magnitudine, Momentis, Ungulisque, figuræ d D A (quæ figuræ A τ α pars est,) & partium ejusdem; facile erit figuræ α δ κ, adeoque & α τ κ, partiúmque illius, Magnitudines, Momenta, Ungulasque, quæque hinc dependent, derivare. N.

Vel etiam, sine ope figuræ A τ α, ejusve portionis d D A; possunt ipsius α τ κ, partiúmque hujus, Ungulæ, (ut § Q. prop. 17. ostensum est,) earumque momenta, facile obtineri.

Cum enim rectæ β υ, trilineum α β υ complentes, sint arcuum arithmeticè proportionalium (ipsis α β respective æqualium) sinus Recti: Quæ Ungulam α β υ aciem habentem α β seu α τ, plana complent; sunt eorundem sinuum rectorum Semiquadrata; hoc est,

Omnia,

Fig. 169. 170. *Omnia*, $\frac{1}{2}s^2$, eo ſpectantia: Quorum Semiquadratorum ſumma, ſeu ipſa $\alpha\beta\upsilon$ ungula aciem habens $\alpha\tau$, ſeu plani momentum reſpectu rectæ $\alpha\tau$, eſt $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR$, per § Q. prop. 17. Atque eorundem ſemiquadratorum $\frac{1}{2}s^2$, ſeu planorum Triangulorum momentum reſpectu ipſius $\alpha\tau$, (propter $\frac{2}{3}s$, Diſtantiam Centri gravitatis à $\tau\alpha$, per prop. 6. hujus) ſunt, *Omnia*, $\frac{1}{3}s^3$; (propter $\frac{1}{2}s^2 \times \frac{2}{3}s = \frac{1}{3}s^3$.) Aut etiam (propter $s^2 = vh$,) *Omn.* $\frac{1}{3}svh$. Hoc eſt, *Omn.* $\frac{2}{3}svR - \frac{1}{3}sv^2$: ſumptis a arithmetice proportionalibus.

Sunt autem *Omn.* s^3; (ſumptis a arithmetice proportionalibus,) idem atque *Omn.* o^2R: (per § V. prop. 13.) ſeu *Omn.* s^2R, ſumptis v arithmetice proportionalibus: Hoc eſt, Duplum momenti (reſpectu A α) ſegmenti ſemicirculi ABV fig. 169. in R ductum; (ſunt enim *Omn.* $\frac{1}{2}s^2$: ſumptis v arithmetice proportionalibus, momentum illud:) Hoc eſt, (per § R. prop. 15.) $\frac{2}{3}vR^3 - \frac{1}{3}s^2R^2 + \frac{1}{3}s^2vR = \frac{1}{3}v^2R^2 + \frac{1}{3}s^2vR$. Ergo; *Omn.* $\frac{1}{3}s^3 := \frac{2}{9}vR^3 - \frac{1}{9}s^2R^2 + \frac{1}{9}s^2vR$, ſeu $\frac{1}{9}v^2R^2 + \frac{1}{9}s^2vR$, eſt Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$ aciem habentis $\alpha\tau$, momentum reſpectu $\alpha\tau$. Adeoque (propter magnitudinem $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR$, per § Q. prop. 17.) Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, eſt $\frac{4v^2R + 4s^2v}{9eR + 9sv}$.

Vel ſic etiam; Sunt *Omn.* $\frac{1}{3}s^3 :=$ *Omn.* $\frac{1}{3}svh$; (propter BV, mediam proportionalem inter AV & Vα; hoc eſt, s, inter v & h;) ſeu (propter $h = 2R - v$,) *Omn.* $\frac{2}{3}svR - \frac{1}{3}sv^2$.

Sunt autem *Omn.* sv: (ſumptis a arithmetice proportionalibus,) $\frac{1}{2}v^2R = vR^2 - \frac{1}{2}s^2R$ (per § I. prop. 18.) Adeoque *Omn.* $\frac{2}{3}svR := \frac{1}{3}v^2R^2 = \frac{2}{3}vR^3 - \frac{1}{3}s^2K^2$.

Item; *Omn.* $\frac{1}{2}sv^2 := \frac{1}{6}v^3R = \frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{1}{6}s^2vR$, (per § I. prop. 18.) Adeoque *Omn.* $-\frac{1}{3}sv^2 := -\frac{1}{9}v^3R = -\frac{4}{9}vR^3 + \frac{2}{9}s^2R^2 + \frac{1}{9}s^2vR$.

Ergo, *Omn.* $\frac{2}{3}svR - \frac{1}{3}sv^2$: (= *Omn.* $\frac{1}{3}svh$: = *Omn.* $\frac{1}{3}s^3$:) Hoc eſt, momentum Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$, aciem habentis $\alpha\tau$, reſpectu ipſius $\alpha\tau$ rectæ, eſt, $\frac{1}{3}v^2R^2 - \frac{1}{9}v^3R$, hoc eſt, $\frac{2}{9}vR^3 - \frac{1}{9}s^2R^2 + \frac{1}{9}s^2vR$. ut prius. Atque hinc Diſtantia Centri gravitatis ab $\alpha\tau$ colligitur, ut prius.

Et, ſpeciatim; Ungulæ $\alpha\delta\kappa$ aciem habentis $\alpha\tau$ momentum reſpectu ipſius $\alpha\tau$, (propter $v = s = R$, & $a = \frac{1}{4}P$,) eſt $\frac{2}{9}R^4$; ejuſque magnitudo $\frac{1}{16}R^2P$; Centrique gravitatis ab $\alpha\tau$ diſtantia, $\frac{32R^2}{9P}$.

Un-

Ungulæque totius $\alpha\tau\kappa$, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{4}{9}R^4$; (ipsius $\alpha\delta\kappa$ duplum, propter duplam magnitudinem: Fig. 169, 170.

Distantiaque Centri gravitatis à $\tau\alpha$ eadem, nempe $\frac{32R^2}{9P}$: Et quidem (per prop. 5.) in ipsa $\delta\kappa$ recta; hoc est, à $T\tau$, vel $A\alpha$, $\frac{1}{4}P$; & propterea ejusdem respectu $A\alpha$, seu $T\tau$ momentum, (propter magnitudinem $\frac{1}{8}R^2P$,) est $\frac{1}{32}R^2P^2$: Quod itidem est aciem habentis $T\tau$, vel $A\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$; propter altitudines & distantias reciprocatas. Adeoque (propter hujus magnitudinem $\frac{1}{2}R^2P$) Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{16}P$.

Similiter; Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$, aciem habentis $\beta\upsilon$, momentum respectu $A\alpha$; sunt omnium planorum $\alpha\xi o$, $\alpha\zeta\upsilon$, &c. usque ad $\alpha\beta\upsilon$, (ungulam illam complentium) momenta respectu $A\alpha$; hoc est (per § Q. prop. 17.) *Omn.* $-eR^2+avR$: seu *Omn.* $-aR^2+sR^2+avR$, eò spectantia; sumptis a arithmetice proportionalibus.

Sunt autem *Omnes* a, (arcus arithmetice proportionales, eo spectantes;) $\frac{1}{2}a^2$, (per prop. 1. hujus;) adeoque *Omn.* $-aR^2 := -\frac{1}{2}a^2R^2$.

Et *Omnes* s (eo spectantes) hoc est, ipsum $\alpha\beta\upsilon$ planum, est vR, (per § Q. prop. 17.) Adeoque *Omn.* $sR^2 := vR^3$.

Item *Omn.* av (sumptis a arithmetice proportionalibus,) sunt ipsius A b K plani, momentum respectu $A\alpha$; hoc est, $\frac{1}{2}a^2R-asR+vR^2$, (per § H. prop. 17.) Adeoque, *Omn.* $avR := \frac{1}{2}a^2R^2-asR^2+vR^3$.

Ergo; *Omn.* $-aR^2+sR^2+avR := 2vR^3-asR^2$. Quod itaque est Momentum Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$ aciem habentis $\beta\upsilon$, respectu $A\alpha$; aciemve habentis $A\alpha$, momentum respectu $\beta\upsilon$.

Quod quidem momentum, divisum per Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$ aciem habentis $\beta\upsilon$, magnitudinem eR^2 seu aR^2-sR^2, (per § Q. prop. 17.) exhibet ejusdem Distantiam Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{2vR-as}{a-s=e}$; adeoque à $\beta\upsilon$, $a-\frac{2vR-as}{a-s}=\frac{a^2-2vR}{a-s=e}$; ejusque propterea respectu $\beta\upsilon$ momentum, $a^2R^2-2vR^3$.

Idemque $2vR^3-asR^2$, per Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$ aciem habentis $A\alpha$, magnitudinem $-eR^2+avR$ (per § Q. prop. 17.) divisum; exhibet ejusdem distantiam Centri gravitatis à $\beta\upsilon$, $\frac{2vR^2-asR}{-aR+sR+av}$; adeo-

Fig. 169, 170. que ab $A\alpha$, $a - \frac{2vR^2 - asR}{-aR + sR + av} = \frac{-a^2R + 2asR + a^2v - 2vR^2}{-aR + sR + av = -eR + av}$; hujusque propterea, respectu $A\alpha$, momentum, $-a^2R^2 + 2asR^2 + a^2vR - 2vR^3$.

Et, speciatim; Ungulæ $\alpha\delta\kappa$, aciem habentis $\delta\kappa$, momentum respectu $A\alpha$; aciemve habentis $A\alpha$, momentum respectu $\delta\kappa$; $2R^4 - \frac{1}{4}R^3P$: Ungulæque $\alpha\delta\kappa$ aciem habentis $\delta\kappa$, momentum respectu $\delta\kappa$, $\frac{1}{16}R^2P^2 - 2R^4$: Aciemque habentis $A\alpha$, momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{2}R^3P - 2R^4$. Centrique gravitatis, Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$, aciem habentis $\delta\kappa$, distantia ab $A\alpha$, $\frac{8R^2 - RP}{P - 4R}$; à $\delta\kappa$, $\frac{P^2 - 32R^2}{4P - 16R}$: Aciemque habentis $A\alpha$, distantia Centri gravitatis à $\delta\kappa$, $2R - \frac{1}{4}P$; ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}P - 2R$.

Ungulæ autem totius $\alpha\tau\kappa$ figuræ sinuum rectorum totius semicirculi, aciem habentis sive $A\alpha$, sive $T\tau$, (propter $a = \frac{1}{2}P$, $v = 2P$, $s = 0$,) Magnitudo, $\frac{1}{2}R^2P$: Momentum respectu aciei suæ, $\frac{1}{4}R^2P^2 - 4R^4$; respectu termini oppositi, $4R^4$: Distantiaque Centri gravitatis ab acie sua, $\frac{1}{2}P - \frac{8R^2}{P}$; ab opposito termino, $\frac{8R^2}{P}$.

P. Ungulæque $\alpha\beta\upsilon$, aciem habentis $\beta\upsilon$, momentum respectu $\tau\alpha$; idem est atque omnium $\alpha\beta\upsilon$ planorum, ipsam complentium, respectu ejusdem $\tau\alpha$: Hoc est, (per § Q. prop. 17.) *Omn.* $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR$: seu *Omn.* $\frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}svR$: eo spectantia: sumptis a arithmetice proportionalibus.

Sunt autem *Omnes* a: (arithmetice proportionales,) $= \frac{1}{2}a^2$. Adeoque *Omn.* $\frac{1}{4}aR^2$: $= \frac{1}{8}a^2R^2$.

Et *Omn.* s: (ut modo ostensum,) $= vR$. Adeoque *Omn.* $-\frac{1}{4}sR^2$: $= -\frac{1}{4}vR^3$.

Item *Omn.* sv: (per § A. prop. 18.) $= \frac{1}{2}v^2R = vR^2 - \frac{1}{2}s^2R$. Adeoque *Omn.* $\frac{1}{4}svR = \frac{1}{8}v^2R^2 = \frac{1}{4}vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$.

Ergo, *Omn.* $\frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}svR$: $= \frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{8}s^2R^2$, seu $\frac{1}{8}efR^2$. Quod itaque est momentum Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$ aciem habentis $\beta\upsilon$, respectu $\tau\alpha$; Idemque (propter distantias & altitudines reciprocatas,) etiam aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\beta\upsilon$.

Hoc itaque momentum, per Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$, aciem habentis $\beta\upsilon$ magnitudinem (modo dictam) eR^2, divisum; exhibet hujus, à $\tau\alpha$, distantiam Centri gravitatis, $\frac{1}{8}f = \frac{1}{8}a + \frac{1}{8}s$.

Idemque momentum, divisum per magnitudinem Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$, aciem habentis $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR$ (per § Q. prop. 17.) exhibet

Ungulæ

Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$ aciem habentis $\tau\alpha$, Distantiam Centri gravitatis à $\beta\upsilon$, Fig. 169, $\frac{a^2R - s^2R = efR}{2aR - 2sR + 2sv}$; adeoque ab A$\alpha$, $\frac{a^2R - 2asR + s^2R + 2asv}{2aR - 2sR + 2sv}$ 170. $= \frac{e^2R + 2asv}{2eR + 2sv}$; & propterea, ejusdem respectu Aα momentum, $\frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 + \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{4}asvR = \frac{1}{8}e^2R^2 + \frac{1}{4}asvR$: Quod ipsum (propter distantias & altitudines reciprocatas) est etiam momentum Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$ aciem habentis Aα, respectu $\tau\alpha$. Atque hoc demum per hujus magnitudinem (modo dictam) $-eR^2 + avR$, divisum; exhibet Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$, aciem habentis Aα, distantiam Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{a^2R - 2asR + s^2R + 2asv}{-8aR + 8sR + 8av} = \frac{e^2R + 2asv}{-8eR + 8av}$.

Et speciatim, Ungulæ $\alpha\delta\varkappa$, aciem habentis $\delta\varkappa$, momentum respectu $\tau\alpha$; aciemve habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\delta\varkappa$; (propter $a = \frac{1}{4}P$, & $s = v = R$,) $\frac{1}{128}R^2P^2 - \frac{1}{8}R^4$. Aciemque habentis $\tau\alpha$, momentum respectu Aα; aciemve habentis Aα, momentum respectu $\tau\alpha$; $\frac{1}{128}R^2P^2 + \frac{1}{8}R^4$. Item Aciem habentis $\delta\varkappa$, Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{32}P + \frac{1}{8}R$: Aciemque habentis A$\alpha$, Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{P^2 + 16R^2}{128R} = \frac{1}{8}R + \frac{P^2}{128R}$: Aciemque habentis $\tau\alpha$, Distantia Centri gravitatis à $\delta\varkappa$, $\frac{P^2 - 16R^2}{8P} = \frac{1}{8}P - \frac{2R^2}{P}$ ab Aα, $\frac{P^2 + 16R^2}{8P} = \frac{1}{8}P + \frac{2R^2}{P}$.

In Ungulis igitur expositis, tum quæ figuram Sinuum Versorum, tum quæ figuram Sinuum Rectorum, eorumque partes spectant; determinavimus tum Magnitudines, tum Momenta; & Centri gravitatis distantias, tum à plano per aciem perpendiculari, tum à plano ad aciem recto; atque in quo tertio per aciem plano constitutum sit, constat ex prop. 12. nempe in eo quæ Ungulæ altitudinem bisecat. Adeoque (per prop. 26. cap. præced.) ipsum in singulis gravitatis Centrum determinavimus.

Quæ autem de Ungulis traduntur, eadem & Solidis conversione factis, eorumve Semisolidis, aliisve imperfectâ conversione factis, facile accommodantur: per prop. 12, & 14. hujus. Nempe Semisolidi conversione facti, magnitudo, est ad correspondentem Ungulam Semiquadrantalem, ut $\frac{1}{2}P$ ad R: Ejusque Centri gravitatis distantia à plano quod conversionis Axi rectum sit; eadem est quæ

Fig. 169, 170. Ungulæ à Plano aciei suæ recto: Adeoque momenta illius ad respectiva momenta hujus, respectu istius plani, sunt ut ipsæ magnitudines, nempe ut $\frac{1}{2} P$ ad R: Centrique gravitatis Semisolidi distantia à conversionis axe, ad illam Ungulæ ab acie sua; ut $2 R$ ad $\frac{1}{2} P$: Semisolidique momentum respectu axis sui, ad illud Ungulæ respectu aciei suæ, (in ratione quæ ex magnitudinum & distantiarum rationibus componitur,) ut 2 ad 1. Ut in suis locis passim ostensum est.

Quæque de expositis Ungulis (sive quæ figuram Sinuum Versorum, sive quæ figuram Sinuum Rectorum spectant, eorumve partes,) dicta sunt: eadem ad alias (calculo rite adhibito) facile accommodantur.

R. Si autem pro figuris jam expositis A$\tau\alpha$, $\alpha\tau\kappa$; Protractæ Contractæve considerandæ veniant: Quoties rectæ b B in Calculum veniunt; pro a, substituenda erit alia quantitas quæ ad illam sit, ut $\tau\alpha$, ad $\frac{1}{2} P$; ut ad Propositiones præcedentes monitum est.

Quæque de solidis figuram Sinuum Rectorum Unius Quadrantis traduntur; eadem etiam ad Solida figuram Chordarum in Semicirculo spectantia transferentur; uti ad propositiones præcedentes monitum est.

PROP.

PROP. XX.

Semicyclois, eſt, correſpondentis Semicirculi Generantis, *Tripla*: Et Partes, Partium (reſpective ſumptarum,) *Triplæ*. Puta $A\tau\alpha = 3\,AD\alpha$; & $b\beta\alpha A = 3\,B\alpha A$. Et ſic ubique. A. Fig. 169. 170.

Illorum verò Momenta, ad Momenta horum, reſpectu ejuſdem $\tau\alpha$ Tangentis, ut 5 ad 2; ſeu *Dupla-ſeſquialtera*. C.

Atque hinc eadem reſpective determinantur, tum quod ad Magnitudines, tum quod ad Momenta, & Centra gravitatis, in Semicycloide; quæ ſupra in Semicirculo (prop. 15.) & in Figura Sinuum verſorum, (prop. 17.) determinantur.

Nempe (retentis Symbolis ut in propoſitionibus præcedentibus)

Semicycloidis $A\tau\alpha$; magnitudo, $\frac{3}{4}RP$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{8}R^2P$; reſpectu TA, $\frac{7}{8}R^2P$: Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{5}{6}R$; à TA, $\frac{7}{6}R$: Momentum reſpectu $A\alpha$, $\frac{3}{16}RP^2 - \frac{4}{3}R^3$; reſpectu $T\tau$, $\frac{3}{16}RP^2 + \frac{4}{3}R^3$: Diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{4}P - \frac{16R^2}{9P}$; à $T\tau$, $\frac{1}{4}P + \frac{16R^2}{9P}$. B, C.

Complementi Semicycloidis, $A\tau T$; magnitudo, $\frac{1}{4}RP$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}R^2P$; reſpectu TA, $\frac{1}{8}R^2P$; Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3}{2}R$; à TA, $\frac{1}{2}R$: Mo- B, C. H.

mentum

Fig. 169, 170. mentum respectu A α, $\frac{1}{16}RP^2 + \frac{4}{3}R^3$; respectu T τ, $\frac{1}{16}RP^2 - \frac{4}{3}R^3$; Distantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{4}P + \frac{16R^2}{3P}$; à T τ, $\frac{1}{4}P - \frac{16R^2}{3P}$.

B, D. Portionis Semicycloidis b β α A, magnitudo $\frac{3}{2}fR$: Momentum respectu τ α, $\frac{5}{4}fR^2 + \frac{5}{12}shR$; respectu T A, $\frac{7}{4}fR^2 - \frac{5}{12}shR$; Distantia Centri grav. à τ α, $\frac{5}{6}R + \frac{5sh}{18f}$; à

I. T A, $\frac{7}{6}R - \frac{5sh}{18f}$: Momentum respectu A α, $\frac{3}{4}a^2R + \frac{3}{2}asR - \frac{2}{3}vR^2 + \frac{5}{12}s^2R$; Distantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}s - \frac{4vR + 2s^2}{9a + 9s} = \frac{1}{2}f - \frac{4vR + 2s^2}{9f}$.

B. E. Segmenti Semicycloidis b β τ, Magnitudo $\frac{3}{2}\alpha R - \frac{3}{2}sR$: Momentum respectu τ α, $\frac{5}{4}\alpha R^2 - \frac{5}{4}sR^2 - \frac{5}{12}shR$; & respectu T A, $\frac{7}{4}\alpha R^2 - \frac{7}{4}sR^2 + \frac{5}{12}shR$; Distantia Centri gravitatis à τ α, $\frac{5}{6}R - \frac{5sh}{18\alpha - 18s}$; à T A, $\frac{7}{6}R +$

I. $\frac{5sh}{18\alpha - 18s}$: à T τ, $\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}s + \frac{2h^2}{9\alpha - 9s}$; Momentum resp. T τ, $\frac{3}{4}\alpha^2R - \frac{3}{2}\alpha sR + \frac{3}{4}s^2R + \frac{1}{3}h^2R$.

B, F. Trapezii b β α V; Magnitudo $ah + \frac{1}{2}sh$: Momentum respectu τ α, $\frac{1}{2}ah^2 + \frac{1}{3}sh^2$; respectu T A, $2ahR + shR - \frac{1}{2}ah^2 - \frac{1}{3}sh^2$; Distantia Centri gravitatis à τ α,

K. $\frac{3a+2s}{6a+3s}h$; à T A, $2R - \frac{3a+2s}{6a+3s}h$: Momentum respectu A α, $\frac{1}{2}fah + \frac{1}{6}s^2h$; Distantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{2fa+s^2}{6a+3s}$.

B. F. Segmenti Semicycloidis, b V A; Magnitudo, $-\frac{1}{2}eR + av + \frac{1}{2}sv$: Momentum respectu τ α, $-\frac{3}{4}eR^2 + avR + \frac{3}{4}svR + \frac{1}{2}as^2 + \frac{1}{3}s^3$; respectu T A, $-\frac{1}{4}eR^2 + avR + \frac{3}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{3}s^3$; & respectu b V, $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{2}avR + \frac{3}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{6}s^3$; Distantia Centri gravitatis à τ α, $\frac{-9eR^2 + 12avR + 3svR + 6as^2 + 4s^3}{-6eR + 12av + 6sv}$;

à

à T A, $\frac{-3eR^2+12avR+9svR-6as^2-4s^3}{-6eR+12av+6sv}$; à b V, Fig. 169, 170.
$\frac{3eR^2+6avR+9svR-6as^2-2s^3}{-6eR+12av+6sv}$: Momentum respectu K, L.
A α, $-\frac{1}{4}a^2R+\frac{1}{2}asR+\frac{1}{12}s^2R-\frac{2}{3}vR^2+\frac{1}{2}a^2v+\frac{1}{2}asv$ $+\frac{1}{6}s^2v$; Distantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{2}a-\frac{8vR^2-3asR-s^2R-3asv-2s^2v}{-6aR+6sR+12av+6sv}$.

Trilinei A b K; Magnitudo, $\frac{1}{2}eR+\frac{1}{2}sv$: Momentum respectu T A, $\frac{1}{4}eR^2+\frac{1}{4}svR-\frac{1}{6}s^3$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}eR^2$ $+\frac{3}{4}svR+\frac{1}{6}s^3$; respectu b V, $-\frac{1}{4}eR^2+\frac{1}{2}avR+\frac{1}{4}svR$ $-\frac{1}{3}s^3$: Momentum respectu A α, $\frac{2}{3}vR^2+\frac{1}{2}a^2R-\frac{1}{2}asR$ $-\frac{1}{12}s^2R+\frac{1}{2}asv+\frac{1}{3}s^2v$; Distantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{8vR^2+6a^2R-6asR-s^2R+6asv+4s^2v}{6eR+6sv}$. B, G. K.

Adeoque exhibentur tum totius Semicycloidis, tum ejusdem Partium expositarum, Magnitudines, & Momenta respectu rectarum expositarum, ipsaque Centra gravitatis. M.

Quæ autem de Momentis hic tradita sunt; ad Ungularum magnitudines, & Solidorum conversione factorum, facile transferuntur. Et planorum hic consideratorum momenta, (propter data ipsa Centra gravitatis,) respectu rectarum aliarum, quocunque situ positarum, facile haberi possunt.

Eademque omnia quæ de his expositis Cycloidis portionibus traduntur; ad alias item, variis modis abscissas, facile erit accommodare; additionibus & subductionibus, prout res postulaverit, adhibitis.

Quæque de Cycloide primaria jam traduntur; Ad Cycloides Protractas & Contractas, facile transferuntur. N.

A. Fig. 166. SI super τ α rectâ, insistens circulus (quem *Circulum Generantem*, seu *Generatorem* dicimus,) puncto sui b (quod *punctum lineans* appellabimus) rectam in τ tangens; qui super eadem recta volvi intelligatur (motu continuo & æquabili) peripheriâ suâ (continuâ ad rectam applicatione) commensurans æqualem rectam τ α τ, donec b punctum lineans, in sublime latum, (adeoque curvam suo motu describens b b,) circuitu facto, eandem τ α τ rectam, (in ejusdem altero extremo τ,) iterum contingat: (dum interim Centrum suum c, rectam c C c describat, ipsi τ α τ parallelam & æqualem:) Curvam b b descriptam, *Lineam Cycloidem* appellabimus: Rectam τ α, *Cycloidis Basin:* Figuram curvâ illâ & Base comprehensum, τ τ A, *Figuram Cycloidem:* Ejusque semissem τ α A, *Semicycloidem:* Et bisecantem rectam (basi perpendicularem) α C A, *Cycloidis Axem.*

Cycloidis autem Nomen, quod spectat; Videtur (mihi saltem) *Cyclois* (hoc est, Græce Κυκλοΐς, Κυκλοΐδος,) potius quam *Cycloïdes* (hoc est, Κυκλοειδὴς, Κυκλοειδέος, contractè Κυκλοειδοῦς,) dicenda: utpote quæ non tam *Circulo similem*, quàm *ex circulo oriundam*, lineam vel figuram indicat.

Manifestum autem est, (ex constructione Cycloidis,) non modo Peripheriam Circuli Generantis integram (propter continuam sui quæ supponitur ad rectam τ α applicationem) ipsi τ α æqualem esse; (adeoque semissem semissi, &c. puta curvam Semicirculi α B A, rectæ τ α, &c.) Sed &, particulatim, dum Circulus Genitor, Basin in β contingens, puncto suo lineante designat Cycloidis punctum b; rectam τ β (propter eandem continuam ἐφαρμογὴν) curvæ b β æqualem esse; hoc est, (ductâ rectâ b B V basi parallelâ, quæ occurrat in B Circulo Genitori circa Cycloidis Axem constituto, Axique in V,) curvæ α B: Adeoque, & reliquam reliquæ; nempe rectam β α, hoc est b B, ipsi B A curvæ. Et sic ubique.

Et propterea: Rectam b V, ubique æqualem esse, aggregato Arcûs & Sinûs recti, Sinui verso V A competentium; puta (retentis Symbolis propositionum præcedentium) $bV = BA + BV = a + s$. Atque hoc indifferenter, sive sit V punctum, supra C Centrum circuli Generantis, sive infra, sive denique in ipso C puncto.

Ductisque B α, b β, rectis; sunt (per 33. El. 6. *Euclidis*) Anguli B α A, proportionales ipsis quibus insistunt Arcubus B A; hoc est, rectis b B, seu β α: Adeoque anguli B α τ, hoc est, b β τ, arcubus B α, seu b β; hoc est rectis β τ. Nempe, (propter angulum in centro duplum Anguli in Peripheria, per 20. El. 3.) Ut τ β recta, hoc

est

est arcus, βb, seu αB, ad Semiperipheriam αBA, vel huic æqualem rectam τα; sic angulus bβτ, hoc est Bατ, ad Aατ rectum.

Divisâ itaque τα in partes quotlibet æquales, in punctis φ, ε, δ, ζ, ξ, &c. ductisque, ab his punctis contactûs ad punctum lineans, rectis φf, εe, δd, ζz, ξx, &c. (quibus parallelæ sint in Semicirculo, αF, αE, αD, αZ, αX, &c. arcuum arithmetice proportionalium subtensæ:) erunt, tum anguli fφτ, eετ, dδτ, zζτ, xξτ, &c. tum, his æquales, Fατ, Eατ, Dατ, Zατ, Xατ, &c. arithmetice proportionales: Eorumque communis excessus, primo æqualis; puta fφτ, vel Fατ; Nempe, ea pars anguli recti, quæ est τφ, totius τα, seu arcus Fα, semiperipheriæ αFA. Fig. 167.

Divisis autem hoc modo, tum Semicycloide rectis fφ, eε, dδ, &c. tum Semicirculo, rectis Fα, Eα, Dα, &c. in segmenta numero æqualia, singula singulis respective correspondentia: Ductisque insuper in Semicycloide, à punctis ξ, ζ, δ, &c. rectis ξπ, ζρ, δσ, &c. quæ parallelæ sint rectis ζz, δd, εe, &c. Erunt anguli omnes xξπ, zζρ, dδσ, &c. æquales, tum inter se, tum ipsi fφτ, tum cuilibet angulorum ταF, FαE, EαD, &c. qui item (propter æquales arcus αF, FE, ED, &c.) sunt inter se æquales.

Ductis porro, tum in Semicycloide rectis xO, zp, dr, &c. tum in Semicirculo, XO, ZP, DR, &c. basi τα parallelis; inscribatur, tum Semicycloidi, figura ex Trapeziis; tum Semicirculo, Figura ex Triangulis correspondentibus constans.

Eruntque illa inscripta Trapezia, Triangulorum inscriptorum, singula singulorum respective sumptorum, (adeoque & omnia omnium,) plusquam Tripla.

Constat enim Trapeziorum illorum quodlibet, ex Triangulo simul & Parallelogrammo. Quorum illud est Triangulo sibi correspondenti in Semicirculo (fig. 167, seu 169.) ubique æquale; (quippe simili, & æque alto.) Hoc autem, illius plusquam duplum; utpote correspondenti in fig. 170. parallelogrammo æquale, (æque altum scilicet, & super æquali base;) quod respectivi Trianguli plusquam duplum esse, ad § A. prop. 17. ostensum est. Puta Triangulum πξp fig. 167, æquale Triangulo ZαP fig. 167 seu 169; & parallelogrammum zζξπ, fig. 167, æquale (utpote æque altum & super æquali base) Parallelogrammo correspondenti zζξπ fig. 170; quod Trianguli correspondentis ZαP plusquam duplum esse, ad § A. prop. 17. demonstratur: Adeoque Totum zζξp Trapezium, ejusdem πξp seu ZαP Trianguli plusquam Triplum. Et sic ubique.

Deinde continuatis rectis αX, αZ, αD, &c. ad Q, I, Y, &c. Fig. 168.

Fig. 168. rectisque ξx, ζz, δd, &c. ad q, i, y, &c. rectisque ξπ, ζρ, &c. ad ι, υ, &c. ductisque rectis tum AQq, XI, ZY, &c. tum xιi, zυy, &c. ipsi τα parallelis: Circumscribatur, tum Semicycloidi Figura ex Trapeziis, tum Semicirculo Figura ex Triangulis correspondentibus constans.

Eruntque illa circumscripta Trapezia, circumscriptorum Triangulorum, singula singulorum respective sumptorum, (adeoque & omnia omnium,) minus quàm Tripla.

Constat enim Trapeziorum horum quodlibet, ex Triangulo simul & parallelogrammo. Quorum quidem illud est Triangulo ad Semicirculum posito, ubique æquale, (utpote simili, & æque alto:) Hoc autem, illius minus quam duplum; utpote respectivo Parallelogrammo fig. 170. æquale, (cum æque altum sit, & super æquali base;) quod Trianguli respectivi minus quam duplum esse, ad § A. prop. 17. ostenditur. Puta, Triangulum ιξx fig. 168. æquale Triangulo IαX fig. 168, seu 169. Et Parallalogrammum iζξι fig. 168. æquale Parallelogrammo iζξx fig. 170. adeoque minus quam Trianguli duplum, ut ad § A. prop. 17. ostenditur. Et propterea totum iζξx Trapezium, ejusdem IαX Trianguli minus quam Triplum. Ex sic ubique.

Fig. 166, 167, 168, 169. Cumque hæc ubique obtineant: Figura illa ex Trapeziis Inscripta sive toti Semicycloidi τbAα, sive ipsius portioni, ut τbβ, aut βbAα, aut etiam βbdδ; (utrobique enim, sive de tota sive de parte, eodem modo procedit demonstratio;) Major est quam Tripla Figuræ ex Triangulis correspondentis, Inscriptæ, sive toti Semicirculo αBA, sive ipsius correspondenti portioni, ut αBα, aut αBA, aut etiam αBDα: Circumscripta verò, Circumscriptæ, Minor quam Tripla.

Cumque, multiplicatis Sectionibus, Inscriptæ & Circumscriptæ Differentia continue decrescat utrobique, donec tandem datâ quâvis minor evadat: Nec tamen unquam Inscripta Inscriptæ Minor quam Tripla, nec Circumscripta Circumscriptæ Major quam Tripla, esse possit: Continuatâ in infinitum sectione, evanescet differentia; Inscriptis simul & Circumscriptis coincidentibus illic cum Semicycloide ejusve portione, hic cum Semicirculo hujusve portione correspondente: eritque propterea tum Semicyclois Semicirculi tripla, tum partes partium respective sumptarum.

Hoc est; tum Semicyclois τbAα, Tripla Semicirculi αDA; tum istius Portio, bβαVA, sectoris hujus BαA; portioque reliqua τbβ, reliqui segmenti αBα; portioque βbdδ, sectoris BαD, Tripla. Et sic ubique. Quod erat primo loco probandum.

Est

Est utique *Semicyclois*, Figura ex *Semicirculo* & *Figurâ Sinuum* Fig. 166,
Versorum (Arcuumve) composita. Quippe Recta quælibet b B V 169,
fig. 166. æqualis duabus simul b B, B V, fig. 170, 169. Et quidem, 170.
si ex Semicycloidis Trapeziis singulis (fig. 167. vel 168.) eximi
intelligantur sua respective Triangula; hoc est, ex Semicycloide
quam constituunt illa numero infinita Trapezia, Semicirculus quem
illa numero infinita Triangula, aut illis saltem æqualia, constituunt;
(protrusis rectis b B, ad rectam A α; ut puncta B, V, congruant:)
Reliqua Parallelogramma (prius inclinata, jam exemptis Triangulis
erecta,) eadem erunt cum parallelogrammis (fig. 170.) correspondentibus,
figuram Sinuum Versorum Arcuumve complentibus. Quod
itaque *Trilineum Restitutum* dicimus; propter parallelogramma,
quæ in Semicycloide interpositis triangulis obliquabantur, in debitum
situm restituta in Trilineo fig. 170. Quod quidem Trilineum aliud
non est quam illud ipsum fig. 166, 167, 168. Trilineum A τ α D,
(curvâ cycloidis, & Semicirculi convexâ, rectâque τ α, comprehensum,)
in debitum situm, exempto Semicirculo, restitutum.

Atque in partibus similiter: Puta, ex Trapeziis Quadrilineum
β b A α in Semicycloide constituentibus, exemptis Triangulis Sectorem
Trilineum B α A constituentibus (vel his æqualibus;) reliqua
Parallelogramma constituent Quadrilineum β b A α Trilinei restituti,
aut huic æquale; Hoc est, in Semicycloide, Quinquilineum b β α B A
(tribus rectis b β, β α, α B, & duabus curvis b A, B A, comprehensum;)
vel Quadrilineum b β α D A fig. 166. (tribus curvis b β, b A,
A D α, ut recta β α, comprehensum;) Sectoris B α A duplum: Adeoque
(quod ex utrisque componitur) Quadrilineum Cycloidis
β b A α, (rectis A α, α β, β b, curvâque b A, comprehensum,)
ejusdem Sectoris B α A, triplum. Et sic ubique. Similiter; Si ex
Semicycloidis Segmento A b V, eximatur Segmentum Semicirculi
A B V; relinquitur A b B fig. 166. = A b B fig. 170. Et sic ubique.
Quod & de eorum Momentis respectu rectarum τ α, T A,
aut aliarum hisce parallelarum, pariter intelligendum erit: Propter
tum Magnitudines tum Distantias æquales. (Si vero ad A α, aliamve
rectam quæ ipsis τ α, T A, parallela non sit, æstimentur momenta;
secus erit: Quippe tum, æqualium Magnitudinum, Distantiæ inæquales
erunt. Ut infra dicendum erit.)

Et quidem, ut, in Cycloide, recta b B V (aggregatum arcûs & sinûs
recti) ea quantitas est quam dicimus $f = a + s$: Sic, in Trilineo
restituto (seu Figurâ Arcuum) si Diametro A α describatur circulus,
quæ à b puncto ordinatim applicatur ad Axem A α, est *a* Arcus;

 quæ

quæ vero ad peripheriam ulteriorem continuetur est $a+s=f$; quæque peripheriâ propiore intercipitur est $a-s=e$, differentia arcûs & sinûs recti sinui verso AV convenientium. (Puta, fig 186, $bB=a+s=f$; fig. 185, $bB=a-s=e$; utrobique $bV=a$, $BV=s$.) Adeoque si, exempto illo Semicirculo, protruderentur illæ interceptæ rectæ usque ad A α axem; quæ prodiret figura esset figura differentiarum Arcuum sinuumque rectorum: Sicut, ex Semicycloide, exempto Semicirculo, figura Arcuum formabatur.

B. Fig. 166, 170. His ita constitutis; (Nempe Semicycloidem Semicirculi Triplam esse, & partes partium respective sumptarum; vel quod eodem recidit, Semicycloidem Semicirculo & Figuræ Sinuum versorum Arcuumve (hoc est, Trilineo restituto,) simul sumptis æqualem, ejusque partes partibus horum respective sumptis:) ad calculum sic procedimus: Retentis Symbolis propositionum præcedentium.

Est Semicirculus A D $\alpha = \frac{1}{4}RP$, (per § D. prop. 15.) & Trilineum restitutum τ A D α (istius duplum) $\frac{1}{2}RP$; per § B. prop. 17. Ergo Semicyclois (ejusdem Triplum) τ A V $\alpha = \frac{3}{4}RP$. Adeoque Parallelogrammi residuum seu Semicycloidis complementum A τ T $= \frac{1}{4}RP$.

Item Sector B α A $= \frac{1}{2}aR + \frac{1}{2}sR = \frac{1}{2}fR$ (per § H. prop. 15.) Trilinei restituti portio b β α B A $= aR + sR = fR$, per § B. prop. 17. Ergo Portio Cycloidis b β α V A $= \frac{3}{2}aR + \frac{3}{2}sR = \frac{3}{2}fR$.

Item Segmentum Semicirculi residuum α B $\alpha = \frac{1}{4}RP - \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR$ $= \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR$, (per § G. prop. 15.) Ergo Segmentum Semicycloidis residuum b β $\tau = \frac{3}{4}RP - \frac{3}{2}aR - \frac{3}{2}sR = \frac{3}{2}aR - \frac{3}{2}sR$.

Item; Si, ex illa portione Semicycloidis b β α V A; auferatur tum parallelogrammum b β α B (= b β α B fig. 170.) $= ah$, tum Triangulum α B V $= \frac{1}{2}sh$; hoc est Trapezium b β α V $= ah + \frac{1}{2}sh$ $= 2aR - av + sR - \frac{1}{2}sv$: Relinquitur Semicycloidis segmentum AbV $= -\frac{1}{2}aR + \frac{1}{2}sR + av + \frac{1}{2}sv = -\frac{1}{2}eR + av + {}_2sv = \frac{3}{2}fR - ah - \frac{1}{2}sh$.

Vel etiam; propter A B V $= \frac{1}{2}eR + \frac{1}{2}sv$ (per § F. prop. 15.) & A B b $= -eR + av$, (per § B. prop. 17.) erit A b V $= -\frac{1}{2}eR$ $+ av + \frac{1}{2}sv = -\frac{1}{2}aR + \frac{1}{2}sR + av + \frac{1}{2}sv$.

Et, speciatim, Segmentum A d C (propter $a = \frac{1}{4}P$, $s = v = R$,) $= R^2 + \frac{1}{8}RP$.

Fig. 166. Item, si ex Parallelogrammo A V b K $= fv$ (propter A V $= v$, & b V $= f$,) eximatur Segmentum illud A b V $= \frac{3}{2}fR - ah - \frac{1}{2}sh$: Relinquitur Trilineum A b K (seu segmenti A b V complementum) $fv - \frac{3}{4}fR + ah + \frac{1}{2}sh$; hoc est (reductione facta) $\frac{1}{2}eR + \frac{1}{2}sv$;

Nempe,

Nempe, tantundem atque Semicirculi ſegmentum A B V, modò dictum.

C. Porro, ſi intelligatur Semicirculus (juxta def. 1. cap. 4.) ex infinitis numero Sectoribus conſtitui, ut A α X, X α Z, &c. vel etiam (quod in partibus infinite exiguis, propter infinitam approximationem, tantundem valet) ex infinitis numero Triangulis figuram inſcriptam complentibus, ut O α X, P α Z, &c. ſive ex totidem Triangulis figuram circumſcriptam complentibus, ut Q α A, I α X, &c. aut etiam figuram inſcriptæ & circumſcriptæ intermediam (utpote partim inſcriptam, partim circumſcriptam) complentibus, ut Y α P, &c. (quæ rectis α Z, &c. ut illorum axibus repræſententur:) Intelligenda erit ſimiliter Semicyclois ex totidem conſtitui Quadrilineis A α ξ x, x ξ ζ z, &c. vel etiam (quod eodem recidit, ſectione in infinitum continuatâ,) ex totidem Trapeziis figuram inſcriptam complentibus, ut O x ξ α, p z ζ ξ, &c. aut circumſcriptam complentibus, ut A q ξ α, x i ζ ξ, &c. aut quæ figuram partim inſcriptam partim circumſcriptam complent, ut p y δ ξ, &c. (quæ rectis z ζ, &c. ut eorum axibus repræſententur.) Fig. 167, 168.

Cumque hæc Trapezia ſingula, ex Triangulo ſimul & Parallelogrammo conſiſtunt; quorum illud eſt reſpectivo Semicirculi Triangulo æquale, hoc autem reſpectivo Parallelogrammo Trilinei Reſtituti fig. 170. ſuntque in eiſdem ſive à τ α ſive à T A diſtantiis: Trapezii cujuſque momentum ſive reſpectu rectæ τ α, ſive reſpectu rectæ T A, (aliarumve hiſce parallelarum,) æquabitur Momentis ſimul ſumptis eorundem quibus æquantur Trianguli Parallelogrammique. Fig. 166, 167, 168, 170.

Cumque hoc de ſingulis obtineat, obtinebit & de ſimul omnibus complentibus vel totam A τ α Semicyloidem, vel ipſius portionem aliquam, ut A b β α, b β τ, b β δ d, &c. Puta Momentum Portionis Semicycloidis b β α V A, reſpectu rectæ τ α vel T A, æquale erit momento Sectoris B α A, & Quadrilinei fig. 170. b β α B A, (reſpectu rectarum τ α vel T A reſpective,) ſimul ſumptis.

Et ſimiliter oſtendetur, Momentum Segmenti Semicycloidis AbV, æquale momentis Segmenti Semicirculi A B V, & Segmenti Trilinei fig. 170. A b B, (reſpectu rectarum τ α, T A, vel hiſce parallelarum, reſpective,) ſimul. Æqualia ſiquidem ſunt, atque in eâdem diſtantiâ.

Eſt autem Semicirculi A D α, reſpectu τ α, momentum, $\frac{1}{4}R^2P$, (per § I. prop. 15.) Et momentum Trilinei Reſtituti, ejuſdem ſeſquialterum ſeu ut 3 ad 2, hoc eſt $\frac{3}{8}R^2P$. per § C. prop. 17. Semicycloidis igitur, reſpectu ejuſdem τ α, momentum (utpote illis ſimul ſumptis æquale) ad illud Sectoris, ut 5 ad 2, hoc eſt $\frac{5}{8}R^2P$. Cumque hujus magnitudo ſit

(per

Fig. 166, 170. (per § B.) $\frac{3}{4}RP$; distantia centri gravitatis Semicycloidis à $\tau\alpha$, erit $\frac{5}{6}R$. Adeoque à T A, $\frac{7}{6}R$. Ejusque respectu T A momentum (magnitudine in distantiam ductâ) $\frac{7}{8}R^2P$. (Qquuod æale est momentis Semicirculi Trilineique Restituti, prop. 15. & 17. inventis, simul sumptis.) Ergo & Semiquadrantalis Ungula eidem insistens, aciem habens $\tau\alpha$, est $\frac{5}{8}R^2P$; aciémque habens T A, $\frac{7}{8}R^2P$. Solidúmque ejusdem conversione circa $\tau\alpha$ factum, $\frac{5}{8}RP^2$; & Semisolidum, $\frac{5}{16}RP^2$: Atque circa T A, Solidum $\frac{7}{8}RP^2$, & Semisolidum $\frac{7}{16}RP^2$.

Atque si ex Parallelogrammi A T $\tau\alpha$ momento respectu $\tau\alpha$ vel T A, hoc est ex R^2P, (propter magnitudinem $\frac{1}{2}P\times 2R=RP$, distantiamque Centri gravitatis R;) auferatur Semicycloidis momentum jam inventum; habetur Complementi A τ T, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}R^2P$; respectu T A, $\frac{1}{8}R^2P$. Adeoque (propter magnitudinem modo inventam, $\frac{1}{4}RP$,) Distantia Centri gravitatis ejusdem à $\tau\alpha$, $\frac{3}{2}R$; atque à T A, $\frac{1}{2}R$. Item Semiquadrantalis Ungula eidem insistens, aciem habens $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}R^2P$; aciemque habens T A, $\frac{1}{8}R^2P$. Solidumque ejusdem conversione circa $\tau\alpha$ factum, $\frac{3}{8}RP^2$; & semisolidum, $\frac{3}{16}RP^2$: Atque circa T A, solidum $\frac{1}{8}RP^2$; semisolidum, $\frac{1}{16}RP^2$.

D. Item Sectoris B α A momentum respectu $\tau\alpha$, est $\frac{1}{2}fR^2+\frac{1}{6}shR$ $=\frac{1}{2}aR^2+\frac{5}{6}sR^2-\frac{1}{6}svR$, per § M. prop. 15. Et Portionis Trilinei restituti b $\beta\alpha$ B A, momentum $\frac{3}{4}fR^2+\frac{1}{4}shR=\frac{3}{4}aR^2+\frac{5}{4}sR^2-\frac{1}{4}svR$, per § D. prop 17. Ergo Portionis Semicycloidis b $\beta\alpha$V A, momentum respectu $\tau\alpha$ (utpote ex illis aggregatum,) $\frac{5}{4}fR^2+\frac{5}{12}shR$ $=\frac{5}{4}aR^2+\frac{25}{12}sR^2-\frac{5}{12}svR$. (Idemque est & Ungula Semiquadrantalis eidem insistens, aciem habens $\tau\alpha$.) Adeoque (propter magnitudinem § B inventam, $\frac{3}{2}fR=\frac{3}{2}aR+\frac{3}{2}sR$) Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, est $\frac{5}{6}R+\frac{5sh}{18f}=\frac{15aR+25sR-5sv}{18a+18s}$: Atque à TA, $\frac{7}{6}R-\frac{5sh}{18f}=\frac{21aR+11sR+5sv}{18a+18s}$: Ejusque respectu T A momentum, (vel Semiquadrantalis Ungula eidem insistens, aciem habens T A,) $\frac{7}{4}fR^2-\frac{5}{12}shR=\frac{7}{4}aR^2+\frac{11}{12}sR^2+\frac{5}{12}svR$. Solidumque ejusdem conversione circa $\tau\alpha$, $\frac{5}{4}aRP+\frac{25}{12}sRP-\frac{5}{12}svP$; & Semisolidum $\frac{5}{8}aRP+\frac{25}{24}sRP-\frac{5}{24}svP$: Atque circa T A, Solidum $\frac{7}{4}aRP+\frac{11}{12}sRP+\frac{5}{12}svP$, & semisolidum, $\frac{7}{8}aRP+\frac{11}{24}sRP+\frac{5}{24}svP$.

E. Similiter, Segmenti Semicirculi αB α, Momentum (vel Semiquadrantalis Ungula) respectu $\tau\alpha$, est $\frac{1}{2}aR^2-\frac{1}{2}sR^2-\frac{1}{6}shR$; & re-

spectu

ſpectu T A, $\frac{1}{2}aR^2-\frac{1}{2}sR^2+\frac{1}{6}shR$; per § N. prop. 15. Eſtque ſegmenti Trilinei Reſtituti b$\beta\tau$, Momentum (vel Semiquadrantalis Ungula) reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}aR^2-\frac{3}{4}sR^2-\frac{1}{4}shR$; & reſpectu T A, $\frac{5}{4}aR^2-\frac{5}{4}sR^2+\frac{1}{4}shR$; per § E. prop. 17. Ergo (quod ex utriſque aggregatum eſt) Segmenti Semicycloidis b$\beta\tau$, momentum (ſeu Semiquadrantalis Ungula) reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{4}aR^2-\frac{5}{4}sR^2-\frac{5}{12}shR$; & reſpectu T A, $\frac{7}{4}aR^2-\frac{7}{4}sR^2+\frac{5}{12}shR$. Hoc eſt (propter $a=\frac{1}{2}P-a$, & $h=2R-v$,) reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{8}R^2P-\frac{5}{4}aR^2-\frac{25}{12}sR^2+\frac{5}{12}svR$; & reſpectu T A, $\frac{7}{8}R^2P-\frac{7}{4}aR^2-\frac{11}{12}sR^2-\frac{5}{12}svR$. Adeoque (propter magnitudinem § B inventam, $\frac{3}{2}aR-\frac{3}{2}sR=\frac{3}{4}RP-\frac{3}{2}aR-\frac{3}{2}sR$,) Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{5}{6}R-\frac{5sh}{18a-18s}=\frac{5}{6}R-\frac{10sR-5sv}{9P-18a-18s}$: à T A, $\frac{7}{6}R+\frac{5sh}{18a-18s}=\frac{7}{6}R+\frac{10sR-5sv}{9P-18a-18s}$. Solidumque ejuſdem circa $\tau\alpha$ converſione factum $\frac{5}{4}aRP-\frac{5}{4}sRP-\frac{5}{12}shP=\frac{5}{8}RP^2-\frac{5}{4}aRP-\frac{25}{12}sRP+\frac{5}{12}svP$; & ſemiſolidum $\frac{5}{8}aRP-\frac{5}{8}sRP-\frac{5}{24}shR=\frac{5}{16}RP^2-\frac{5}{8}aRP-\frac{25}{24}sRP+\frac{5}{24}svP$: Atque, circa T A, Solidum $\frac{7}{4}aRP-\frac{7}{4}sRP+\frac{5}{12}shP=\frac{7}{8}RP^2-\frac{7}{4}aRP-\frac{11}{12}sRP-\frac{5}{12}svP$; & ſemiſolidum, $\frac{7}{8}aRP-\frac{7}{8}sRP+\frac{5}{24}shP=\frac{7}{16}RP^2-\frac{7}{8}aRP-\frac{11}{24}sRP-\frac{5}{24}svP$.

Item, Segmenti Semicirculi B V A, Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{2}svR+\frac{1}{3}s^3$; & reſpectu T A, $\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{2}svR-\frac{1}{3}s^3$, & reſpectu b B V, $-\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{2}avR-\frac{1}{6}s^3$; per § L, R. prop. 15. Momentum autem Segmenti Trilinei b B A, reſpectu $\tau\alpha$, $-\frac{5}{4}eR^2+avR-\frac{1}{4}svR+\frac{1}{2}as^2$; & reſpectu T A, $-\frac{3}{4}eR^2+avR+\frac{1}{4}svR-\frac{1}{2}as^2$; & reſpectu b B V, $\frac{3}{4}eR^2+\frac{3}{4}svR-\frac{1}{2}as^2$; per § F. prop. 17. Momentum igitur Segmenti Semicycloidis b V A, (vel Semiquadrantalis Ungula correſpondens,) reſpectu $\tau\alpha$, $-\frac{3}{4}eR^2+avR+\frac{1}{4}svR+\frac{1}{2}as^2+\frac{1}{3}s^3$; & reſpectu T A, $-\frac{1}{4}eR^2+avR+\frac{3}{4}svR-\frac{1}{2}as^2-\frac{1}{3}s^3$; & reſpectu b B V, $\frac{1}{4}eR^2+\frac{1}{2}avR+\frac{3}{4}svR-\frac{1}{2}as^2-\frac{1}{6}s^3$. Adeoque (propter magnitudinem § B. inventam, $-\frac{1}{2}eR+av+\frac{1}{2}sv$;) Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{-9eR^2+12avR+3svR+6as^2+4s^3}{-6eR+12av+6sv}$; à T A, $\frac{-3eR^2+12avR+9svR-6as^2-4s^3}{-6eR+12av+6sv}$; à b B V, $\frac{3eR^2+6avR+9svR-6as^2-2s^3}{-6eR+12av+6sv}$. Solidum ejuſdem converſione

Fig. 166, 170.

F.

circa

Fig. 166, 170. circa $\tau\alpha$ factum, $-\frac{3}{4}eRP + avP + \frac{1}{4}svP + \frac{as^2P}{2R} + \frac{s^3P}{3R}$; & semisolidum, $-\frac{3}{8}eRP + \frac{1}{2}avP + \frac{1}{8}svP + \frac{3as^2P + 2s^3P}{12R}$: Item circa TA, Solidum, $-\frac{1}{4}eRP + avP + \frac{3}{4}svP - \frac{as^2P}{2R} - \frac{s^3P}{3R}$; & semisolidum, $-\frac{1}{8}eRP + \frac{1}{2}avP + \frac{3}{8}svP - \frac{as^2P}{4R} - \frac{s^3P}{6R}$: Denique circa bV, Solidum $\frac{1}{4}eRP + \frac{1}{2}avP + \frac{3}{4}svP - \frac{as^2P}{2R} - \frac{s^3P}{6R}$; & semisolidum, $\frac{1}{8}eRP + \frac{1}{4}avP + \frac{3}{8}svP - \frac{as^2P}{4R} - \frac{s^3P}{12R}$.

Eadem habentur ope Trapezii b$\beta\alpha$V. Quippe si ex quadrilinei b$\beta\alpha$A fig. 166. auferatur Trapezium b$\beta\alpha$V, restabit Semicycloidis segmentum bVA: Ejusque momentum ex momento Quadrilinei subductum, relinquit segmenti bVA momentum, sive respectu rectæ TA, sive $\tau\alpha$; unde & reliqua consequentur.

Est autem Trianguli BVα, magnitudo $\frac{1}{2}sh$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}sh^2$; respectu TA, $shR - \frac{1}{3}sh^2$; per § M. prop. 15. Et parallelogrammi b$\beta\alpha$B, magnitudo ab; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}ab^2$; respectu TA, $2abR - \frac{1}{2}ab^2$: per § F. prop. 17. Ergo Trapezii b$\beta\alpha$V, magnitudo, $ab + \frac{1}{2}sh$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}ab^2 + \frac{1}{3}sh^2$; respectu TA, $2abR + shR - \frac{1}{2}ab^2 - \frac{1}{3}sh^2$. Quæ respective subducta ex Quadrilinei b$\beta\alpha$A, magnitudine & Momentis § D. traditis: Relinquunt Segmenti bVA magnitudinem $\frac{3}{2}fR - ab - \frac{1}{2}sh = -\frac{1}{2}aR + \frac{1}{2}sR + av + \frac{1}{2}sv = -\frac{1}{2}eR + av + \frac{1}{2}sv$: Momentum respectu $\tau\alpha$, (vel correspondens Ungula,) $\frac{5}{4}fR^2 + \frac{5}{12}shR - \frac{1}{2}ab^2 - \frac{1}{3}sh^2 = -\frac{3}{4}aR^2 + \frac{3}{4}sR^2 + 2avR + \frac{11}{12}svR - \frac{1}{2}av^2 - \frac{1}{3}sv^2 = -\frac{1}{4}eR^2 + avR + \frac{1}{4}svR + \frac{1}{2}as^2 + \frac{1}{3}s^3$; respectu TA, $\frac{7}{4}fR^2 - \frac{5}{12}shR - 2abR - shR + \frac{1}{2}ab^2 + \frac{1}{3}sh^2 = -\frac{1}{4}aR^2 + \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{12}svR + \frac{1}{2}av^2 + \frac{1}{3}sv^2 = -\frac{1}{4}eR^2 + avR + \frac{3}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{3}s^3$. Unde reliqua deducentur ut prius. Trapeziique Distantia Centri gravitatis (momento per magnitudinem diviso) à $\tau\alpha$, $\frac{3a + 2s}{6a + 3s}h$; à TA, $2R - \frac{3a + 2s}{6a + 3s}h$.

G. Si verò, ex Parallelogrammi AVbK momentis, eximantur momenta segmenti AbV; relinquentur Momenta respectiva Trilinei AbK.

Eſt autem, (propter A V $= v$, b V $= f$, Diſtantiamque Centri Fig. 166.
gravitatis ab A α, vel b K, $\frac{1}{2}f$; ab A K, vel b V, $\frac{1}{2}v$; adeoque ab $\alpha\tau$, $\frac{1}{2}v + h = 2R - \frac{1}{2}v$;) Parallelogrammi magnitudo, fv; momentum reſpectu A α vel b K, $\frac{1}{2}f^2 v$; reſpectu A T vel b V, $\frac{1}{2}fv^2 = fvR - \frac{1}{2}fs^2$; reſpectu $\alpha\tau$, $2fvR - \frac{1}{2}fv^2 = \frac{1}{2}fv^2 + fvh = \frac{1}{2}fv^2 + fs^2 = fvR + \frac{1}{2}fs^2$.

Si itaque ex $\frac{1}{2}fv^2 = fvR - \frac{1}{2}fs^2 = avR + svR - \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{2}s^3$, auferatur ſegmenti A b V momentum reſpectu T A (modo inventum) $-\frac{1}{4}eR^2 + avR + \frac{3}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{3}s^3$; habetur $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{6}s^3$, momentum Trilinei A b K reſpectu T A. Ideoque, propter magnitudinem (§ B inventam) $\frac{1}{2}eR + \frac{1}{2}sv$, Diſtantia Centri gravitatis à T A, $\frac{3eR^2 + 3svR - 2s^3}{6eR + 6sv} = \frac{1}{2}R - \frac{s^3}{3eR + 3sv}$: Adeoque, à $\tau\alpha$, $\frac{3}{2}R + \frac{s^3}{3eR + 3sv}$; à bV, $\frac{1}{2}R - h$ $(= v - \frac{1}{2}R)$ $+ \frac{s^3}{3eR + 3sv}$; & (reſtituendo magnitudinem) momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}eR^2 + \frac{3}{4}svR + \frac{1}{6}s^3$; & reſpectu b V, $\frac{1}{2}evR + \frac{1}{2}sv^2 - \frac{1}{4}eR^2 - \frac{1}{4}svK + \frac{1}{6}s^3 = -\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{2}avR + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{3}s^3$ (propter $\frac{1}{2}evR = \frac{1}{2}avR - \frac{1}{2}svR$, & $\frac{1}{2}sv^2 = svR - \frac{1}{2}s^3$.) Vel etiam, ex momentis Parallelogrammi A V b K, $fvR + \frac{1}{2}fs^2$ & $fvR - \frac{1}{2}fs^2$ (modò traditis,) hoc eſt, ex $avR + svR + \frac{1}{2}as^2 + \frac{1}{2}s^3$, & $avR + svR - \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{2}s^3$; ſubductis momentis ſegmenti A b V, $-\frac{3}{4}eR^2 + avR + \frac{1}{4}svR + \frac{1}{2}as^2 + \frac{1}{3}s^3$, & $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{2}avR + \frac{3}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{6}s^3$, modò inventis; Habetur Momentum Trilinei A b K, reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}eR^2 + \frac{3}{4}svR + \frac{1}{6}s^3$; &, reſpectu b V, $-\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{2}avR + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{3}s^3$; ut prius.

Atque hactenus Semicycloidis, partiumque illius, Momenta & Ungulas, conſideravimus duntaxat prout ad rectas $\tau\alpha$, T A, aut huic parallelas reſpectum habent. Quæ quidem, (propter eandem à rectis illis diſtantiam Parallelogrammorum b $\beta\xi\pi$, ſive ut inclinata jacent in Semicycloide fig. 167, 168. ſive ut erecta in Trilineo reſtituto fig. 170. Et Triangulorum ſimiliter, ut $\pi\xi$ p ſeu B α P, fig. 167, 168. eiſque æqualium B α P, fig. 169.) alia non ſunt quam aggregata partium correſpondentium in Semicirculo, & Trilineo Reſtituto, fig. 169, 170. Et Momenta Ungulæque quæ Semicycloidem ſpectant, reſpectivorum Momentorum Ungularúmque aggregata, Semicirculum Trilineúmque illud reſpective ſpectantium. H.

Verùm ſi ad rectam A α, aliámve ipſis $\tau\alpha$, T A, non parallelam exigantur; ſive ut Ungularum aciem ſive ut librationis axem: Quoniam

niam alia est inde distantia Parallelogrammorum in Semicycloide inclinatorum, atque erectorum in Trilineo Restituto; altiore adhuc indagine opus erit, quò distantiarum variatarum justa ratio habeatur.

Intelligatur itaque, ut prius, tum Semicirculus in minuta Trian-
Fig. 166, gula, ut Y α P, tum Semicyclois in totidem Trapezia corresponden-
168. tia, ut y δ ξ p, distribui; quæ figuram utrobique inscriptæ & circumscriptæ intermediam (utpote partim inscriptam partim circumscriptam) compleant. Quæ suis Axibus seu Diametris B α, b β repræsentari intelligantur. In quibus itaque rectis sua respective Centra gravitatis constituta fore, constat (ex prop. 5. hujus,) saltem inde distare distantia quæ datâ quavis minor sit; quæque sectione in infinitum continuatâ evanescet. Cúmque ex præmonstratis (§ A,) Trapeziarum illarum quodvis ex Triangulo constat, respectivo Semicirculi Triangulo æquali, & Parallelogrammo ejusdem Trianguli duplo, (utpote æquali respectivo Trilinei restituti Parallelogrammo:) intelligatur Trapezii Triangulum illud, ut υ β π, (ipsi Y α P simile & æquale,) utrinque ad b β positum, (per cujus itaque Centrum gravitatis transire intelligatur b β recta;) adeoque Parallelogrammum (Trapezii reliquum) in duo Parallelogramma dimidia dirimere, ut υ β δ y, π β ξ p. Per cujus itaque bipartiti Parallelogrammi, seu duorum Parallelogrammorum simul sumptorum, commune Centrum gravitatis non minus transibit b β recta, quam si, exempto Triangulo, (quod in Trilineo restituto fit,) utrinque eidem b β rectæ adjacerent dimidia illa Parallelogramma, utrinque jam æqualiter remota. Quanquam enim in sectione definitâ, major sit B Y quam B P, & b υ quam b π; sectione tamen in infinitum continuatâ; differentia illa in æqualitatem sensim evanescit; ut ex præmonstratis patet.

Re sic constructâ; Momentum Trapezii cujusvis, ut y δ ξ P, ad momentum correspondentis Trianguli, ut Y α P, respectu ejusdem A α, (adeoque & Ungula super illo, ad Ungulam super hoc, quæ communem Aciem habeant A α; Solidúmque illius ad Solidum hujus conversione circa A α factum;) est in ratione quæ componitur ex magnitudinis ad magnitudinem ratione, (hoc est, sectione in infinitum continuatâ, ut 3 ad 1, per § A;) atque ex ratione Distantiæ Centri gravitatis illius, ad Distantiam Centri gravitatis hujus, ab eadem A α rectâ.

Est autem Centrum gravitatis Trianguli Y α P, in ipsâ α B; ejusque ab α distantia est $\frac{2}{3}\alpha B$, (per § C. prop. 6. hujus;) adeoque ab A α distantia est $\frac{2}{3}BV = \frac{2}{3}s$, & a τ α, $\frac{2}{3}V\alpha = \frac{2}{3}h$.

Trapezii vero y δ ξ p, Centrum gravitatis in b β positum, à β distat $\frac{5}{9}\beta b$.

$\frac{5}{9}\beta b$. Cum enim Trianguli $\upsilon\beta\pi$ centrum, à β distet $\frac{2}{3}\beta b$; & parallelogrammi bipartiti seu ex duobus compositi, βy, βp, centrum à β distet $\frac{1}{2}\beta b$; per 6 hujus; sitque utrumque in βb rectâ, ut modo ostensum est: Horum ab invicem distantia erit $\frac{1}{6}\beta b = \frac{2}{3}\beta b - \frac{1}{2}\beta b$: Hæc itaque centrorum ab invicem distantia, divisa in magnitudinum, quæ sunt ut 1 ad 2, ratione reciprocâ; pro communi utriusque, hoc est ipsius Trapezii centro gravitatis, superaddit distantiæ Centri Parallelogrammi à puncto β, trientem ipsius $\frac{1}{6}\beta b$, hoc est $\frac{1}{18}\beta b$; per 27. cap. præced. Nam, ut $3 = 2 + 1$, ad 1; sic $\frac{1}{6}\beta b$, ad $\frac{1}{18}\beta b$. Adeoque propter $\frac{1}{2} + \frac{1}{18} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$, Trapezii centrum gravitatis, in βb positum, à β distabit, $\frac{5}{9}\beta b$. Fig. 166, 168.

Et propterea, ejusdem à $\tau\alpha$ distantia erit $\frac{5}{9}V\alpha = \frac{5}{9}h$; & ab $A\alpha$ distantia bB $(= \beta\alpha = BA) + \frac{5}{9}BV$, (ut ex Schematis inspectu facile constabit;) hoc est $a + \frac{5}{9}s$.

Ratio itaque distantiarum Centrorum gravitatis Trapezii $y\delta\xi p$, & Trianguli $Y\alpha P$, ab eadem $A\alpha$; nempe $bB + \frac{5}{9}BV$ ad $\frac{2}{3}BV$, seu $a + \frac{5}{9}s$ ad $\frac{2}{3}s$; cum ratione magnitudinum 3 ad 1 (multiplicando) composita; exhibet rationem momentorum $3bB + \frac{5}{3}BV$ ad $\frac{2}{3}BV$, seu $3a + \frac{5}{3}s$ ad $\frac{2}{3}s$. Hoc est, Momentum Trapezii $y\delta\xi p$, in suo situ, ad momentum Trianguli $Y\alpha P$ in suo, respectu ejusdem $A\alpha$ rectæ; est ut Trianguli illius in distantia $3bB + \frac{5}{3}BV$ suspensi momentum, ad ejusdem suspensi in distantia $\frac{2}{3}BV$, (hoc est, in suo situ,) momentum respectu ejusdem $A\alpha$. Hoc est (propter eandem Trianguli magnitudinem) ut distantia $3bB + \frac{5}{3}BV$, ad distantiam $\frac{2}{3}BV$. Hoc est, ut $\frac{5}{3}BV$ ad $\frac{2}{3}BV$ (seu ut 5 ad 2) atque insuper ut $3bB$ ad $\frac{2}{3}BV$, seu $9bB$ ad $2BV$. Hoc est; ut 5 ad 2, atque insuper ut $9a$ ad $2s$.

Quod quidem cum ubique fiat: Ratio momenti Trapeziorum simul omnium, sive quæ Totam Semicycloidem, sive quæ ipsius Portionem ut $b\beta\alpha A$, complent; (quippe de partibus perinde procedit demonstratio atque de totis;) ad momentum omnium Triangulorum complentium vel totum Semicirculum, vel ipsius Portionem, ut $B\alpha A$, respective; ea est quam habent omnium illorum triangulorum ut $Y\alpha P$, in distantias respective $3bB + \frac{5}{3}BV$ suspensorum momenta, ad momenta earundem in distantiis respective $\frac{2}{3}BV$ suspensorum; seu, ut omnia $Y\alpha P$ in $\frac{5}{3}BV$, ad eadem in $\frac{2}{3}BV$ respective ductâ, atque insuper ut eadem omnia $Y\alpha P$ in $3bB$, ad eadem in $\frac{2}{3}BV$ respective.

Cumque sit eadem ubique ratio Trianguli, ut $Y\alpha P$, in $\frac{5}{3}BV$, ad idem in $\frac{2}{3}BV$; adeoque & omnium ad omnia; nempe ut 5 ad 2;

Fig. 166, 168. Sed non eadem ubique ratio Trianguli, ut Y α P, in 3 b B; ad idem in $\frac{2}{3}$ B V; propter tum Triangulorum super æquales bases inæqualem altitudinem, tum aliam atque aliam rationem b B ad B V, hoc est, arcus ad sinum: Propterea, rationi 5 ad 2; alia consocianda est; Quam nempe habeant omnia respective Triangula ut Y α P in 3 b B, ad eadem in $\frac{2}{3}$ B V; seu, quam habent omnia in 9 b B, ad eadem in 2 B V, respective: Hoc est, Quam habet *Noncuplum omnium* b B, seu β α, (hoc est B A arcuum arithmetice proportionalium,) aut his æqualium β ς Triangulum α τ t fig. 170. complentium, *in respectiva Triangula* Y α P, seu (propter æquales omnium bases) *Triangulorum altitudines* V α respectivas, (hoc est, sinus versos arcuum B α, qui cum B A complent Semicirculum,) seu in, ipsis æquales, b β, seu *minuta parallelogramma* his proportionalia figuram Sinuum versorum seu Trilineum Restitutum fig. 170. complentia: Ad *Duplum omnium* B V (Sinuum rectorum eorundem arcuum B A,) aut his æqualium β υ (complentium τ α υ figuram Sinuum rectorum totius Semicirculi fig. 170.) in *eadem respective Triangula* seu Triangulorum *Altitudines*, aut *minuta Parallelogramma* ipsis Proportionalia: Hoc est (in Trilineo Restituto fig. 170.) quam habet *Noncuplum* omnium b β in β ς, ad *Duplum* eorundem b β in β υ, respective.

Fig. 170. At b β, in β ς seu β α ducta, exhibet ipsius b β momentum respectu A α; adeoque omnes b β in respectivas β ς seu β α, exhibent respectu ejusdem A α, momenta omnium b β, hoc est momentum Trilinei A τ α; Adeoque *Noncuplum* omnium b β in β ς, est Noncuplum Momenti Trilinei A τ α respectu A α. Et similiter in portionibus: Puta, Noncuplum omnium b β portionem b β α B A complentium, in respectivas β ς seu β α ductarum, (hoc est *omnia 9 a h*, portionem b β α B A spectantia,) est Noncuplum momenti portionis b β α B A, respectu ejusdem A α.

Fig. 168, 169, 170. Atque omnes eædem b β in β υ fig. 170. seu in B V fig. 168, 169. Exhibent *Triplum* Momenti Semicirculi A D α, aut ipsius Sectoris B α A, (prout de Triangulis totum Semicirculum, aut ipsius tantum Sectorem complentibus, intelligatur,) respectu Diametri A α; per § A. prop. 18.

Adeoque *Duplum* omnium b β in β υ, est *Sextuplum* momenti Semicirculi α D A respectu ipsius A α: Atque, in partibus similiter, respective sumptis.

Adeoque *Noncuplum* omnium b β in β ς, ad *Duplum* earundem b β in β υ, est ut *Noncuplum* momenti Trilinei Restituti A τ α,

(ejusve

(ejusve portionis b β α B A,) fig. 170. respectu rectæ A α; ad *Sextuplum* momentum Semicirculi A D α, (ejusve Sectoris respectivi B α A,) respectu Diametri A α: Vel, ut *Triplum* momenti illius, ad *Duplum* momenti hujus.

Est autem (per § G. prop. 17.) Trilinei Restituti A τ α fig. 170. momentum respectu A α, $\frac{1}{8}RP^2 - 2R^3$; adeoque hujus Triplum $\frac{3}{8}RP^2 - 6R^3$: Et momentum Semicirculi, respectu A α, per § Q. prop. 15. $\frac{2}{3}R^3$; hujusque Duplum $\frac{4}{3}R^3$. Est ergo Triplum illud ad Duplum hoc; ut $\frac{3}{8}RP^2 - 6R^3$, ad $\frac{4}{3}R^3$; hoc est, $9RP^2 - 144R^3$, ad $32R^3$: Seu ut $9P^2 - 144R^2$ ad $32R^2$. Atque hæc demum ratio (ut supra ostensum est) rationi 5 ad 2, hoc est $80R^2$ ad $32R^2$ conjuncta; exhibet rationem momenti Semicycloidis A τ α, ad momentum Semicirculi A D α, respectu ejusdem A α rectæ; nempe, ut $9P^2 - 64R^2$ ad $32R^2$. Cum itaque momentum illud Semicirculi sit $\frac{2}{3}R^3$: Erit Semicycloidis momentum respectu A α (seu correspondens Ungula Semiquadrantalis,) $\frac{9P^2 - 64R^2}{48}R = \frac{3}{16}RP^2 - \frac{4}{3}R^3$.

Atque hoc Momentum per Semicycloidis magnitudinem $\frac{3}{4}RP$ (§ B.) divisum; exhibet ejusdem ab A α Centri gravitatis distantiam, $\frac{1}{4}P - \frac{16R^2}{9P}$; adeoque, à τ T, $\frac{1}{4}P + \frac{16R^2}{9P}$; & (restituendo magnitudinem,) ejusdem respectu τ T momentum $\frac{3}{16}RP^2 + \frac{4}{3}R^3$. Solidumque conversione factum (utpote ad Ungulam ut P ad R,) circa A α, $\frac{3}{16}P^3 - \frac{4}{3}R^2P$; & circa τ T, $\frac{3}{16}P^3 + \frac{4}{3}R^2P$: Semisolidaque horum dimidia.

Eademque Momenta, ex respectivis Parallelogrammi A α τ T momentis, hoc est, (propter $\tau\alpha = \frac{1}{2}P$, & $A\alpha = 2R$, distantiamque Centri gravitatis sive à τ T sive ab A α, $\frac{1}{2}\tau\alpha = \frac{1}{4}P$,) ex $\frac{1}{4}RP^2$, subducta; relinquunt Complementi Semicycloidis A τ T, momentum respectu A α (seu correspondentem Ungulam Semiquadrantalem) $\frac{1}{16}RP^2 + \frac{4}{3}R^3$; & respectu τ T, $\frac{1}{16}RP^2 - \frac{4}{3}R^3$: (Et Solida Semisolidaque correspondentia, ad hæc Momenta Ungulasve, ut P seu $\frac{1}{2}P$, ad R:) Eademque momenta Complementi Semicycloidis per magnitudinem, $\frac{1}{4}RP$ (per § B.) divisa; exhibent ejusdem ab A α distantiam Centri gravitatis $\frac{1}{4}P + \frac{16R^2}{3P}$; & à τ T, $\frac{1}{4}P - \frac{16R^2}{3P}$.

Similiter, in Semicycloidis portione b β α V A. Momentum hujus, I.

Fig. 168, 169, 170. jus, ad momentum Sectoris in Semicirculo correspondentis, B α A, respectu ipsius A α, (ut modo ostensum est,) est ut 5 ad 2; atque insuper, ut *Triplum* momenti correspondentis Portionis Trilinei restituti, b β α B A, ad *Duplum* momenti Sectoris Semicirculi B α A; respectu A α.

Est autem Momentum Portionis Trilinei Restituti b β α B A, respectu A α, $\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2$, (per § H. prop. 17.) adeoque ejusdem Triplum $\frac{3}{2}a^2R + 3asR - 3vR^2$; & momentum Sectoris B α A, respectu A α, $\frac{1}{3}vR^2 + \frac{1}{6}s^2R$, (per § S. prop. 15) hujusque Duplum $\frac{2}{3}vR^2 + \frac{1}{3}s^2K$. Ratio itaque quam habet Triplum illud ad hoc Duplum, hoc est $\frac{3}{2}a^2R + 3asR - 3vK^2$ ad $\frac{2}{3}vK^2 + \frac{1}{3}s^2R$; seu $9a^2 + 18as - 18vR$, ad $4vR + 2s^2$; rationi 5 ad 2, seu $10vR + 5s^2$ ad $4vR + 2s^2$ (addendo) consociata; exhibet Momenti Portionis Semicycloidis b β α V A, ad momentum correspondentis Sectoris B α A, respectu A α, rationem, $9a^2 + 18as - 8vR + 5s^2$ ad $4vR + 2s^2$. Cum itaque Sectoris momentum illud sit, $\frac{1}{3}vK^2 + \frac{1}{6}s^2R$ (ut modo dictum;) erit Portionis Semicycloidis b β α V A, momentum respectu A α, (seu correspondens Ungula Semiquadrantalis) $\frac{3}{4}a^2R + \frac{3}{2}asR - \frac{2}{3}vR^2 + \frac{5}{12}s^2R$.

Atque hoc momentum, per Portionis Semicycloidis b β α V A magnitudinem $\frac{3}{2}fR = \frac{3}{2}aR + \frac{3}{2}sR$, (per § B.) divisum; exhibet distantiam Centri gravitatis ab A α, $\frac{9a^2 + 18as - 8vR + 5s^2}{18a + 18s} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}s - \frac{4vR + 2s^2}{9a + 9s} = \frac{1}{2}f - \frac{4vR + 2s^2}{9f}$. Unde etiam ejusdem à τ T & bK distantia facile colligitur; & momentum respectu illarum. Item Solidum ejusdem circa A α conversione factum, $\frac{3}{4}a^2P + \frac{3}{2}asP - \frac{2}{3}vRP + \frac{5}{12}s^2P$; & semisolidum, hujus dimidium.

Si autem ex totius Semicycloidis respectu A α momento, $\frac{3}{16}RP^2 - \frac{4}{3}R^3$, subducatur hoc portionis b β α V A momentum $\frac{3}{4}a^2R + \frac{3}{2}asR - \frac{2}{3}vR^2 + \frac{5}{12}s^2R$: Relinquitur Segmenti b β τ momentum respectu ejusdem A α, $\frac{3}{16}RP^2 - \frac{4}{3}R^3 - \frac{3}{4}a^2R - \frac{3}{2}asR + \frac{2}{3}vR^2 - \frac{5}{12}s^2R$; seu (propter $\alpha = \frac{1}{2}P - a$, & $b = 2R - v$,) $\frac{3}{4}\alpha RP - \frac{3}{4}sRP - \frac{3}{4}\alpha^2R + \frac{3}{2}\alpha sR - \frac{2}{3}bR^2 - \frac{5}{12}s^2R$: Quod per magnitudinem $\frac{3}{2}\alpha R - \frac{3}{2}sR$, (§ B.) divisum: Exhibet Centri gravitatis ab A α distantiam, $\frac{1}{2}P - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}s - \frac{4bR - 2s^2}{9\alpha - 9s} = \frac{1}{2}P - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}s - \frac{2b^2}{9\alpha - 9s}$: Adeoque à T τ, $\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}s + \frac{2b^2}{9\alpha - 9s}$: Ejusque, respectu T τ, momentum $\frac{3}{4}\alpha^2R - \frac{3}{2}\alpha sR + \frac{3}{4}s^2R + \frac{1}{3}b^2R$.

Ex illo autem Portionis Semicycloidis b β α V A Momento (Ungu- K.
lave) respectu A α; si subducatur Trapezii b β α V, respectu ejusdem Fig. 168,
A α, Momentum Ungulave: Relinquitur, respectu ejusdem A α, 169,
Momentum Ungulave Segmenti Semicycloidis A b V. 170.

Componitur autem hoc Trapezium, ex Parallelogrammo b β α B, & Triangulo α B V. Parallelogrammi magnitudo (propter basin b B $= a$, & altitudinem V $\alpha = h$, est ah; Centrique gravitatis (utpote in sui medio positi) ab A α distantia, $\frac{1}{2}bB + \frac{1}{2}BV = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}s = \frac{1}{2}f$: Adeoque momentum $\frac{1}{2}fah$. Trianguli magnitudo (propter BV $= s$, & V$\alpha = h$,) $\frac{1}{2}sh$; Centrique gravitatis ab A α distantia $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}BV = \frac{1}{3}s$: Adeoque momentum respectu A α, $\frac{1}{6}s^2h$. Momentum itaque Trapezii b β α V respectu A α, est, $\frac{1}{2}fah + \frac{1}{6}s^2h = a^2R + asR - \frac{1}{2}a^2v - \frac{1}{2}asv + \frac{1}{3}s^2R - \frac{1}{6}s^2v$. (Magnitudo autem, $ah + \frac{1}{2}sh$: Adeoque Centri gravitatis ab A α Distantia, $\frac{3fa + s^2}{6a + 3s} = \frac{1}{2}a + \frac{3a + 2s}{12a + 6s}s$.)

Illud autem Trapezii Momentum, ex Portionis b β α V A momento (modo reperto) $\frac{3}{4}a^2R + \frac{3}{2}asR - \frac{2}{3}vR^2 + \frac{5}{12}s^2R$ subductum; relinquit, $-\frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{2}asR + \frac{1}{12}s^2R - \frac{2}{3}vR^2 + \frac{1}{2}a^2v + \frac{1}{2}asv + \frac{1}{6}s^2v$, Momentum Segmenti Semicycloidis b V A respectu A α; Ungulamve correspondentem. (Solidumque & Semisolidum ejusdem circa A α conversione factum, ad Ungulam illam, ut P, & $\frac{1}{2}P$, ad R.)

Quod quidem momentum, per magnitudinem (§ B. inventam) $-\frac{1}{2}eR (= -\frac{1}{2}aR + \frac{1}{2}sR) + av + \frac{1}{2}sv$, divisum; exhibet Centri grav. ab A α distantiam $\frac{-3a^2R + 6asR + s^2R - 8vR^2 + 6a^2v + 6asv + 2s^2v}{-6aR + 6sR + 12av + 6sv}$, hoc est $\frac{1}{2}a + \frac{3asR + s^2R - 8vR^2 + 3asv + 2s^2v}{-6eR + 12av + 6sv}$, seu $\frac{1}{2}a - \frac{8vR^2 - 3asR - s^2R - 3asv - 2s^2v}{-6eR + 12av + 6sv}$. Unde habetur etiam ejusdem à τ T vel b K distantia; ejusque respectu hujus momentum, Ungulave: Solidumq; & Semisolidum ejusdem circa τ T vel bK conversione factum.

Si autem ex Parallelogrammi A V b K momento respectu A α (§ G. tradito) $\frac{1}{2}f^2v$; hoc est, ex $\frac{1}{2}a^2v + asv + \frac{1}{2}s^2v$; auferatur momentum segmenti A b V respectu ejusdem A α, jam inventum, $-\frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{2}asR + \frac{1}{12}s^2R - \frac{2}{3}vR^2 + \frac{1}{2}a^2v + \frac{1}{2}asv + \frac{1}{6}s^2v$: Relinquitur Trilinei A b K respectu ejusdem A α, momentum $\frac{2}{3}vR^2 + \frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{2}asR$

$-\frac{1}{12}s^2R+\frac{1}{2}asv+\frac{1}{3}s^2v$: Adeoque, propter magnitudinem (§ B. traditam) $\frac{1}{2}eR+\frac{1}{2}sv$; Diſtantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{8vR^2+6a^2R-6asR-s^2R+6asv+4s^2v}{6eR+6sv}$.

L. Hæc eadem Momenta & Solida, aliâ adhuc methodo ſic inveſti-
Fig. 166, gantur.
168. Omnia momenta rectarum b V, æqualibus intervallis ſumptarum, (ſive totam Semicycloidem, ſive ipſius ſegmentum ut b V A complentium,) reſpectu rectæ A α; momentum integrum complentia: Vel omnia Triangula rectangula Iſoſcelia eiſdem inſiſtentia, Semiquadrantalem Ungulam, aciem habentem A α, complentia: Sunt totidem Semiquadrata earundem b V rectarum: Hoc eſt, ſemiſumma quadratorum rectarum omnium b V = b B + B V = $a+s$: Hoc eſt, ſemiſumma omnium $a^2+2as+s^2$; ſeu ſumma *Omnium*, $\frac{1}{2}a^2+as+\frac{1}{2}s^2$; ſumptis v arithmetice proportionalibus.

Fig. 170. Sunt autem *Omn.* $\frac{1}{2}a^2$, ſeu ſemiſumma quadratorum omnium b B rectarum: Idem atque momentum Trilinei reſtituti A $\tau\alpha$, (quam figuram *Arcuum*, non minus quam Sinuum verſorum figuram eſſe, oſtendimus § A. prop. 17.) ejuſve ſegmenti b B A, reſpectu A α. (Eſt enim magnitudo cujuſque b B = a, quæ itaque in ſui ſemiſſem, ſeu Centri gravitatis diſtantiam, $\frac{1}{2}a$, ducta; exhibet ejuſdem reſpectu A α momentum, $\frac{1}{2}a^2$.) Nempe Trilinei A $\tau\alpha$ momentum, $\frac{1}{8}RP^2-2R^3$: Et Segmenti b B A, momentum, $-\frac{1}{2}a^2R+asR-vR^2+\frac{1}{2}a^2v$, per § G, I. prop. 17.

Fig. 168, Item *Omnia* $\frac{1}{2}s^2$; ſeu ſemiſumma Quadratorum rectarum B V
169. (æqualibus intervallis ſumptarum) Semicirculum A D α, ejuſve ſegmentum A B V complentium; eſt ejuſdem A D α Semicirculi, ejuſve Segmenti A B V, momentum reſpectu diametri ſuæ A α. Nempe Semicirculi momentum, $\frac{2}{3}R^3$; & ſegmenti A B V momentum (reſpectu ejuſdem A α) $\frac{1}{3}vR^2-\frac{1}{6}s^2R+\frac{1}{6}s^2v$; per § Q, R. prop. 15.

His autem jam inventis *Omn.* $\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}s^2$; ſi addantur *Omn.* as, (ut modo oſtenſum eſt) habentur *Omn.* $\frac{1}{2}a^2+as+\frac{1}{2}s^2$: Momentum Semicycloidis, ejuſve Segmenti b V A, reſpectu A α.

Adeoque ſi admittamus Momentum illud Semicycloidis Segmentive ſui, per præcedentem methodum, jam inventum: Inde colligitur ſumma omnium as; hoc eſt, factum ex omnibus ordinatis in Semicirculo, ductis in reſpectivos arcus ipſis & vertice interceptos.

Quippe,

Quippe, si ex Momento Semicycloidis, respectu rectæ A α, (§ H. invento,) $\frac{3}{16}RP^2 - \frac{4}{3}R^3$; auferamus tum $\frac{1}{8}RP^2 - 2R^3$, tum $\frac{2}{3}R^3$, (hoc est, summam *omn.* $\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}s^2$;) Quod restat, $\frac{1}{16}RP^2$, est summa *omn.* as.

Similiter; Si ex Momento Segmenti Semicycloidis b V A, respectu A α, (§ K. invento,) $-\frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{2}asR + \frac{1}{12}s^2R - \frac{2}{3}vR^2 + \frac{1}{2}a^2v + \frac{1}{2}asv + \frac{1}{6}s^2v$; auferamus, tum $-\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2 + \frac{1}{2}a^2v$, tum $\frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2v$; (hoc est summam *omn.* $\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}s^2$, eò spectantium;) Quod restat, $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{4}s^2R + \frac{1}{2}asv$, est summa *omn.* as, eo spectantium.

Si vero Momentum illud integrum sive Semicycloidis, sive Segmenti ejus b V A, nondum ut inventum assumatur: Eadem summa *omnium* as, per se habetur, per § K, L. prop. 18. (Completur utique Solidum A b B V, ibidem descriptum, ex ductu rectarum b B $= a$, in B V $= s$, respective.) Nempe, quæ totam Semicycloidem spectant $\frac{1}{16}RP^2$; Quæque ipsius Segmentum b V A, $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{4}s^2R + \frac{1}{2}asv$.

Additis igitur, pro tota Semicycloide, tum $\frac{1}{8}RP^2 - 2R^3 =$ *Omn.* $\frac{1}{2}a^2$; tum $\frac{2}{3}R^3 =$ *Omn.* $\frac{1}{2}s^2$; tum $\frac{1}{16}RP^2 =$ *Omn.* as: Habentur, quatenus totam Semicycloidem spectant, *Omn* $\frac{1}{2}a^2 + as + \frac{1}{2}s^2$: Hoc est Momentum Semicycloidis respectu A α, $\frac{3}{16}RP^2 - \frac{4}{3}R^3$. Ut supra § K. Fig. 166, 168.

Additisque, pro Semicycloidis Segmento b V A, tum $-\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2 + \frac{1}{2}a^2v =$ *Omn.* $\frac{1}{2}a^2$; tum $\frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2v =$ *Omn.* $\frac{1}{2}s^2$; tum $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{4}s^2R + \frac{1}{2}asv =$ *Omn.* as: Habentur *Omn.* $\frac{1}{2}a^2 + as + \frac{1}{2}s^2$, eo spectantia; Hoc est, Momentum Segmenti Semicycloidis b V A, respectu A α, $-\frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{2}asR + \frac{1}{12}s^2R - \frac{2}{3}vR^2 + \frac{1}{2}a^2v + \frac{1}{2}asv + \frac{1}{6}s^2v$; ut prius § K. Unde Centra gravitatis, Solidaque conversione facta, eodem modo quo prius elicientur.

Item, Si Momento Segmenti b V A respectu A α, sic invento; addatur Momentum Trapezii b β α V (§ K. traditum,) Habebitur portionis b β α V A Momentum respectu A α; idem nempe quod alia methodo prius exhibitum est § I. Unde ejusdem Centrum gravitatis, Solidáque conversione facta, eodem modo quo prius elicientur.

M. Exhibuimus itaque tum ipsius Semicycloidis (adeoque & Cycloidis totius) ejúsque partium expositarum, tum Magnitudines, tum Momenta respectu rectarum aliquot expositarum; earúmque Centrorum gravitatis ab illis rectis distantias: Et propterea ipsa earundem Centra gravitatis. Datis enim Centri gravitatis distantiis à duabus in eodem plano rectis (non invicem parallelis;) datur ipsum gravitatis Centrum, per prop. 26. cap. præced.

Atque his quidem ita traditis; non erit difficile in aliis item Cycloidis Segmentis, variis modis abſciſſis, tum Magnitudines, tum Momenta, adeoque & Centra gravitatis determinare: Additionibus ſcilicet, & Subductionibus factis prout res poſtulaverit.

Eademque Segmenta quæ nos ad aliquot rectas comparavimus, eorundem reſpectu illarum Momenta determinando, ipſaque Centra gravitatis (per diſtantias ſuas à duabus ſaltem non parallelis rectis) deſignando: Poterit quilibet ad alias quaſvis datas rectas (propter tum Magnitudines tum diſtantias Centrorum datas) ſimiliter comparare: Idemque & in aliis Segmentis (horum ope) præſtare.

Ex Momentis autem, Ungularum Magnitudines, & Solidorum converſione (perfectâ aut imperfectâ) deſcriptorum, obtineri poſſe, in præcedentibus ſæpe dictum eſt. Sunt utique Ungulæ Semiquadrantales, ipſis Momentis (ut à nobis deſignatis) æquales; (aliæque Ungulæ, ad has, in altitudinum ratione:) Solidaque integra converſione facta, ad correſpondentes Ungulas Semiquadrantales, ut *P*, ad *R*; & ſemiſolida, eorum dimidia: Et ſimiliter de aliis imperfectis converſionibus, ſervatâ ratione, judicandum. Ut ad hanc aliaſque propoſitiones ſæpius inſinuatum eſt.

N. Denique; quæ de Cycloide primariâ jam tradidimus omnia; eadem ad Secundarias facile transferuntur, quas *Protractas Contractaſque* appellant.

Fig. 175, 176.

Cycloidem vero *Primariam* illam dicunt quam hactenus deſcripſimus; Quam ſcilicet volventis circuli Punctum aliquod in peripheria deſcribit, dum ipſa ſibi Peripheria commenſurat in ſubjecto plano æqualem rectam $\tau\alpha\tau$; Ejuſve Centrum rectam deſcribit c C c, peripheriæ æqualem. Puta $\tau A \tau$, fig. 166. 175. 176.

Si verò recta c C c, quam Centrum deſcribit dum circulus unam converſionem facit, ſeu quæ huic ſubeſt in plano $\tau\alpha\tau$, quam Cycloidis Baſem dicimus, Major fuerit quam Circuli Genitoris Peripheria, *Protractam* dicimus Cycloidem; ut $\tau I \tau$ fig. 175. ſi Minor *Contractam*, ut $\tau E \tau$.

Dúmque Circulus A D α, aliquo peripheriæ ſuæ puncto, deſcribit Cycloidem *primariam*, ut τ A; Fig. 166. 176. eodem tempore, Circuli Concentrici cujuſque Minoris correſpondens punctum deſcribit Cycloidem *Protractam* ut τ I, fig. 176. Concentrici vero *Majoris* cujuſque punctum correſpondens, *Contractam* deſcribit ut τ E. Quarum quidem Cycloidum *Protracta Contractaque* Genitores, ſunt illi *Minor, Majorq;* Circulus.

Quæ

Quæ autem de Cycloide Primaria traduntur omnia; eadem Secundariis accommodantur; cum hoc discrimine, Quòd, cum in *Primaria* rectæ b B sint ipsis Genitoris sui arcubus B A Æquales; in *Protractis*, Majores sunt; in *Contractis* Minores; quam suorum respective Genitorum Correspondentes arcus B A; & quidem in ea ratione Majores Minoresve, qua recta $\tau\alpha$, major est vel minor quam $\frac{1}{2}P$, Genitoris Circuli sui Semicircumferentia. Adeoque, quoties in calculum veniunt rectæ b B; pro a, substituenda erit quantitas quæ ad hanc sit in ea ratione qua est $\tau\alpha$, ad $\frac{1}{2}P$. Et similiter, mutatis mutandis, in earundem Quadratis Cubis, reliquisque potestatibus: Ut in præcedentibus aliquot propositionibus monitum fuit.

PROP. XXI.

Ungula Semicycloidi A $\tau\alpha$ insistens aciem habens $\tau\alpha$, est *Dupla-sesquialtera*, correspondentis Ungulæ Semicirculo A D α insistentis; seu ut 5 ad 2. A. Fig. 166.

Ejusque *Momentum* respectu aciei suæ, est *Duplum-sesquitertium* Momenti Ungulæ respectivæ Semicirculo A D α insistentis, eandem aciem habentis, respectu aciei suæ; seu ut 7 ad 3.

Idémque in respectivis portionibus obtinet: Puta *Ungula* Quadrilineo b $\beta\alpha$ A in Semicycloide insistens, aciem habens $\tau\alpha$, est *Dupla-sesquialtera* respectivæ Ungulæ Sectori B α A insistentis; seu ut 5 ad 2.

Ejúsque *Momentum* est *Duplum sesquitertium* momenti respectivæ Ungulæ insistentis Sectori BαA; respectu aciei suæ $\tau\alpha$; seu ut 7 ad 3.

Atque hinc eadem respective determinantur, tum quoad Momenta, & Centra gravitatis, in Ungulis Semicycloidi, ejusve portionibus; insistentibus; atque in illis

Fig. 166. quæ Semicirculo, ejusque portionibus respectivis insistunt.

Nempe (retentis Symbolis ut in propositionibus præcedentibus,)

B. Semiquadrantalis Ungulæ, Semicycloidis $A\tau\alpha$, aciem habentis $\tau\alpha$, Magnitudo est $\frac{5}{8}R^2P$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{35}{48}R^3P$; respectu TA, $\frac{25}{48}R^3P$; Distantia
H. Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{7}{6}R$; à TA, $\frac{5}{6}R$: Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{5}{32}R^2P^2 - \frac{16}{9}R^4$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{4}P - \frac{128R^2}{45P}$.

B. Aciemque habentis TA; Magnitudo, $\frac{7}{8}R^2P$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{25}{48}R^3P$; respectu TA, $\frac{59}{48}R^3P$; Distantia Centri grav. à $\tau\alpha$, $\frac{25}{42}R$; à TA, $\frac{59}{42}R$:
H. Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{7}{32}R^2P^2 - \frac{8}{9}R^4$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$; $\frac{1}{4}P - \frac{64R^2}{63P}$.

H. Aciemque habentis $A\alpha$; Magnitudo, $\frac{3}{16}RP^2 - \frac{4}{3}R^3$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{32}R^2P^2 - \frac{16}{9}R^4$; respectu TA, $\frac{7}{32}R^2P^2 - \frac{8}{9}R^4$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{5}{6}R - \frac{32R^3}{9P^2 - 64R^2}$; à TA, $\frac{7}{6}R + \frac{32R^3}{9P^2 - 64R^2}$:
M. Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{16}RP^3 - \frac{35}{48}R^3P$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{3P^3 - 35R^2P}{9P^2 - 64R^2}$.

C. Ungulæ (Semiquadrantalem intellige) Portionis Semicycloidis $b\beta\alpha VA$, aciem habentis $\tau\alpha$, Magnitudo, $\frac{5}{4}fR^2 + \frac{5}{12}shR$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{35}{24}fR^3 + \frac{7}{8}shR^2 - \frac{7}{36}s^3R$; respectu TA, $\frac{25}{24}fR^3 - \frac{5}{24}shR^2 + \frac{7}{36}s^3R$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{7}{6}R +$
G. $\frac{14shR - 7s^3}{45fR + 15sh}$; à TA, $\frac{5}{6}R - \frac{14shR - 7s^3}{45fR + 15sh}$: Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{5}{8}a^2R^2 + \frac{25}{12}asR^2 - \frac{5}{12}asvR - \frac{8}{9}vR^3$

+

$+\frac{41}{72}s^2R^2 - \frac{7}{36}s^2vR$; Distantia Centri gravitatis ab A α, Fig. 166. $a - \frac{45a^2R + 64vR^2 - 41s^2R + 14s^2v}{90aR + 150sR - 30sv}$.

Aciemque habentis TA; Mag. $\frac{7}{4}fR^2 - \frac{5}{12}shR$; Momentum resp. $\tau\alpha$, $\frac{25}{24}fR^3 - \frac{1}{24}shR^2 + \frac{7}{36}s^3R$; resp. TA, $\frac{19}{24}fR^3 - \frac{19}{24}shR^2 - \frac{7}{36}s^3R$; Dist. Cen. grav. à $\tau\alpha$, $\frac{25}{42}R + \frac{52shR + 49s^3}{441fR - 105sh}$; à TA, $\frac{17}{42}R - \frac{52shR + 49s^3}{441fR - 105sh}$: Momentum respectu C.

A α, $\frac{7}{8}a^2R^2 + \frac{11}{12}asR^2 - \frac{4}{9}vR^3 + \frac{19}{72}s^2R^2 + \frac{5}{12}asvR + \frac{7}{36}s^2vR$; Distantia Centri gravitatis ab A α, $a - \frac{32vR^2 + 63a^2R - 19s^2R - 14s^2v}{126aR + 66sR + 30sv}$. G.

Aciemque habentis A α; Magnitudo, $\frac{3}{4}a^2R + \frac{3}{2}asR - \frac{2}{3}vR^2 + \frac{5}{12}s^2R$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{8}a^2R^2 + \frac{25}{12}asR^2 - \frac{5}{12}asvR - \frac{8}{9}vR^3 + \frac{41}{72}s^2R^2 - \frac{7}{36}s^2vR$; respectu TA, $\frac{7}{8}a^2R^2 + \frac{11}{12}asR^2 - \frac{4}{9}vR^3 + \frac{19}{72}s^2R^2 + \frac{5}{12}asvR + \frac{7}{36}s^2vR$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{5}{6}R - \frac{12vR^2 - 30asR - 8s^2R + 15asv + 7s^2v}{27a^2 + 54as - 24vR + 15s^2}$; à G.

TA, $\frac{7}{6}R + \frac{12vR^2 - 30asR - 8s^2R + 15asv + 7s^2v}{27a^2 + 54as - 24vR + 15s^2}$: Momentum respectu A α, $\frac{29}{24}eR^3 - \frac{4}{3}avR^2 - \frac{1}{8}svR^2 + \frac{1}{2}a^3R + \frac{3}{2}a^2sR + \frac{5}{6}as^2R + \frac{7}{36}s^3R$; Distantia Centri grav. ab A α, $\frac{87eR^2 - 96avR - 9svR + 36a^3 + 108a^2s + 60as^2 + 14s^3}{54a^2 + 108as - 48vR + 30s^2}$. M.

Ungulæ portionis Semicycloidis b β τ, aciem habentis $\tau\alpha$; Magnitudo $\frac{5}{4}\alpha R^2 - \frac{5}{4}sR^2 - \frac{5}{12}shR$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{35}{24}\alpha R^3 - \frac{35}{24}sR^3 - \frac{7}{8}shR^2 + \frac{7}{36}s^3R$; respectu TA, $\frac{25}{24}\alpha R^3 - \frac{25}{24}sR^3 + \frac{1}{24}shR^2 - \frac{7}{36}s^3R$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{7}{6}R - \frac{7sh^2}{45\alpha R - 45sR - 15sh}$; à TA, D.

$\frac{5}{6}R + \frac{7sh^2}{45\alpha R - 45sR - 15sh}$: Momentum respectu A α, L.

$\frac{5}{32}R^2P^2$

Fig. 166. $\frac{5}{32}R^2P^2 - \frac{16}{9}R^4 - \frac{5}{8}a^2R^2 + \frac{8}{9}vR^3 - \frac{25}{12}asR^2 - \frac{41}{72}s^2R^2 + \frac{5}{12}asvR + \frac{7}{36}s^2vR$; Distantia Centri grav. ab Aα; $a + \frac{45RP^2 - 180aRP + 180a^2R - 512R^3 + 256vR^2 - 164s^2R + 56s^2v}{180RP - 360aR - 600sR + 120sv}$.

D. Aciemque habentis TA; Magnitudo $\frac{7}{4}\alpha R^2 - \frac{7}{4}sR^2 + \frac{5}{12}shR$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{25}{24}\alpha R^3 - \frac{25}{24}sR^3 + \frac{1}{24}shR^2 - \frac{7}{36}s^3R$; respectu TA, $\frac{59}{24}\alpha R^3 - \frac{59}{24}sR^3 + \frac{19}{24}shR^2 + \frac{7}{36}s^3R$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{25}{42}R - \frac{52shR + 49s^3}{441\alpha R - 441sR + 105sh}$; à TA, $\frac{59}{42}R +$

I. $\frac{52shR + 49s^3}{441\alpha R - 441sR + 105sh}$: Momentum respectu A$\alpha$, $\frac{7}{32}R^2P^2 - \frac{8}{9}R^4 + \frac{4}{9}vR^3 - \frac{7}{8}a^2R^2 - \frac{11}{12}asR^2 - \frac{19}{12}s^2R^2 - \frac{5}{12}asvR - \frac{7}{36}s^2vR$; Distantia Centri grav. ab Aα, $a + \frac{63RP^2 - 252aRP - 256R^3 + 128vR^2 + 252a^2R - 76s^2R - 56s^2v}{252RP - 504aR - 264sR - 120sv}$.

I. Aciemque habentis Aα; Magnitudo, $\frac{3}{16}RP^2 - \frac{4}{3}R^3 + \frac{2}{3}vR^2 - \frac{3}{4}a^2R - \frac{3}{2}asR - \frac{5}{12}s^2R$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{32}R^2P^2 - \frac{16}{9}R^4 + \frac{8}{9}vR^3 - \frac{5}{8}a^2R^2 - \frac{25}{12}asR^2 - \frac{41}{72}s^2R^2 + \frac{5}{12}asvR + \frac{7}{36}s^2vR$; respectu TA, $\frac{7}{32}R^2P^2 - \frac{8}{9}R^4 + \frac{4}{9}vR^3 - \frac{7}{8}a^2R^2 - \frac{11}{12}asR^2 - \frac{19}{72}s^2R^2 - \frac{5}{12}asvR - \frac{7}{36}s^2vR$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{5}{6}R - \frac{192R^3 - 96vR^2 + 240asR + 64s^2R - 120asv - 56s^2v}{54P^2 - 384R^2 - 216a^2 - 432as + 192vR - 120s^2}$; à TA, $\frac{7}{6}R + \frac{192R^3 - 96vR^2 + 240asR + 64s^2R - 120asv - 56s^2v}{54P^2 - 384R^2 - 216a^2 - 432as + 192vR - 120s^2}$:

N. Momentum respectu Aα, $\frac{1}{16}RP^3 - \frac{15}{48}R^3P - \frac{29}{24}eR^3 + \frac{4}{3}avR^2 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{2}a^3R - \frac{3}{2}a^2sR - \frac{5}{6}as^2R - \frac{7}{36}s^3R$; Distantia Centri gravitatis ab A α,

$$\frac{9P^3 - 105R^2P - 174eR^2 + 192avR + 18svR - 72a^3 - 216a^2s - 120as^2 - 28s^3}{27P^2 - 192R^2 + 96vR - 108a^2 - 216as - 60s^2}$$

F. Ungulæ Trapezii b$\beta\alpha$V, aciem habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{2}ab^2 + \frac{1}{3}sb^2$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}ab^3$ +

$+\frac{1}{4}sh^3$; respectu T A, $ab^2R + \frac{2}{3}sh^2R - \frac{1}{3}ab^3 - \frac{1}{4}sh^3$; Fig.166.
Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{4a+3s}{6a+4s}b$; à T A,
$2R - \frac{4a+3s}{6a+4s}b$: Momentum respectu A α, $\frac{1}{4}a^2b^2 + \frac{1}{3}asb^2$ K.
$+\frac{1}{8}s^2b^2$; Distantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{2}a + \frac{4as+3s^2}{12a+8s} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}s + \frac{s^2}{36a+24s}$.

Aciemque habentis T A; Magnitudo, $2abR + sbR - \frac{1}{2}ab^2$ F.
$-\frac{1}{3}sb^2$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $ab^2R + \frac{2}{3}sb^2R - \frac{1}{3}ab^3$
$-\frac{1}{4}sb^3$; respectu T A, $4abR^2 + 2sbR^2 - 2ab^2R$
$-\frac{4}{3}sb^2R + \frac{1}{3}ab^3 + sb^3$; Distantia Centri gravitatis
à $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}b + \frac{2Rsb - fb^2}{24aR + 12sR - 6ab - 4sb}$; à TA, $2R - \frac{1}{2}b -$
$\frac{2sbR - fb^2}{24aR + 12sR - 6ab - 4sb}$: Momentum respectu A$\alpha$, $fabR$ K.
$+\frac{1}{3}s^2bR - \frac{1}{4}a^2b^2 - \frac{1}{3}asb^2 - \frac{1}{8}s^2b^2$; Dist.Cen.grav. ab A$\alpha$,
$\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}s + \frac{2s^2R - fsb}{48aR + 24sR - 12ab - 8sb}$.

Aciemque habentis A α; Magnitudo, $\frac{1}{2}fab + \frac{1}{6}s^2b$; Momentum respectu $\tau\alpha$. $\frac{1}{4}a^2b^2 + \frac{1}{3}asb^2 + \frac{1}{8}s^2b^2$; respectu K.
T A, $fabR + \frac{1}{3}s^2bR - \frac{1}{4}a^2b^2 - \frac{1}{3}asb^2 - \frac{1}{8}s^2b^2$; Distantia
Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}b + \frac{2asb + s^2b}{12fa + 4s^2}$; à TA, $2R - \frac{1}{2}b$
$- \frac{2asb + s^2b}{12fa + 4s^2}$: Momentum respectu A α, $\frac{1}{3}a^3b + \frac{1}{2}a^2sb$ O.
$+\frac{1}{3}as^2b + \frac{1}{12}s^3b$; Distantia Centri gravitatis ab A α,
$\frac{4a^3 + 6a^2s + 4as^2 + s^3}{6fa + 2s^2}$.

Ungulæ Segmenti Semicycloidis b V A, aciem habentis E.
TA; Magnitudo, $-\frac{1}{4}eR^2 + avR + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{3}s^3$;
Momentum respectu T A, $-\frac{5}{24}eR^3 + \frac{4}{3}avR^2 + \frac{9}{8}svR^2$
$-\frac{2}{3}as^2R - \frac{19}{36}s^3R - \frac{1}{3}as^2v - \frac{1}{4}s^3v$; respectu $\tau\alpha$, $-\frac{7}{24}eR^3$

+

Fig. 166. $+\frac{2}{3}avR^2+\frac{3}{8}svR^2-\frac{1}{3}as^2R-\frac{5}{36}s^3R+\frac{1}{3}as^2v+\frac{1}{4}s^3v$; respectu bV, $\frac{5}{24}eR^3+\frac{5}{12}avR^2+\frac{5}{8}svR^2-\frac{1}{3}as^2R-\frac{2}{9}s^3R-\frac{1}{6}as^2v-\frac{1}{12}s^3v$; Diſtantia Centri gravitatis à TA,

$$\frac{5}{6}R+\frac{6fvR^2-3fs^2R-4as^2v-3s^3v}{-3eR^2+12avR+9svR-6as^2-4s^3};$$

à $\tau\alpha$, $\frac{7}{6}R-\frac{6fvR^2-3fs^2R-4as^2v-3s^3v}{-3eR^2+12avR+9svR-6as^2-4s^3}$; à bV, $v-\frac{5}{6}R\left(=\frac{7}{6}R-h\right)$

K. $-\frac{6fvR^2-3fs^2R\,(=3fv^2R)-4as^2-3s^3v}{-3eR^2+12avR+9svR-6as^2-4s^3}$: Momentum reſpectu A$\alpha$, $-\frac{1}{8}a^2R^2+\frac{1}{4}asR^2+\frac{7}{72}s^2R^2-\frac{4}{9}vR^3+\frac{1}{2}a^2vR+\frac{3}{4}asvR+\frac{5}{18}s^2vR-\frac{1}{4}a^2s^2-\frac{1}{3}as^3-\frac{1}{8}s^4$; Diſtantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{1}{2}a+$

$$\frac{9asR^2+7s^2R^2-32vR^3+27asvR+20s^2vR-12as^3-9s^4}{-18eR^2+72avR+54svR-36as^2-24s^3}.$$

E. Aciemque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $-\frac{3}{4}eR^2+avR+\frac{1}{4}svR+\frac{1}{2}as^2+\frac{1}{3}s^3$; Momentum reſpectu TA, $-\frac{7}{24}eR^3+\frac{2}{3}avR^2+\frac{3}{8}svR^2-\frac{1}{3}as^2R-\frac{5}{36}s^3R+\frac{1}{3}as^2v+\frac{1}{4}s^3v$; reſpectu $\tau\alpha$, $-\frac{29}{24}eR^3+\frac{4}{3}avR^2+\frac{1}{8}svR^2+\frac{4}{3}as^2R+\frac{29}{36}s^3R-\frac{1}{3}as^2v-\frac{1}{4}s^3v$; reſpectu bV, $\frac{7}{24}eR^3+\frac{7}{12}avR^2+\frac{7}{8}svR^2-\frac{2}{3}as^2R-\frac{1}{9}s^3R+\frac{1}{6}as^2v+\frac{1}{12}s^3v$; Diſtantia Centri gravitatis à TA,

$$\frac{-21eR^3+48avR^2+27svR^2-24as^2R-10s^3R+24as^2v+18s^3v}{-54eR^2+72avR+18svR+36as^2+24s^3};$$

à $\tau\alpha$, $$\frac{-87eR^3+96avR^2+9svR^2+96as^2R+58s^3R-24as^2v-18s^3v}{-54eR^2+72avR+18svR+36as^2+24s^3};$$

à bV, $$\frac{21eR^3+42avR^2+63svR^2-48as^2R-8s^3R+12as^2v+6s^3v}{-54eR^2+72avR+18svR+36as^2+24s^3};$$

K. Momentum reſpectu Aα, $-\frac{3}{8}a^2R^2+\frac{1}{4}asR^2+\frac{5}{32}s^2R^2-\frac{8}{9}vR^3+\frac{1}{2}a^2vR+\frac{1}{4}asvR+\frac{1}{18}s^2vR+\frac{1}{4}a^2s^2+\frac{1}{3}as^3+\frac{1}{8}s^4$; Diſtantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{1}{2}a+$

$$\frac{27asR^2+5s^2R^2-64vR^3+9asvR+4s^2vR+12as^3+9s^4}{-54eR^2+72avR+18svR+36as^2+24s^3}.$$

Aciemque

Aciemque habentis bV; Magnitudo, $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{2}avR + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{6}s^3$; Momentum respectu TA, $\frac{5}{24}eR^3 + \frac{5}{12}avR^2 + \frac{5}{8}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{2}{9}s^3R - \frac{1}{6}as^2v - \frac{1}{12}s^3v$; respectu τα, $\frac{7}{24}eR^3 + \frac{7}{12}avR^2 + \frac{7}{8}svR^2 - \frac{2}{3}as^2R - \frac{1}{9}s^3R + \frac{1}{6}as^2v + \frac{1}{12}s^3v$; respectu bV, $-\frac{5}{24}eR^3 + \frac{5}{6}avR^2 + \frac{5}{8}svR^2 - \frac{1}{6}as^2R - \frac{19}{36}s^3R - \frac{1}{3}as^2v - \frac{1}{12}s^3v$; Distantia Centri grav. à TA, $\frac{5}{6}R - \frac{2as^2v + s^3v - es^2R}{3eR^2 + 6avR + 9svR - 6as^2 - 2s^3}$; à τα, $\frac{7}{6}R + \frac{2as^2v + s^3v - es^2R}{3eR^2 + 6avR + 9svR - 6as^2 - 2s^3}$: à bV, $\frac{7}{6}R - h\,(= v - \frac{5}{6}R) + \frac{2as^2v + s^3v - es^2R}{3eR^2 + 6avR + 9svR - 6as^2 - 2s^3}$: K. Fig. 166.

Momentum respectu Aα, $\frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 + \frac{41}{72}s^2R^2 - \frac{8}{9}vR^3 + \frac{1}{4}a^2vR + \frac{1}{4}asvR + \frac{5}{36}s^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2 - \frac{1}{6}as^3 - \frac{1}{24}s^4$; Distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{1}{2}a + \frac{41s^2R^2 - 9asR^2 - 64vR^3 + 27asvR + 10s^2vR - 6as^3 - 3s^4}{18eR^2 + 36avR + 54svR - 36as^2 - 12s^3}$. K, L.

Aciemque habentis Aα; Magnitudo, $-\frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{2}asR + \frac{1}{12}s^2R - \frac{2}{3}vR^2 + \frac{1}{2}a^2v + \frac{1}{2}asv + \frac{1}{6}s^2v$; Momentum respectu τα, $-\frac{3}{8}a^2R^2 + \frac{3}{4}asR^2 + \frac{5}{72}s^2R^2 - \frac{8}{9}vR^3 + \frac{1}{2}a^2vR + \frac{1}{4}asvR + \frac{1}{18}s^2vR + \frac{1}{4}a^2s^2 + \frac{1}{3}as^3 + \frac{1}{8}s^4$; respectu TA, $-\frac{1}{8}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 + \frac{7}{72}s^2R^2 - \frac{4}{9}vR^3 + \frac{1}{2}a^2vR + \frac{3}{4}asvR + \frac{5}{18}s^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2 - \frac{1}{3}as^3 - \frac{1}{8}s^4$; respectu bV, $\frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 + \frac{41}{72}s^2R^2 - \frac{8}{9}vR^3 + \frac{1}{4}a^2vR + \frac{3}{4}asvR + \frac{5}{36}s^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2 - \frac{1}{6}as^3 - \frac{1}{24}s^4$; Distantia Centri gravitatis à τα, K, L.

$$\frac{1}{2}R - \frac{4s^2R^2 - 8vR^3 + 18a^2vR + 36asvR + 14s^2vR - 18a^2s^2 - 24as^3 - 9s^4}{-18a^2R + 36asR + 6s^2R - 48vR^2 + 36a^2v + 36asv + 12s^2v};$$

à TA, $$\frac{1}{2}R + \frac{4s^2R^2 - 8vR^3 + 18a^2vR + 36asvR + 14s^2vR - 18a^2s^2 - 24as^3 - 9s^4}{-18a^2R + 36asR + 6s^2R - 48vR^2 + 36a^2v + 36asv + 12s^2v};$$

à b V, $\frac{3}{2}R - b - \frac{4s^2R^2 - 8vR^3 + 18a^2vR + 36asvR + 14s^2vR - 18a^2s^2 - 24as^3 - 9s^4}{-18a^2R + 36asR + 6s^2R - 48vR^2 + 36a^2v + 36asv + 12s^2v}$;

O, P. Momentum respectu A α, $\frac{29}{24}eR^3 - \frac{4}{3}avR^2 - \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{6}a^3R + \frac{1}{2}a^2sR + \frac{1}{6}as^2R + \frac{1}{36}s^3R + \frac{1}{3}a^3v + \frac{1}{2}a^2sv + \frac{1}{3}as^2v + \frac{1}{12}s^3v$; Distantia Centri gravitatis ab A α,

$$\frac{87eR^3 - 96avR^2 - 9svR^2 - 12a^3R + 36a^2sR + 12as^2R + 2s^3R + 24a^3v + 36a^2sv + 24as^2v + 5s^3v}{-48vR^2 - 18a^2R + 36asR + 6s^2R + 36a^2v + 36asv + 12s^2v}.$$

Adeoque exhibuimus, in expositis Ungulis, tum Magnitudines & Momenta, tum & ipsa Gravitatis Centra. Quæque de Ungulis tradita sunt; ad Solida conversione facta facile transferentur. Quæque de expositis dicta sunt; facile est ad alia, calculo rite adhibito, accommodare: Puta, Ungulas Trilinei A b K; aliasve ejusmodi.

Quæque de Ungulis Solidisque Semicycloidem Primariam spectantibus tradita sunt; eadem omnia ad Ungulas Solidaque, Semicycloides Secundarias (sive Protractas sive Contractas) spectantia facile transferentur.

A. Fig. 166, 168, 170. Distributis, (ut ad propositionem præcedentem) Tum Semicirculo A D α, in minuta Triangula, numero infinita: Tum Semicycloide A τ α, in totidem Trapezia correspondentia: Intelligatur utrique insistere Semiquadrantalis Ungula, aciem habens τ α.

Quæ autem vel toti Semicirculo, vel ipsius Sectori, ut B α A, insistit Ungula; componi intelligatur ex infinitis numero Ungulis, seu Pyramidulis, minutis illis Triangulis (ut α B, seu Y α P,) incumbentibus: Quarum communis vertex sit α punctum; Basisque super Triangulorum illorum Basibus (ut Y P, &c.) erectæ, altitudines habeant ipsis V α respectivis æquales.

Quæque Semicycloidi sive toti, sive ipsius Portioni, ut b β α V A (quæ Sectori B α A respondet,) insistit; ex totidem Ungulis, quæ respectivis Trapeziis β b, seu y δ ξ p, &c. incumbant; acies habentibus

bentibus in $\tau\alpha$ rectâ continuè jacentes, altitudines verò super ipsis Fig. 166,
y b p Trapeziorum basibus (pro Semiquadrantalis Ungulæ ratione) 170.
ipsis V α (respectivè) earundem à $\tau\alpha$ distantiis, æquales.

Quæ quidem Minutis illis Trapeziis insistentes Ungulæ (propter Trapezia illa æqualia, respectivis tum Semicirculi Triangulis, tum Trilinei Restituti fig. 170. Parallelogrammis simul sumptis,) æquales erunt respectivis Pyramidulis Cuneisque simul sumptis, quæ respectivis Semicirculi Triangulis Trilineique restituti Parallelogrammis, incumbunt; adeoque ad pyramidulas illas, ut 5 ad 2; (ut ad prop. præced. ostensum est.) Suntque in eisdem respective sive à $\tau\alpha$, sive T A, (aut hisce parallelis,) distantiis (ut patet.) Adeoque & Momenta Momentis æqualia habebunt, sive respectu rectæ $\tau\alpha$, sive T A, sive cujusvis hisce parallelæ rectæ.

Cumque hoc in singulis respective obtineat, (adeoque in simul omnibus:) Illius, quæ ex Ungulis hisce, minutis Trapeziis incumbentibus, componitur, (sive toti A $\tau\alpha$ Semicycloidi, sive ipsius portioni, ut b $\beta\alpha$ A, vel b $\beta\delta$ d, vel b $\beta\tau$, &c. fig. 166. insistentis,) Ungulæ Momentum; æquale est Momentis, simul sumptis, tum illius quæ ex Pyramidulis componitur Ungulæ, (sive toti Semicirculo A D α, sive ipsius portioni respectivæ, ut B α A, B α D, B α B, &c. insistentis,) tum illius quæ ex Cuneis componitur, (sive toti Trilineo restituto, sive ipsius portioni respectivæ, ut b $\beta\alpha$ A, b $\beta\delta$ d, b $\beta\tau$, &c. fig. 170. insistentis,) simul sumptis.

Est autem illius quæ ex Cuneis, ad illius quæ ex Pyramidulis componitur, Ungulæ momentum, respectu rectæ $\tau\alpha$; ut 4, ad 3, (per § A. prop. 19.) Est itaque illius quæ ex Ungulis Trapeziorum componitur (sive Toti Semicycloidi A $\tau\alpha$, sive ipsius Portioni, ut b $\beta\alpha$ A, b $\beta\delta$ d, b $\beta\tau$, &c. insistentis) momentum (utpote utrisque illis æquale) ad momentum illius quæ ex pyramidulis componitur (sive Toti Semicirculo A D α, sive ipsius respectivæ portioni B α A, B α D, B α B, &c. insistentis;) ut 7 ad 3.

Et quidem, ea quæ Trilineo restituto A $\tau\alpha$, fig. 170. insistit Ungula sive aciem habeat $\tau\alpha$, sive T A, sive aliam quamvis rectam hisce parallelam; alia non est quam quæ Trilineo distorto A $\tau\alpha$ D (cycloidis curvæ, & Semicirculi convexæ interjecto) insistit, in situm debitum restituta: Et Ungularum Momenta, respectu rectarum $\tau\alpha$, T A, aut hisce parallelarum, (propter tum Magnitudines tum Distantias æquales,) sunt æqualia. Quod & in partibus respective comparatis, perinde obtinet: Puta, quæ curvæ rectæque A b, A B, fig. 170. & quæ curvis A b, A B, fig. 166. interjacet; item quæ

Fig. 166, 170. rectis B α, b β, fig. 170. quæque duabus sive rectis sive curvis B α, b β, fig. 166. interjacet; (& similiter alibi;) propter tum Magnitudines tum Distantias utrobique æquales. (Si verò vel Ungularum acies, vel rectæ ad quas momenta æstimantur, sint A α; aliave quæ ipsis $\tau\alpha$, T A, parallela non sit; secus erit: Propter vel Magnitudines, vel Distantias, vel utrasque variatas. Ut post dicendum erit.)

B. Est autem, toti Semicirculo insistentis, Semiquadrantalis Unguiæ, aciem habentis $\tau\alpha$, Momentum respectu ejusdem $\tau\alpha$ rectæ, $\frac{5}{16}R^3P$; & respectu rectæ T A, $\frac{3}{16}R^3P$; per § T. prop. 16. Totique Trilineo insistentis, aciem item habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$, est, $\frac{5}{12}R^3P$; respectu T A, $\frac{1}{3}R^3P$; per § B. prop. 19.

Ergo Semicycloidi insistentis Ungulæ, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{35}{48}R^3P$; & respectu T A, $\frac{25}{48}R^3P$. Adeoque (propter magnitudinem $\frac{5}{8}R^2P$, per § C prop. præced.) Distantia Centri gravitatis Ungulæ à $\tau\alpha$, $\frac{7}{6}R$; à T A, $\frac{5}{6}R$. Semisolidique circa $\tau\alpha$, Magnitudo (quippe ad illam Ungulæ, ut $\frac{1}{2}P$ ad R, seu P ad $2R$,) $\frac{5}{16}RP^2$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$ (quippe ad illam Ungulæ, ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$, seu $4R$ ad P,) $\frac{14R^2}{3P}$; Semisolidique momentum respectu axis sui $\tau\alpha$, ad illud Ungulæ ut 2 ad 1; (propter magnitudinem ut P ad $2R$; & distantiam ut $4R$ ad P; per prop. 12. & 14. estque $\frac{P}{2R}\times\frac{4R}{P}=\frac{2}{1}$:) hoc est, $\frac{35}{24}R^3P$.

Similiter; Semicirculo insistentis Ungulæ, aciem habentis T A, Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{16}R^3P$; & respectu T A, $\frac{5}{16}R^3P$; (per § T. prop. 16.) Trilineóque Restituto insistentis, aciem habentis T A, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}R^3P$, (idem utique atque aciem habentis $\tau\alpha$, Momentum respectu T A, propter magnitudines & distantias reciprocatas,) & respectu T A, $\frac{11}{12}R^3P$; per § B. prop. 19.

Ergo, Semicycloidi insistentis, aciem habentis T A, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{25}{48}R^3P$; & respectu T A, $\frac{59}{48}R^3P$. Adeoque (propter magnitudinem, $\frac{7}{8}R^2P$, per § C. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{25}{42}R$; & à T A, $\frac{59}{42}R$. Semisolidique circa T A, magnitudo, $\frac{7}{16}RP^2$; Distantia Centri gravitatis ab axe conversionis T A, $\frac{118R^2}{21P}$; Momentum respectu ejusdem T A, $\frac{59}{24}R^3P$.

Item

Item Ungulæ Sectoris BαA, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{8}fR^3 + \frac{3}{8}shR^2 - \frac{1}{12}s^3R$; respectu TA, $\frac{3}{8}fR^3 - \frac{1}{24}shR^2 + \frac{1}{12}s^3R$; per § W. prop. 16. Ungulæque portionis Trilinei restituti b$\beta\alpha$BA, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{6}fR^3 + \frac{1}{2}shR^2 - \frac{1}{9}s^3R$; respectu TA, $\frac{2}{3}fR^3 + \frac{1}{9}s^3R$; per § C. prop. 19. C. Fig. 166, 170.

Ergo Ungulæ Portionis Semicycloidis b$\beta\alpha$VA, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{35}{42}fR^3 + \frac{7}{8}shR^2 - \frac{7}{36}s^3R = \frac{35}{24}aR^3 + \frac{77}{24}sR^3 - \frac{7}{8}svR^2 - \frac{7}{36}s^3R$; respectu TA, $\frac{25}{24}fR^3 - \frac{1}{24}shR^2 + \frac{7}{36}s^3R = \frac{25}{24}aR^3 + \frac{23}{24}sR^3 + \frac{1}{24}svR^2 + \frac{7}{36}s^3R$. Adeoque (propter magnitudinem $\frac{5}{4}fR^2 + \frac{5}{12}shR$, per § D. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{7}{6}R + \frac{14shR - 7s^3}{45fR + 15sh}$; & à TA, $\frac{5}{6}R - \frac{14shR - 7s^3}{45fR + 15sh}$. Semisolidique circa $\tau\alpha$, magnitudo $\frac{5}{8}fRP + \frac{5}{24}shP$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{35}{12}fR^3 + \frac{7}{4}shR^2 - \frac{7}{18}s^3R$; Centri gravitatis à $\tau\alpha$ distantia $\frac{14R^2}{3P} + \frac{56shR^2 - 28s^3R}{45fRP + 15shP}$.

Similiter, Ungulæ Sectoris BαA, aciem habentis TA; Momentum respectu TA, est $\frac{5}{8}fR^3 - \frac{7}{24}shR^2 - \frac{1}{12}s^3R$; per § W. prop. 16. Ungulæque in Trilineo correspondentis b$\beta\alpha$BA, $\frac{11}{6}fR^3 - \frac{1}{2}shR^2 - \frac{1}{9}s^3R$, per § C. prop. 19.

Ergo Ungulæ portionis Semicycloidis b$\beta\alpha$VA, aciem habentis TA, momentum respectu ipsius TA, $\frac{59}{24}fR^3 - \frac{19}{24}shR^2 - \frac{7}{36}s^3R = \frac{59}{24}aR^3 + \frac{7}{8}sR^3 + \frac{19}{24}svR^2 - \frac{7}{36}s^3R$; & respectu $\tau\alpha$ (idem quod aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu TA; propter magnitudines & distantias reciprocatas,) $\frac{25}{24}fR^3 - \frac{1}{24}shR^2 + \frac{7}{36}s^3R = \frac{25}{24}aR^2 + \frac{23}{24}sR^3 + \frac{1}{24}svR^2 + \frac{7}{36}s^3R$. Adeoque (propter magnitudinem $\frac{7}{4}fR^2 - \frac{5}{12}shR$, per § D. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis à TA, $\frac{59}{42}R - \frac{52shR + 49s^3}{441fR - 105sh}$; & à $\tau\alpha$, $\frac{25}{42}R + \frac{52shR + 49s^3}{441fR - 105sh}$. Semisolidique circa TA, magnitudo $\frac{7}{8}fRP - \frac{5}{24}shP$; momentum respectu TA, $\frac{59}{12}fR^3 - \frac{19}{12}shR^2 - \frac{7}{18}s^3R$; Centrique gravitatis inde distantia $\frac{118R^2}{21P} - \frac{208shR + 196s^3}{441fRP - 105shP}R$.

Item, Ungulæ Segmenti αBα, aciem habentis $\tau\alpha$; momentum respectu $\tau\alpha$, est $\frac{5}{8}aR^3 - \frac{5}{8}sR^3 - \frac{3}{8}shR^2 + \frac{1}{12}s^3R$, & respectu TA, $\frac{3}{8}aR^3 - \frac{3}{8}sR^3 + \frac{1}{24}shR^2 - \frac{1}{12}s^3R$; per § Y. prop. 16. Ungulæque respectivæ in Trilineo Restituto b$\beta\tau$, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{6}aR^3 - \frac{5}{6}sR^3 - \frac{1}{2}shR^2 + \frac{1}{9}s^3R$; & respectu TA, $\frac{2}{3}aR^3 - \frac{2}{3}sR^3 - \frac{1}{9}s^3R$; per § D. prop. 19. D.

Ergo,

Fig. 166, 170. Ergo, Ungulæ portionis Semicycloidis $b\beta\tau$, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{35}{24}\alpha R^3 - \frac{35}{24}sR^3 - \frac{7}{8}shR^2 + \frac{7}{36}s^3R = \frac{35}{48}R^3P - \frac{35}{24}aR^3 - \frac{77}{24}sR^3 + \frac{7}{8}svR^2 + \frac{7}{36}s^3R$; respectu TA, $\frac{25}{24}\alpha R^3 - \frac{25}{24}sR^3 + \frac{1}{24}shR^2 - \frac{7}{36}s^3R = \frac{25}{48}R^3P - \frac{25}{24}aR^3 - \frac{23}{24}sR^3 - \frac{1}{24}svR^2 - \frac{7}{36}s^3R$. Adeoque (propter magnitudinem, $\frac{5}{4}\alpha R^2 - \frac{5}{4}sR^2 - \frac{5}{12}shR$, per § E. prop. præced.) Dist. Cen. grav. à $\tau\alpha$, $\frac{105\alpha R^2 - 105sR^2 - 63shR + 14s^3}{90\alpha R - 90sR - 30sh}$ $= \frac{7}{6}R - \frac{14shR - 7s^3}{45\alpha R - 45sR - 15sh} = \frac{7}{6}R - \frac{14shR - 7shv}{45\alpha R - 45sR - 15sh}$ $= \frac{7}{6}R - \frac{7sh^2}{45\alpha R - 45sR - 15sh}$; à TA, $\frac{75\alpha R^2 - 75sR^2 + 3shR - 14s^3}{90\alpha R - 90sR - 30sh}$ $= \frac{5}{6}R + \frac{7sh^2}{45\alpha R - 45sR - 15sh}$. Semisolidique correspondentis circa $\tau\alpha$, magnitudo, $\frac{5}{8}\alpha RP - \frac{5}{8}sRP - \frac{5}{24}shP$; ejusque respectu $\tau\alpha$ momentum $\frac{35}{12}\alpha R^3 - \frac{35}{12}sR^3 - \frac{7}{4}shR^2 + \frac{7}{18}s^3R$; indeque Distantia Centri gravitatis, $\frac{14R^2}{3P} - \frac{28sh^2R}{45\alpha RP - 45sRP - 15shP}$.

Similiter; Ungulæ segmenti $\alpha B\alpha$, aciem habentis TA; momentum respectu TA, est $\frac{5}{8}\alpha R^3 - \frac{5}{8}sR^3 + \frac{7}{24}shR^2 + \frac{1}{12}s^3R$; per § Y. prop. 16. Ungulæque correspondentis in Trilineo Restituto $b\beta\tau$, $\frac{11}{6}\alpha R^3 - \frac{11}{6}sR^3 + \frac{1}{2}shR^2 + \frac{1}{9}s^3R$; per § D. prop. 19.

Ergo, Ungulæ $b\beta\tau$ in Semicycloide, aciem habentis TA, momentum respectu TA, $\frac{59}{24}\alpha R^3 - \frac{59}{24}sR^3 + \frac{19}{24}shR^2 + \frac{7}{36}s^3R$; & respectu $\tau\alpha$ (idem quod aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu TA,) $\frac{25}{24}\alpha R^3 - \frac{25}{24}sR^3 + \frac{1}{24}shR^2 - \frac{7}{36}s^3R$. Adeoque (propter magnitudinem $\frac{7}{4}\alpha R^2 - \frac{7}{4}sR^2 + \frac{5}{12}shR$, per § E. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis à TA, $\frac{177\alpha R^2 - 177sR^2 + 57shR + 14s^3}{126\alpha R - 126sR + 30sh}$ $= \frac{59}{42}R + \frac{52shR + 49s^3}{441\alpha R - 441sR + 105sh}$; à $\tau\alpha$, $\frac{75\alpha R^2 - 75sR^2 + 3shR - 14s^3}{126\alpha R - 126sR + 30sh}$ $= \frac{25}{42}R - \frac{52shR + 49s^3}{441\alpha R - 441sR + 105sh}$. Semisolidique correspondentis circa TA, magnitudo $\frac{7}{8}\alpha RP - \frac{7}{8}sRP + \frac{5}{24}shP$: Momentum respectu TA, $\frac{59}{12}\alpha R^3 - \frac{59}{12}sR^3 + \frac{19}{12}shR^2 + \frac{7}{18}s^3R$: Centrique gravitatis à TA distantia, $\frac{118R^2}{21P} + \frac{208shR^2 + 196s^3R}{441\alpha RP - 441sRP + 105shP}$.

Item, Ungulæ Segmenti Semicirculi, BVA, aciem habentis TA; momentum respectu TA, est, $\frac{5}{8}eR^3 + \frac{5}{8}svR^2 - \frac{5}{12}s^3R$

—

$-\frac{1}{4}s^3v$; & respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}eR^3 + \frac{3}{8}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$; & re- Fig. 166,
spectu b B V, $-\frac{5}{8}eR^3 + \frac{1}{2}avR^2 - \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R - \frac{1}{12}s^3v$; per § T. 170.
prop. 16.

Et Ungulæ Trilinei b B A aciem item habentis T A, momentum respectu T A, est $-\frac{5}{6}eR^3 + \frac{4}{3}avR^2 + \frac{1}{2}svR^2 - \frac{2}{3}as^2R - \frac{1}{9}s^3R - \frac{1}{3}as^2v$; & respectu $\tau\alpha$, $-\frac{2}{3}eR^3 + \frac{2}{3}avR^2 - \frac{1}{3}as^2R + \frac{1}{9}s^3R + \frac{1}{3}as^2v$; & respectu b B V, $\frac{5}{6}eR^3 - \frac{1}{12}avR^2 + \frac{3}{4}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{5}{36}s^3R - \frac{1}{6}as^2v$; per § E prop. 19.

Ergo Ungulæ Segmenti Semicycloidis b V A, aciem habentis T A, momentum respectu T A, est $-\frac{5}{24}eR^3 + \frac{4}{3}avR^2 + \frac{9}{8}svR^2 - \frac{2}{3}as^2R - \frac{19}{36}s^3R - \frac{1}{3}as^2v - \frac{1}{4}s^3v$; & respectu $\tau\alpha$, $-\frac{7}{24}eR^3 + \frac{2}{3}avR^2 + \frac{3}{8}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{5}{36}s^3R + \frac{1}{3}as^2v + \frac{1}{4}s^3v$; & respectu b B V, $\frac{5}{24}eR^3 + \frac{5}{12}avR^2 + \frac{5}{8}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{2}{9}s^3R - \frac{1}{6}as^2v - \frac{1}{12}s^3v$. Adeoque (propter magnitudinem, $-\frac{1}{4}eR^2 + avR + \frac{3}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{3}s^3$; per § F, G. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis à T A,

$$\frac{-15eR^3 + 96avR^2 + 81svR^2 - 48as^2R - 38s^3R - 24as^2v - 18s^3v}{-18eR^2 + 72avR + 54svR - 36as^2 - 24s^3};$$

$$= \frac{5}{6}R + \frac{6fvR^2 - 3fs^2R\ (= 3fv^2R) - 4as^2v - 3s^3v}{-3eR^2 + 12avR + 9svR - 6as^2 - 4s^3};$$ à $\tau\alpha$,

$$\frac{-21eR^3 + 48avR^2 + 27svR^2 - 24as^2R - 10s^3R + 24as^2v + 18s^3v}{-18eR^2 + 72avR + 54svR - 36as^2 - 24s^3}$$

$$= \frac{7}{6}R - \frac{3fv^2R - 4as^2v - 3s^3v}{-3eR^2 + 12avR + 9svR - 6as^2 - 4s^3};$$ à b B V,

$$\frac{15eR^3 + 30avR^2 + 45svR^2 - 24as^2R - 16s^3R - 12as^2v - 6s^3v}{-18eR^2 + 72avR + 54svR - 36as^2 - 24s^3}$$

$$= v - \frac{5}{6}R - \frac{3fv^2R - 4as^2v - 3s^3v}{-3eR^2 + 12avR + 9svR - 6as^2 - 4s^3} = \frac{7}{6}R - h - \frac{3fv^2R - 4as^2v - 3s^3v}{-3eR^2 + 12avR + 9svR - 6as^2 - 4s^3}.$$

Semisolidique correspondentis circa T A, magnitudo ad illud Ungulæ aciem habentis T A, ut $\frac{1}{2}P$ ad R. Momentum Semisolidi ad Momentum Ungulæ, ut 2 ad 1; Centrique gravitatis distantia in semisolido, ad illam Ungulæ, ut 2 R ad $\frac{1}{2}P$.

Similiter, Ungulæ Segmenti Semicirculi B V A, aciem habentis $\tau\alpha$; momentum respectu $\tau\alpha$, est, $\frac{5}{8}eR^3 + \frac{5}{8}svR^2 + \frac{11}{12}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$; & respectu b B V, $-\frac{3}{8}eR^3 + \frac{1}{2}avR^2 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{12}s^3v$; per § T. prop. 16.

Ungulæque Trilinei b B A, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum re-

spectu

Fig. 166, 170. spectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{6}fR^3 + \frac{1}{2}sbR^2 - \frac{1}{9}s^3R - \frac{1}{3}ab^3 = -\frac{11}{6}eR^3 + \frac{4}{3}avR^2 - \frac{1}{2}svR^2 + \frac{4}{3}as^2R - \frac{1}{9}s^3R - \frac{1}{3}as^2v$; & respectu b B V, $\frac{5}{6}fR^3 - \frac{3}{4}abR^2 - \frac{1}{4}sbR^2 - \frac{1}{9}s^3R - \frac{1}{4}sb^2R + \frac{1}{6}ab^3 = \frac{2}{3}eR^3 + \frac{1}{12}avR^2 + \frac{3}{4}svR^2 - \frac{2}{3}as^2R + \frac{5}{36}s^3R + \frac{1}{6}as^2v$; per § E. prop. 19.

Adeoque Ungulæ Segmenti Semicycloidis b V A, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$, $-\frac{29}{24}eR^3 + \frac{4}{3}avR^2 + \frac{1}{8}svR^2 + \frac{4}{3}as^2R + \frac{29}{36}s^3R - \frac{1}{3}as^2v - \frac{1}{4}s^3v$; & respectu b B V, $\frac{7}{24}eR^3 + \frac{7}{12}avR^2 + \frac{7}{8}svR^2 - \frac{2}{3}as^2R - \frac{1}{9}s^3R + \frac{1}{6}as^2v + \frac{1}{12}s^3v$; & respectu T A, (idem quod aciem habentis T A, momentum respectu $\tau\alpha$,) $-\frac{7}{24}eR^3 + \frac{2}{3}avR^2 + \frac{3}{8}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{5}{36}s^3R + \frac{1}{3}as^2v + \frac{1}{4}s^3v$. Adeoque (propter magnitudinem, $-\frac{3}{4}eR^2 + avR + \frac{1}{4}svR + \frac{1}{2}as^2 + \frac{1}{3}s^3$; per § F, G. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis, à $\tau\alpha$

$$\frac{-87eR^3 + 96avR^2 + 9svR^2 + 96as^2R + 58s^3R - 24as^2v - 18s^3v}{-54eR^2 + 72avR + 18svR + 36as^2 + 24s^3};$$

à b B V, $$\frac{21eR^3 + 42avR^2 + 63svR^2 - 48as^2R - 8s^3R + 12as^2v + 6s^3v}{-54eR^2 + 72avR + 18svR + 36as^2 + 24s^3};$$

à T A; $$\frac{-21eR^3 + 48avR^2 + 27svR^2 - 24as^2R - 10s^3R + 24as^2v + 18s^3v}{-54eR^2 + 72avR + 18svR + 36as^2 + 24s^3}.$$

Semisolidique correspondentis circa $\tau\alpha$, Magnitudo ad illud Ungulæ, ut $\frac{1}{2}P$ ad R; Momentum respectu axis sui $\tau\alpha$, ad illud Ungulæ, ut 2 ad 1; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, ad illam Ungulæ, ut 2 R ad $\frac{1}{2}P$.

Similiter, Ungulæ Segmenti Semicirculi B V A, aciem habentis b B V, momentum respectu b B V, est, $\frac{5}{8}eR^3 + \frac{5}{8}svR^2 - \frac{1}{2}as^2R + \frac{1}{12}s^3R - \frac{1}{12}s^3v$; per § V. prop. 16. Et Ungulæ Trilinei b B A, aciem habentis b B V, respectu b B V, est $-\frac{5}{6}eR^3 + \frac{5}{6}avR^2 + \frac{1}{3}as^2R - \frac{11}{18}s^3R - \frac{1}{3}as^2v$; per § E. prop. 19.

Ergo, Ungulæ Segmenti Semicycloidis b V A, aciem habentis b B V, momentum respectu b B V, est $-\frac{5}{24}eR^3 + \frac{5}{6}avR^2 + \frac{5}{8}svR^2 - \frac{1}{6}as^2R - \frac{19}{36}s^3R - \frac{1}{3}as^2v - \frac{1}{12}s^3v$: Ejusque momentum respectu T A (idem atque aciem habentis T A, respectu b B V,) $\frac{5}{24}eR^3 + \frac{5}{12}avR^2 + \frac{5}{8}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{2}{9}s^3R - \frac{1}{6}as^2v - \frac{1}{12}s^3v$; & respectu $\tau\alpha$ (idem atque aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu b B V,) $\frac{7}{24}eR^3 + \frac{7}{12}avR^2 + \frac{7}{8}svR^2 - \frac{2}{3}as^2R - \frac{1}{9}s^3R + \frac{1}{6}as^2v + \frac{1}{12}s^3v$. Ergo (propter magnitudinem $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{2}avR + \frac{3}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{6}s^3$; per § F. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis à b B V,

$-15eR^3$

$$\frac{-15eR^3+60avR^2+45svR^2-12as^2R-38s^3R-24as^2v-6s^3v}{18eR^2+36avR+54svR-36as^2-12s^3}$$ Fig. 166, 170.

$$=\frac{2}{6}R-b\left(=v-\frac{5}{6}R\right)+\frac{2as^2v+s^3v-es^2R}{3eR^2+6avR+9svR-6as^2-2s^3};$$ à TA,

$$\frac{15eR^3+30avR^2+45svR^2-24as^2R-16s^3R-12as^2v-6s^3v}{18eR^2+36avR+54svR-36as^2-12s^3}$$

$$=\frac{5}{6}R-\frac{2as^2v+s^3v-es^2R}{3eR^2+6avR+9svR-6as^2-2s^3};$$ à $\tau\alpha$,

$$\frac{21eR^3+42avR^2+63svR^2-48as^2R-8s^3R+12as^2v+6s^3v}{18eR^2+36avR+54svR-36as^2-12s^3}$$

$$=\frac{2}{6}R+\frac{2as^2v+s^3v-es^2R}{3eR^2+6avR+9svR-6as^2-2s^3}.$$ Semiſolidique correſpondentis circa b V; magnitudo, ad illam Ungulæ, ut $\frac{1}{2}P$ ad R, nempe $\frac{1}{8}eRP+\frac{1}{4}avP+\frac{3}{8}svP-\frac{as^2P}{4R}-\frac{s^3P}{12R}$: Momentum, ad illud Ungulæ, ut 2 ad 1, adeoque $-\frac{5}{12}eR^3+\frac{5}{3}avR^2+\frac{5}{4}svR^2-\frac{1}{3}as^2R-\frac{19}{18}s^3R-\frac{2}{3}as^2v-\frac{1}{6}s^3v$: Diſtantia Centri gravitatis à b V (utpote ad illam Ungulæ ut 2 R ad $\frac{1}{2}P$,)

$$\frac{-30eR^4+120avR^3+90svR^3-24as^2R^2-76s^3R^2-48as^2vR-12s^3vR}{9eR^2P+18avRP+27svRP-18as^2P-6s^3P}.$$

Eademque habentur ope Trapezii b $\beta\alpha$ V, & Ungularum huic inſiſtentium. Quippe ſubductis Ungulis Trapezii b $\beta\alpha$ V, ex reſpectivis Ungulis portionis b $\beta\alpha$ A; reſtant Ungulæ Segmenti b V A. Et de momentis ſimiliter. F.

Eſt autem Ungulæ Trianguli B α V aciem habentis $\tau\alpha$, momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}sb^3$; reſpectu T A, $\frac{2}{3}sb^2R-\frac{1}{4}sb^3$; per § W. prop. 16. Ungulæque correſpondentis Parallelogrammi b $\beta\alpha$ B, momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}ab^3$; reſpectu T A, $ab^2R-\frac{1}{3}ab^3$; per § E. prop. 19.

Ergo Ungulæ Trapezii b $\beta\alpha$ V, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}ab^3+\frac{1}{4}sb^3=\frac{8}{3}aR^3+2sR^3-\frac{4}{3}avR^2-svR^2-\frac{4}{3}as^2R-s^3R+\frac{1}{3}as^2v+\frac{1}{4}s^3v$; reſpectu T A $ab^2R+\frac{2}{3}sb^2R-\frac{1}{3}ab^3-\frac{1}{4}sb^3=\frac{4}{3}aR^3+\frac{2}{3}sR^3-\frac{2}{3}avR^2-\frac{1}{3}svR^2+\frac{1}{3}as^2R+\frac{1}{3}s^3R-\frac{1}{3}as^2v-\frac{1}{4}s^3v$. Adeoque (propter magnitudinem, $\frac{1}{2}ab^2+\frac{1}{3}sb^2$, per § G. prop. præced.) Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{4a+3s}{6a+4s}b$; atque à TA, $2R-\frac{4a+3s}{6a+4s}b$.

Fig. 166, 170. Eademque momenta, ex reſpectivis correſpondentis Ungulæ portionis b$\beta\alpha$VA momentis, $\frac{25}{24}aR^3+\frac{22}{24}sR^3-\frac{7}{8}svR^2-\frac{7}{36}s^3R$, & $\frac{25}{24}aR^3+\frac{23}{24}sR^3+\frac{1}{24}svR^2+\frac{7}{36}s^3R$, (§ C. traditis,) ſubducta; relinquunt Ungulæ Segmenti bVA aciem habentis $\tau\alpha$, momentum reſpectu $\tau\alpha$, $-\frac{29}{24}aR^3+\frac{29}{24}sR^3$ $(=-\frac{29}{24}eR^3)+\frac{4}{3}avR^2+\frac{1}{8}svR^2+\frac{4}{3}as^2R+\frac{29}{36}s^3R-\frac{1}{3}as^2v-\frac{1}{4}s^3v$; & reſpectu TA, $-\frac{7}{24}aR^3+\frac{7}{24}sR^3$ $(=-\frac{7}{24}eR^3)+\frac{2}{3}avR^2+\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{3}as^2R-\frac{5}{36}s^3R+\frac{1}{3}as^2v+\frac{1}{4}s^3v$; ut ſupra § E. Unde reliqua deducentur ut prius.

Similiter; Ungulæ Trianguli BαV, aciem habentis TA; Momentum reſpectu $\tau\alpha$, (idem atque aciem habentis $\tau\alpha$, reſpectu TA,) $\frac{2}{3}sh^2R-\frac{1}{4}sh^3=\frac{2}{3}sR^3-\frac{1}{3}svR^2+\frac{1}{3}s^3R-\frac{1}{4}s^3v$; reſpectu TA, $2shR^2-\frac{4}{3}sh^2R+\frac{1}{4}sh^3=\frac{1}{3}shR^2+\frac{5}{6}s^3R-\frac{1}{4}s^3h=\frac{2}{3}sR^3-\frac{1}{3}svR^2+\frac{1}{3}s^3R+\frac{1}{4}s^3v$; per § W. prop. 16. Ungulæque correſpondentis Parallelogrammi b$\beta\alpha$B, aciem habentis TA, momentum reſpectu $\tau\alpha$ (idem atque aciem habentis $\tau\alpha$, reſpectu TA,) $ah^2R-\frac{1}{3}ah^3=\frac{4}{3}aR^3-\frac{2}{3}avR^2+\frac{1}{3}as^2R-\frac{1}{3}as^2v$; reſpectu TA, $\frac{8}{3}aR^3-\frac{1}{3}av^3=\frac{4}{3}abR^2+\frac{4}{3}as^2R-\frac{1}{3}as^2h=\frac{8}{3}aR^3-\frac{4}{3}avR^2+\frac{2}{3}as^2R+\frac{1}{3}as^2v$; per § E. prop. 19.

Ergo Ungulæ Trapezii b$\beta\alpha$V, aciem habentis TA, momentum reſpectu $\tau\alpha$ (idem atque aciem habentis $\tau\alpha$, reſpectu TA,) $ah^2R+\frac{2}{3}sh^2R-\frac{1}{3}ah^3-\frac{1}{4}sh^3=\frac{4}{3}aR^3+\frac{2}{3}sR^3-\frac{2}{3}avR^2-\frac{1}{3}svR^2+\frac{1}{3}as^2R+\frac{1}{3}s^3R-\frac{1}{3}as^2v-\frac{1}{4}s^3v$; & reſpectu TA, $\frac{8}{3}aR^3+2shR^2-\frac{4}{3}sh^2R-\frac{1}{3}av^3+\frac{1}{4}sh^3=\frac{4}{3}ahR^2+\frac{1}{3}shR^2+\frac{4}{3}as^2R+\frac{5}{6}s^3R-\frac{1}{3}as^2h-\frac{1}{4}s^3h=4ahR^2+2shR^2-2ah^2R-\frac{4}{3}sh^2R+\frac{1}{3}ah^3+\frac{1}{4}sh^3=\frac{8}{3}aR^3+\frac{2}{3}sR^3-\frac{4}{3}avR^2-\frac{1}{3}svR^2+\frac{2}{3}as^2R+\frac{1}{3}s^3R+\frac{1}{3}as^2v+\frac{1}{4}as^3v$. Adeoque (propter magnitudinem $2ahR+shR-\frac{1}{2}ah^2-\frac{1}{3}sh^2=2aR^2+\frac{2}{3}sR^2-avR-\frac{1}{3}svR+\frac{1}{2}as^2+\frac{1}{3}s^3$; per § G. prop. præced.) Diſtan. Cen. grav. à $\tau\alpha$, $\frac{12aR+8sR-4ah-3sh}{24aR+12sR-6ah-4sh}h=\frac{1}{2}h+\frac{2sR-fh}{24aR+12sR-6ah-4sh}h$; à TA, $2R-\frac{1}{2}h-\frac{2sR-fh}{24aR+12sR-6ah-4sh}h$.

Eademque Momenta, ex reſpectivis Momentis correſpondentis Ungulæ portionis b$\beta\alpha$VA, $\frac{25}{24}aR^3+\frac{23}{24}sR^3+\frac{1}{24}svR^2+\frac{7}{36}s^3R$, & $\frac{19}{24}aR^3+\frac{7}{8}sR^3+\frac{19}{24}svR^2-\frac{7}{36}s^3R$, (§ C. traditis,) ſubducta; Relinquunt Ungulæ Segmenti bVA, aciem habentis TA, momentum reſpectu $\tau\alpha$, $-\frac{7}{24}aR^3+\frac{7}{24}sR^3$ $(=-\frac{7}{24}eR^3)+\frac{2}{3}avR^2+\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{3}as^2R-\frac{5}{36}s^3R+\frac{1}{3}as^2v+\frac{1}{4}s^3v$; & reſpectu TA, $-\frac{5}{24}aR^3+\frac{5}{24}sR^3$ $(=-\frac{5}{24}eR^3)+\frac{4}{3}avR^2+\frac{9}{8}svR^2-\frac{2}{3}as^2R-\frac{19}{36}s^3R-\frac{1}{3}as^2v-\frac{1}{4}s^3v$: Ut ſupra § E. Unde reliqua deducentur ut prius.

Accedimus

Accedimus ad considerationem Momenti Ungularum Semicycloidis, ejusque partium, aciem habentium $\tau\alpha$ vel huic parallelam, respectu rectæ $A\alpha$, aut parallelæ huic: Adeoque & (propter distantias & altitudines reciprocatas,) aciem habentium $A\alpha$ aut huic parallelam, momenti respectu $\tau\alpha$, aut parallelæ huic: Eorumque quæ hinc dependent. G. Fig. 166, 168, 170.

Distributis itaque (ut ad § H. prop. præced. & alibi,) tum Semicirculo in sua minuta Triangula αB, seu $Y\alpha P$; tum Semicycloide in respectiva Trapezia βb, seu $y\delta\xi p$, fig. 168. quæ respective æqualia sint ipsis $Y\alpha P$ Triangulis, & parallelogrammis $y\delta\xi p$ fig. 170. simul sumptis: Erigi intelligantur, ut prius, Ungulæ Semiquadrantales aciem habentes $\tau\alpha$; quas compleant iisdem Triangulis, Trapeziisque minutis, insistentes minutæ Ungulæ. Quæ itaque Trapeziorum Ungulæ, æquales erunt respectivis Triangulorum & Parallelogrammorum Ungulis simul sumptis: Ut ad § C jam ostensum est.

Ungulæ Trianguli $Y\alpha P$ (Pyramis cum sit) adeóque & huic æquales similiterque positæ Trianguli (in Trapezio intermedii) $\upsilon\beta\pi$, Centrum gravitatis (illic in αB, hic in βb, positis,) à $\tau\alpha$ distabit Dodrante altitudinis, (per prop. 6. hujus,) hoc est, $\frac{3}{4}V\alpha = \frac{3}{4}b$. Adeoque ipsius $Y\alpha P$ pyramidis (sed non & ipsius $\upsilon\beta\pi$) distantia ab $A\alpha$, $\frac{3}{4}BV = \frac{3}{4}s$.

Ungulæque parallelogrammi $y\delta\xi p$ fig. 170. (utpote Prismatis, duabus basibus Triangularibus interjecti,) centrum gravitatis à $\tau\alpha$ distat, altitudinis Besse, (quantum scilicet inde distat Trianguli centrum,) per prop. 5, 6. hujus; hoc est, $\frac{2}{3}V\alpha = \frac{2}{3}b$. Atque tantundem inde distat bipartitæ Ungulæ, parallelogrammis $\upsilon\delta$, $\pi\xi$, (utrinque à $b\beta$ æqualiter remotis,) fig. 168. Centrum gravitatis, in ipsa $b\beta$ positum. Ejusque Centri, à Centro Ungulæ $\upsilon\beta\pi$ modò indicati in eadem $b\beta$, distantia, (altitudinem quod spectat, seu distantiam à $\tau\alpha$,) est $\frac{3}{4}b - \frac{2}{3}b = \frac{1}{12}b$. Adeoque, propter Prismatis magnitudinem ad magnitudinem Pyramidis, ut $\frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{3}$, seu 3 ad 2, (est utique Prisma dimidium correspondentis Parallelepipedi, & Pyramis ejusdem Triens,) altitudini centri Prismatis additis duabus quintis differentiæ altitudinum, hoc est $\frac{2}{5} \times \frac{1}{12}b = \frac{1}{30}b$, habetur Ungulæ Trapezii $y\delta\xi p$ (ex utrisque constantis) altitudo Centri gravitatis, seu distantia à $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}b + \frac{1}{30}b = \frac{7}{10}b$. Adeoque ejusdem ab $A\alpha$ distantia, $bB + \frac{7}{10}BV = a + \frac{7}{10}s$.

Cum itaque Ungula Trapezii cujusque $y\delta\xi p$, ad respectivam Trianguli $Y\alpha P$ Ungulam sit, magnitudine, ut 5 ad 2, (ut ad § A. ostensum

Fig. 166, oſtenſum eſt :) Sitque illius Diſtantia Centri gravitatis ab A α, ad
168, hujus diſtantiam, ut $a + \frac{7}{10}s$ ad $\frac{3}{4}s$; erit Ungulæ Trapezii cujuſque
170. y δ ξ p momentum ad momentum correſpondentis Ungulæ Trianguli Y α P, reſpectu ejuſdem A α, ut $5a + \frac{7}{2}s$ ad $\frac{3}{2}s$.

Cúmque hoc ubique obtineat; (ſitque eadem ubique magnitudinis Ungulæ Trapezii ad magnitudinem Ungulæ Trianguli ratio, ut 5 ad 2 :) Erit momentum Ungulæ Totius Semicycloidis, ejúſve portionis A b β α, aut b β δ d, aut b β τ, &c (nam in partibus perinde procedit demonſtratio atque in totis,) ad correſpondens Momentum Ungulæ Semicirculi, ejuſve ſectoris B α A, aut B α D, aut α D α ſegmenti, &c. (quarum acies ſint τ α,) reſpectu rectæ A α: Ut omnes illæ Trianguli Ungulæ, Pyramideſve, eo ſpectantes, in diſtantias reſpective $5a + \frac{7}{2}s$; ad eaſdem in $\frac{3}{2}s$, ductas; ſeu ut omnia quadrata V α (quibus, propter Y P ubique æquales, proportionales ſunt illæ pyramides) in $5a + \frac{7}{2}s$, ad eadem quadrata V α in $\frac{3}{2}s$: Hoc eſt, ut *Omnia* $5ah^2 + \frac{7}{2}sh^2$ eo ſpectantia, ad *omnia* $\frac{3}{2}sh^2$ reſpectiva; ſeu, ut *omnia* $10ah^2 + 7sh^2$, ad *omnia* $3sh^2$, eo ſpectantia: Hoc eſt, ut 7 ad 3, atque inſuper ut *omnia* $10ah^2$, ad *omnia* $3sh^2$, eo ſpectantia; ſumptis a arcubus arithmetice proportionalibus.

Sunt autem (pro A b β α portione) *omnia* ah^2 (ſumptis a arithmetice proportionalibus;) hoc eſt, Omnes a arcus arithmetice proportionales, in quadrata Sinuum verſorum, arcuum ad Semicirculum reſiduorum; idem atque *Duplum* Momenti correſpondentis Ungulæ A b β α fig. 170. aciem habentis τ α, reſpectu rectæ A α; (propter Triangula ſingulis b β rectis ibidem inſiſtentia, $\frac{1}{2}h^2$; eorumque ab A α diſtantiam, a; adeoque momenta, $\frac{1}{2}ah^2$:) Hoc eſt, Duplum ipſius $\frac{3}{8}a^2R^2 + \frac{5}{4}asR^2 - \frac{1}{4}asvR - vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$; per § F. prop. 19. Adeoque earundem Decuplum, ſeu Omn. $10ah^2$; eſt hujus Momenti Vigecuplum; hoc eſt, $\frac{15}{2}a^2R^2 + 25asR^2 - 5asvR - 20vR^3 - \frac{5}{2}s^2R^2$.

Suntque *Omnia* sh^2, eo ſpectantia; hoc eſt, earundem arcuum arithmetice proportionalium Sinus recti, in Sinuum verſorum, arcuum ad ſemicirculum reſiduorum, quadrata: Idem atque Duplum Momenti Solidi, quadrilineo A b β α fig. 170. incumbentis, ex ductu rectarum b β, in β v facti, reſpectu rectæ τ α: Hoc eſt, Duplum ipſius, $\frac{2}{3}vR^3 + \frac{2}{3}s^2R^2 - \frac{1}{6}s^2vR$ per § E. prop. 18. Adeoque eorundem Triplum, ſeu *Omn.* $3sh^2$; eſt hujus momenti ſextuplum, hoc eſt, $4vR^3 + 4s^2R^2 - s^2vR$.

Ergo *Omn.* $10ah^2$: ad *Omn.* $3sh^2$: (portionem A b β α ſpectantia;) ſunt, ut $\frac{15}{2}a^2R^2 + 25asR^2 - 5asvR - 20vR^3 - \frac{5}{2}s^2R^2$, ad

$4vR^3 + 4s^2R^2 - s^2vR$: Cui si adjungatur, prius memorata, ratio Fig. 166,
7 ad 3 seu $\frac{28}{3}vR^3 + \frac{28}{3}s^2R^2 - \frac{7}{3}s^2vR$, ad $4vR^3 + 4s^2R^2 - s^2vR$: 168,
Habetur ratio momenti ungulæ portionis Semicycloidis A b β α, ad 170.
momentum Ungulæ Sectoris B α A, (quarum acies τ α,) respectu ipsius A α; $\frac{15}{2}a^2R^2 + 25asR^2 - 5asvR - \frac{32}{3}vR^3 + \frac{41}{6}s^2R^2 - \frac{7}{3}s^2vR$, ad $4vR^2 + 4s^2R^2 - s^2vR$.

Cum itaque momentum illud Ungulæ Sectoris B α A sit (consequentis subduodecuplum) $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2v$, (per § L. prop. 16.) erit, Ungulæ portionis Semicycloidis A b β α, aciem habentis τ α, Momentum respectu A α, (subduodecuplum antecedentis,) $\frac{5}{8}a^2R^2 + \frac{25}{12}asR^2 - \frac{5}{12}asvR - \frac{8}{9}vR^3 + \frac{41}{72}s^2R^2 - \frac{7}{36}s^2vR$. Idemque est, Ungulæ portionis Semicycloidis A b β α, aciem habentis A α, momentum respectu τ α.

Quod quidem Momentum, divisum per Ungulæ illius A b β α, aciem habentis τ α, magnitudinem, $\frac{5}{4}fR^2 + \frac{5}{12}shR = \frac{5}{4}aR^2 + \frac{25}{12}sR^2 - \frac{5}{12}svR$, (per § D. prop. præced.) exhibet Distantiam Centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{2}a - \frac{64vR^2 - 75asR - 41s^2R + 15asv + 14s^2v}{90aR + 150sR - 30sv}$ $= a - \frac{45a^2R + 64vR^2 - 41s^2R + 14s^2v}{90aR + 150sR - 30sv}$.

Idemque Momentum, divisum per Ungulæ ejusdem A b β α portionis Semicycloidis, aciem habentis A α, magnitudinem $\frac{3}{4}a^2R + \frac{3}{2}asR - \frac{2}{3}vR^2 + \frac{5}{12}s^2R$, per § I. prop. præced. exhibet hujus Distantiam Centri gravitatis à τ α, $\frac{5}{6}R - \frac{12vR^2 - 30asR - 8s^2R + 15asv + 7s^2v}{27a^2 + 54as - 24vR + 15s^2}$; à TA, $\frac{7}{6}R + \frac{12vR^2 - 30asR - 8s^2R + 15asv + 7s^2v}{27a^2 + 54as - 24vR + 15s^2}$. Adeoque ejusdem respectu T A, momentum, $\frac{7}{8}a^2R^2 + \frac{11}{12}asR^2 - \frac{4}{9}vR^3 + \frac{19}{72}s^2R^2 + \frac{5}{12}asvR + \frac{7}{36}s^2vR$.

Quod ipsum, est etiam Momentum Ungulæ portionis Semicycloidis A b β α, aciem habentis T A, respectu A α. Adeoque, si per hujus Ungulæ magnitudinem $\frac{7}{4}fR^2 - \frac{5}{12}shR = \frac{7}{4}aR^2 + \frac{11}{12}sR^2 + \frac{5}{12}svR$ (per § D. prop. præced.) dividatur: Habetur ejusdem Distantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{2}a + \frac{33asR + 19s^2R - 32vR^2 + 15asv + 14s^2v}{126aR + 66sR + 30sv} = a - \frac{63a^2R - 19s^2R + 32vR^2 - 14s^2v}{126aR + 66sR + 30sv}$.

H. Si igitur totius Semicycloidis A τ α, Ungulas spectemus: Quoniam hoc

casu

Fig. 166, casu est $a = \frac{1}{2}P$, $v = 2R$, & $s = 0$; erit Ungulæ A$\tau\alpha$, aciem habentis
168, $\tau\alpha$, momentum respectu Aα, $\frac{5}{32}R^2P^2 - \frac{16}{9}R^4$; Magnitudo, $\frac{5}{8}R^2P$;
170. Centrique gravitatis ab Aα distantia, $\frac{1}{4}P - \frac{128R^2}{45P}$.

Aciemque habentis Aα, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{32}R^2P^2 - \frac{16}{9}R^4$; Magnitudo, $\frac{3}{16}RP^2 - \frac{4}{3}R^3$; Centrique gravitatis distantia à $\tau\alpha$, $\frac{5}{6}R - \frac{32R^3}{9P^2 - 64R^2}$; à TA, $\frac{7}{6}R + \frac{32R^3}{9P^2 - 64R^2}$; Momentum respectu TA, $\frac{7}{32}R^2P^2 - \frac{8}{9}R^4$.

Aciemque habentis TA, momentum respectu Aα, $\frac{7}{32}R^2P^2 - \frac{8}{9}R^4$; Magnitudo, $\frac{7}{8}R^2P$; Distantia Centri gravitatis, ab Aα, $\frac{1}{4}P - \frac{64R^2}{63P}$.

I. Si autem ex Ungularum Totius Semicycloidis A$\tau\alpha$ Magnitudinibus & Momentis; auferantur respectivè Magnitudines & Momenta Ungularum A b $\beta\alpha$: Habentur Ungularum b $\beta\tau$, Magnitudines & Momenta.

Puta, si ex Ungulæ A$\tau\alpha$, aciem habentis $\tau\alpha$, Magnitudine $\frac{5}{8}R^2P$; & Momento respectu Aα, $\frac{5}{32}R^2P^2 - \frac{16}{9}R^4$; modo exhibitis: Auferantur respectivæ Ungulæ A b $\beta\alpha$, magnitudo, $\frac{5}{4}fR^2 + \frac{5}{12}shR = \frac{5}{4}aR^2 + \frac{25}{12}sR^2 - \frac{5}{12}svR$; & momentum respectu A$\alpha$, $\frac{5}{8}a^2R^2 + \frac{25}{12}asR^2 - \frac{5}{12}asvR - \frac{8}{9}vR^3 + \frac{41}{72}s^2R^2 - \frac{7}{36}s^2vR$; supra tradita § G. Habetur Ungulæ portionis Semicycloidis b $\beta\tau$, aciem habentis $\tau\alpha$, Magnitudo, $\frac{5}{8}R^2P - \frac{5}{4}aR^2 - \frac{25}{12}sR^2 + \frac{5}{12}svR$, seu (propter $\alpha = \frac{1}{2}P - a$, & $h = 2R - v$,) $\frac{5}{4}\alpha R^2 - \frac{5}{4}sR^2 - \frac{5}{12}shR$; ejusque, respectu A$\alpha$, momentum, $\frac{5}{32}R^2P^2 - \frac{5}{8}a^2R^2 - \frac{16}{9}R^4 + \frac{8}{9}vR^3 - \frac{25}{12}asR^2 + \frac{5}{12}asvR - \frac{41}{72}s^2R^2 + \frac{7}{36}s^2vR$: Adeoque Centri gravitatis ab Aα distantia, $a +$

$$\frac{45RP^2 - 180aRP + 180a^2R - 512R^3 + 256vR^2 - 164s^2R + 56s^2v}{180RP - 360aR - 600sR + 120sv}.$$

Si ex Ungulæ A$\tau\alpha$, aciem habentis TA, magnitudine, $\frac{7}{8}R^2P$; & momento respectu Aα, $\frac{7}{32}R^2P^2 - \frac{8}{9}R^4$, modo traditis: Auferantur respectivæ Ungulæ A b $\beta\alpha$, magnitudo, $\frac{7}{4}fK^2 - \frac{5}{12}shR = \frac{7}{4}aR^2 + \frac{11}{12}sR^2 + \frac{5}{12}svR$; & momentum respectu A$\alpha$, $\frac{7}{8}a^2R^2 + \frac{11}{12}asR^2 - \frac{4}{9}vR^3 + \frac{19}{72}s^2R^2 + \frac{5}{12}asvR + \frac{7}{36}s^2vR$; supra tradita § G. Habetur Ungulæ b $\beta\tau$, aciem habentis TA, magnitudo, $\frac{7}{8}R^2P - \frac{7}{4}aR^2 - \frac{11}{12}sR^2 - \frac{5}{12}svR = \frac{7}{4}\alpha R^2 - \frac{7}{4}sR^2 + \frac{5}{12}shR$; ejusque momentum respectu Aα, $\frac{7}{32}R^2P^2 - \frac{8}{9}R^4 - \frac{7}{8}a^2R^2 + \frac{4}{9}vR^3 - \frac{11}{12}asR^2 - \frac{19}{72}s^2R^2$

—

$-\frac{5}{12}asvR - \frac{7}{36}s^2vR$: Adeoque Centri gravitatis ab A α distantia, $a +$ Fig. 166, 168, 170.

$$\frac{63RP^2 - 252aRP - 256R^3 + 128vR^2 + 252a^2R - 76s^2R - 56s^2v}{252RP - 504aR - 264sR - 120sv}.$$

Si ex Ungulæ A$\tau\alpha$, aciem habentis Aα, magnitudine, $\frac{3}{16}RP^2 - \frac{4}{3}R^3$; Momento reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{32}R^2P^2 - \frac{16}{9}R^4$; & reſpectu TA, $\frac{7}{32}R^2P^2 - \frac{8}{9}R^4$; modo traditis: Auferantur reſpectivæ Ungulæ A b$\beta\alpha$, Magnitudo $\frac{3}{4}a^2R + \frac{3}{2}asR - \frac{2}{3}vR^2 + \frac{5}{12}s^2R$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{8}a^2R^2 + \frac{25}{12}asR^2 - \frac{5}{12}asvR - \frac{8}{9}vR^3 + \frac{41}{72}s^2R^2 - \frac{7}{36}s^2vR$; & reſpectu TA, $\frac{7}{8}a^2R^2 + \frac{11}{12}asR^2 - \frac{4}{9}vR^3 + \frac{19}{72}s^2R^2 + \frac{5}{12}asvR + \frac{7}{36}s^2vR$: Habetur Ungulæ b$\beta\tau$, aciem habentis A$\alpha$, magnitudo, $\frac{3}{16}RP^2 - \frac{4}{3}R^3 - \frac{3}{4}a^2R - \frac{3}{2}asR + \frac{2}{3}vR^2 - \frac{5}{12}s^2R$; Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{32}R^2P^2 - \frac{16}{9}R^4 - \frac{5}{8}a^2R^2 - \frac{25}{12}asR^2 + \frac{8}{9}vR^3 - \frac{41}{72}s^2R^2 + \frac{5}{12}asvR + \frac{7}{36}s^2vR$; reſpectu TA, $\frac{7}{32}R^2P^2 - \frac{8}{9}R^4 - \frac{7}{8}a^2R^2 - \frac{11}{12}asR^2 + \frac{4}{9}vR^3 - \frac{19}{72}s^2R^2 - \frac{5}{12}asvR - \frac{7}{36}s^2vR$: Adeoque Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{5}{6}R -$

$$\frac{192R^3 - 96vR^2 + 240asR + 64s^2R - 120asv - 56s^2v}{54P^2 - 384R^2 - 216a^2 - 432as + 192vR - 120s^2};$$

à TA, $\frac{7}{6}R + \dfrac{192R^3 - 96vR^2 + 240asR + 64s^2R - 120asv - 56s^2v}{54P^2 - 384R^2 - 216a^2 - 432as + 192vR - 120s^2}$.

Atque hinc facile derivabitur, Ungulæ b$\beta\tau$ aciem habentis Tτ, Momentum reſpectu $\tau\alpha$, vel TA, Centrique gravitatis inde diſtantia.

Sed & hæc omnia quæ Ungulas b$\beta\tau$ in Semicycloide (fig. 165.) ſpectant, poſſunt etiam per ſe exquiri, ſine ope Ungularum A b$\beta\alpha$. Nam & hic etiam perinde valet, quod § G. demonſtratur: Nempe Momentum Ungulæ b$\beta\tau$, aciem habentis $\tau\alpha$, reſpectu Aα; ad momentum reſpectivæ Ungulæ ſegmenti αBα, aciem habentis $\tau\alpha$, reſpectu Aα; eſſe ut 7 ad 3, atque inſuper ut *Omn.* $10ah^2$, ad *Omn* $3sb^2$, ſeu, ut 7 ad 3, atque inſuper ut *Vigecuplum* Momenti Ungulæ b$\beta\tau$ in figura Sinuum verſorum fig. 170. aciem habentis $\tau\alpha$, reſpectu Aα; ad *Sextuplum* Momenti Ungulæ Segmenti circularis αBα fig. 169. aciem habentis $\tau\alpha$, reſpectu Aα. Idemque erit, Ungulæ b$\beta\tau$ fig. 166, 168. aciem habentis Aα, momentum reſpectu $\tau\alpha$. Unde & cætera eo ſpectantia derivari poterunt; eadem quæ prius.

Deinde;

K. Fig. 166, 170. Deinde; Si ex Momentis Ungularum A b $\beta\alpha$, auferantur respectiva Momenta Ungularum Trapezii b $\beta\alpha$ V; restabunt respectiva Ungularum A b V Momenta.

Constat autem Ungula Trapezii b $\beta\alpha$ V, fig. 166. aciem habentis $\tau\alpha$; ex duabus Ungulis; Nempe Trianguli B α V, & Parallelogrammi b β α B.

Est autem Ungulæ Trianguli B α V, aciem habentis $\tau\alpha$; Momentum respectu A α, $\frac{1}{8}s^2h^2$, per § M. prop. 16.

Ungulæque Parallelogrammi b $\beta\alpha$ B, magnitudo (quippe eadem quæ respectivæ Ungulæ b $\beta\alpha$ B fig. 170.) $\frac{1}{2}ah^2$, per § F. prop. 17. Centrique gravitatis à $\tau\alpha$ distantia, $\frac{2}{3}h$, (per § C. prop. 5.) adeoque ab A α, $\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}s$, (ut ex schematis aspectu facile colligitur:) Et propterea, ejusdem respectu A α, momentum, $\frac{1}{4}a^2h^2 + \frac{1}{3}ash^2$.

Ergo; Ungulæ Totius Trapezii b $\beta\alpha$ V, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu A α, est $\frac{1}{4}a^2h^2 + \frac{1}{3}ash^2 + \frac{1}{8}s^2h^2$, seu (propter $h = 2R - v$, adeoque $h^2 = 4R^2 - 4vR + v^2 = 4R^2 - 2vR - s^2$,) $a^2R^2 - \frac{1}{2}a^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2 + \frac{4}{3}asR^2 - \frac{2}{3}asvR - \frac{1}{3}as^3 + \frac{1}{2}s^2R^2 - \frac{1}{4}s^2vR - \frac{1}{8}s^4$. Idemque est Ungulæ b $\beta\alpha$ V, aciem habentis A α, momentum respectu $\tau\alpha$; propter Distantias & Altitudines reciprocatas.

Quod itaque momentum, per Ungulæ aciem habentis $\tau\alpha$ magnitudinem $\frac{1}{2}ah^2 + \frac{1}{3}sh^2$ (ut § F. ostensum est) divisum; exhibet ejusdem Centri gravitatis ab A α distantiam, $\frac{1}{2}a + \frac{4as + 3s^2}{12a + 8s} = \frac{1}{2}a + \frac{4a + 3s}{12a + 8s}s = \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}s + \frac{s^2}{36a + 24s}$.

Idemque momentum, per Ungulæ aciem habentis A α, magnitudinem $\frac{1}{2}fah + \frac{1}{6}s^2h = \frac{1}{2}a^2h + \frac{1}{2}ash + \frac{1}{6}s^2h$ (per § K. prop. præced.) divisum; exhibet hujus Ungulæ Distantiam Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{6a^2 + 8as + 3s^2}{12a^2 + 12as + 4s^2}h = \frac{1}{2}h + \frac{2as + s^2}{12fa + 4s^2}h$: Adeoque à T A, $2R - \frac{1}{2}h$ $(= R + \frac{1}{2}v)$ $- \frac{2a + s}{12fa + 4s^2}sh$. Et propterea ejusdem respectu T A, momentum, $fahR + \frac{1}{3}s^2hR - \frac{1}{4}a^2h^2 - \frac{1}{3}ash^2 - \frac{1}{8}s^2h^2$. Quod etiam (propter altitudines & distantias reciprocatas) est momentum Ungulæ b $\beta\alpha$ V, aciem habentis T A, respectu A α: Adeoque per Ungulæ b $\beta\alpha$ V aciem habentis T A, magnitudinem $2abR + sbR - \frac{1}{2}ab^2 - \frac{1}{3}sb^2$ (per § G. prop. præced.) divisum; exhibet hujus Distantiam Centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}s +$

$2s^2R$

$$\frac{2s^2R - fsh}{48aR + 24sR - 12ah - 8sh} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}s + \frac{fsv - 2asR}{24aR + 8sR + 12av + 8sv}.$$

Si itaque ex Ungulæ portionis Semicycloidis A b β α, aciem habentis $\tau\alpha$, Momento reſpectu A α; ſeu, aciem habentis A α, momento reſpectu $\tau\alpha$; $\frac{5}{8}a^2R^2 + \frac{25}{12}asR^2 + \frac{41}{72}s^2R^2 - \frac{8}{9}vR^3 - \frac{5}{12}asvR - \frac{7}{36}s^2vR$ (per § G.) auferatur reſpectivum Ungulæ b β α V momentum modò traditum, $a^2R^2 + \frac{4}{3}asR^2 + \frac{1}{2}s^2R^2 - \frac{1}{2}a^2vR - \frac{2}{3}asvR - \frac{1}{4}s^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2 - \frac{1}{3}as^3 - \frac{1}{8}s^4$: Habetur Ungulæ A b V, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum reſpectu A α; aciemve habentis A α, momentum reſpectu $\tau\alpha$; $-\frac{3}{8}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 + \frac{5}{72}s^2R^2 - \frac{8}{9}vR^3 + \frac{1}{2}a^2vR + \frac{1}{4}asvR + \frac{1}{18}s^2vR + \frac{1}{4}a^2s^2 + \frac{1}{3}as^3 + \frac{1}{8}s^4$.

Quod per Ungulæ A b V, aciem habentis $\tau\alpha$, magnitudinem, $-\frac{3}{4}aR^2 + \frac{3}{4}sR^2 + avR + \frac{1}{4}svR + \frac{1}{2}as^2 + \frac{1}{3}s^3$, (per § F, G. prop. præced.) diviſum; exhibet ejuſdem diſtantiam centri gravitatis ab A α,

$$\frac{1}{2}a + \frac{27asR^2 + 5s^2R^2 - 64vR^3 + 9asvR + 4s^2vR + 12as^3 + 9s^4}{-54eR^2 + 72avR + 18svR + 36as^2 + 24s^3}.$$

Idemque momentum per Ungulæ A b V, aciem habentis A α, magnitudinem, $-\frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{2}asR + \frac{5}{12}s^2R - \frac{2}{3}vR^2 + \frac{1}{2}a^2v + \frac{1}{2}asv + \frac{1}{6}s^2v$, (per § K, L. prop. præced.) diviſum; exhibet ejuſdem diſtantiam centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3}{2}R -$

$$\frac{4s^2R^2 - 8vR^3 + 18a^2vR + 36asvR + 14s^2vR - 18a^2s^2 - 24as^3 - 9s^4}{-18a^2R + 36asR + 6s^2R - 48vR^2 + 36a^2v + 36asv + 12s^2v}:$$

Adeoque à TA, $\frac{1}{32}R + \dfrac{4s^2R^2 - 8vR^3 + 18a^2vR + 36asvR + 14s^2vR - 18a^2s^2 - 24as^3 - 9s^4}{-18a^2R + 36asR + 6s^2R - 48vR^2 + 36a^2v + 36asv + 12s^2v}$;

à b V, $\frac{3}{32}R - h(= v - \frac{1}{2}R) - \dfrac{4s^2R^2 - 8vR^3 + 18a^2vR + 36asvR + 14s^2vR - 18a^2s^2 - 24as^3 - 9s^4}{-18a^2R + 36asR + 6s^2R - 48vR^2 + 36a^2v + 36asv + 12s^2v}$.

Ejuſque propterea reſpectu TA, momentum, $-\frac{1}{8}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 + \frac{7}{72}s^2R^2 - \frac{4}{9}vR^3 + \frac{1}{2}a^2vR + \frac{1}{4}asvR + \frac{5}{18}s^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2 - \frac{1}{3}as^3 - \frac{1}{8}s^4$: Et reſpectu b V, (factum ex v in magnitudinem, dempto momento reſpectu TA,) $\frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 - \frac{7}{72}s^2R^2 + \frac{4}{9}vR^3 - \frac{3}{4}a^2vR - \frac{1}{4}asvR - \frac{7}{36}s^2vR + \frac{1}{4}a^2s^2 + \frac{1}{3}as^3 + \frac{1}{8}s^4 - \frac{2}{3}v^2R^2 + \frac{1}{2}a^2v^2 + \frac{1}{2}asv^2 + \frac{1}{6}s^2v^2$; ſeu (propter $v^2 = 2vR - s^2$,) $\frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2$ +

Fig. 166.

Fig. 166. $+\frac{41}{72}s^2R^2 - \frac{8}{9}vR^3 + \frac{1}{4}a^2vR + \frac{3}{4}asvR + \frac{5}{36}s^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2 - \frac{1}{6}as^3 - \frac{1}{24}s^4$. Quæ duo, ſunt etiam (propter altitudines & diſtantias reciprocatas) momenta, reſpectu Aα, Ungularum AbV, acies habentium TA, & bV: Adeoque per harum reſpectivè magnitudines, $-\frac{1}{4}eR^2$ $(= -\frac{1}{4}aR^2 + \frac{1}{4}sR^2)$ $+avR + \frac{3}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{3}s^3$, & $\frac{1}{4}eR^2$ $(=\frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}sR^2)$ $+\frac{1}{2}avR + \frac{3}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{6}s^3$, (per § F, G. prop præced.) diviſa; exhibent earum diſtantiam centri gravitatis ab Aα: Nempe, Ungulæ AbV, aciem habentis TA, diſtantiam ab Aα,

$$\frac{1}{2}a + \frac{9asR^2 + 7s^2R^2 - 32vR^3 + 27asvR + 20s^2vR - 12as^3 - 9s^4}{-18eR^2 + 72avR + 54svR - 36as^2 - 24s^3};$$

aciemque habentis bV, ab eadem Aα diſtantiam

$$\frac{1}{2}a + \frac{41s^2R^2 - 9asR^2 - 64vR^3 + 27asvR + 10s^2vR - 6as^3 - 3s^4}{18eR^2 + 36avR + 54svR - 36as^2 - 12s^3}.$$

L. Eadem Momenta, Ungulas AbV ſpectantia (& quæ hinc dependent,) ſic adhuc alias inveſtigantur, abſque ope Ungularum Ab$\beta\alpha$.

Ungulam AbV, aciem habentem bV, (ſi planis ipſi AbV plano parallelis, æqualibus ab invicem diſtantiis remotis, ſectam intelligamus,) conſtituent, omnia AbV plana, eo ſpectantia; ſumptis AV, hoc eſt v, arithmetice proportionalibus, uſque ad AV, ſeu V, maximum. Adeoque eorum momenta reſpectu Aα, hoc eſt (per § K, L. prop. præced.) *Omn.* $-\frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{2}asR + \frac{1}{12}s^2R - \frac{2}{3}vR^2 + \frac{1}{2}a^2v + \frac{1}{2}asv + \frac{1}{6}s^2v$: (ſumptis v arithmetice proportionalibus;) complent ejuſdem AbV Ungulæ, aciem habentis bV, momentum reſpectu Aα; ſeu (propter altitudines & diſtantias reciprocatas) aciem habentis Aα, momentum reſpectu bV.

Sunt autem, *Omnia* $\frac{1}{2}a^2$ eo ſpectantia, (ſumptis v arithmeticè proportionalibus;) hoc eſt, momentum ipſius AbB fig. 170 plani, reſpectu Aα; (per § I. prop. 17.) $-\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2 + \frac{1}{2}a^2v$. Adeoque, *Omn.* $-\frac{1}{4}a^2R$: $=\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{1}{2}asR^2 + \frac{1}{2}vR^3 - \frac{1}{4}a^2vR$.

Item, *Omnia as*, eo ſpectantia; hoc eſt Solidum AbB fig. 170. ex ductu rectarum bB, in BV (fig. 169.) reſpective; (per § L. prop. 18.) $\frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{4}s^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{2}asv$. Adeoque *Omn.* $\frac{1}{2}asR$: $=\frac{1}{8}a^2R^2 + \frac{1}{8}s^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 + \frac{1}{4}asvR$.

Item *Omnia* $\frac{1}{2}s^2$, eo ſpectantia; hoc eſt, Momentum Segmenti Semicirculi ABV fig. 169. reſpectu Aα; (per § R. prop. 15.)

$\frac{1}{3}vR^2$

$\frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2v$. Adeoque *Omn.* $\frac{1}{12}s^2R :=\frac{1}{18}vR^3 - \frac{1}{36}s^2R^2 + \frac{1}{36}s^2vR$. Fig. 166.

Item, *Omn.* v (arithmetice proportionales,) $\frac{1}{2}v^2$, (per prop. 1. hujus.) Adeoque *Omn.* $-\frac{2}{3}vR^2 : = -\frac{1}{3}v^2R^2 = -\frac{2}{3}vR^3 + \frac{1}{3}s^2R^2$.

Item, *Omn.* $\frac{1}{2}a^2v$; hoc est, Momentum Ungulæ A b B fig. 170. aciem habentis A α, respectu T A; (per § I. prop. 19.) $-\frac{3}{8}a^2R^2 + \frac{3}{4}asR^2 - vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{4}asvR + \frac{1}{2}a^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2$.

Item, *Omn.* $\frac{1}{2}asv$; hoc est, Semimomentum, respectu T A, Solidi A b B fig. 170. ex ductu rectarum b B, in b V fig. 169. (per § M. prop. 18.) $\frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 + \frac{5}{72}s^2R^2 + \frac{1}{9}vR^3 + \frac{1}{4}asvR + \frac{1}{18}s^2vR - \frac{1}{6}as^3$.

Item, *Omn.* $\frac{1}{2}s^2v$; hoc est, Momentum Ungulæ A B V fig. 169. aciem habentis A α, respectu T A: (per § E. prop. 16.) $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR - \frac{1}{8}s^4$. Adeoque *Omn.* $\frac{1}{6}s^2v : = \frac{1}{9}vR^3 - \frac{1}{18}s^2R^2 + \frac{1}{18}s^2vR - \frac{1}{24}s^4$.

Ergo, *Omn.* $-\frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{2}asR + \frac{1}{12}s^2R - \frac{2}{3}vR^2 + \frac{1}{2}a^2v + \frac{1}{2}asv + \frac{1}{6}s^2v$: Hoc est, Ungulæ A b V, aciem habentis b V, momentum respectu A α; aciemve habentis A α, momentum respectu b V; $\frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 + \frac{41}{72}s^2R^2 - \frac{8}{9}vR^3 + \frac{1}{4}a^2vR + \frac{3}{4}asvR + \frac{5}{36}s^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2 - \frac{1}{6}as^3 - \frac{1}{24}s^4$. Idem quod prius.

Atque hoc momentum divisum per Ungulæ aciem habentis b V magnitudinem: Exhibet distantiam centri gravitatis ab A α.

Idemque per Ungulæ aciem habentis A α divisum; exhibet hujus distantiam Centri gravitatis à b V; & consequenter, à T A, & $\tau\alpha$; ejusque propterea momentum respectu T A, & $\tau\alpha$: Quæ eadem etiam sunt Momenta, respectu A α, aciem habentium T A, & $\tau\alpha$: Quæ per magnitudines divisa, exhibebunt & harum distantias centri gravitatis ab A α. Eadem quæ prius.

Atque, his demum Momentis, si addantur respectiva Ungularum b $\beta\alpha$ B momenta: Habentur Ungularum A b $\beta\alpha$ momenta respectiva; eadem quæ superius aliâ methodo inventa sunt. Atque hinc, distantiæ centrorum gravitatis; ut prius.

Superest tandem, ut Ungularum aciem habentium A α, momenta respectu ejusdem A α, investigemus; & quæ hinc dependent. M.

Distributis igitur, ut prius, tum Semicirculo in minuta Triangula Y α P, tum Semicycloide in Minuta Trapezia y δ ξ p: Semiquadrantalem Ungulam, Semicycloidi insistentem, aciem habentem A α, complebunt Solida his Minutis Trapeziis insistentia; sicut &

 Ungulam

Fig. 166, 168. Ungulam Semicirculo insistentem, eandem aciem habentem, complent Solida Triangulis illis insistentia.

Triangulo Y α P insistens solidum, Pyramis est, cujus centrum gravitatis in α B positum, abscindit inde, versus α, $\frac{3}{4}\alpha$ B, (per prop. 6. hujus;) adeoque ipsius ab A α distantia erit $\frac{3}{4}BV = \frac{3}{4}s$.

Trapezio y δ ξ p insistens solidum; Componitur ex Truncato Cuneo, seu Prismate duobus similibus Trapeziis y δ ξ p interjecto, altitudinem habente ipsi $\alpha\beta = a$ æqualem: Atque, ex Cuneo ei superimposito altitudinem habente, in β, nullam; sed, in b, ipsi $BV = s$ æqualem; tantum scilicet quanto altius est solidum illud in b, quam in β; hoc est, quanto longior est b V, quam $\beta\alpha$.

(Nec quemquam interim morari debeat, quod (propter aciem A α;) altitudo in Y, y, δ, major sit; atque in P, p, ξ, minor; quam in B, b, β, respective. Quamquam enim illud omnino verum sit; atque, in sectione determinatâ, alicujus sit Momenti: Continuatâ tamen in infinitum sectione, (quod supponimus,) differentia evanescit in datâ quâvis minorem: Quæ non modo in methodo indivisibilium, sed in omni per figurarum inscriptionem & circumscriptionem demonstrandi methodo, negligenda erit. Neque enim aliud producit, quam quod centrum gravitatis quod in B α, b β, rectis supponimus; promovendum erit ultra illas, intervallo quod dato quovis minus sit. Quod autem ab alio, differentiâ quæ datâ quâvis minor sit, differre demonstratur; pro æquali habendum erit. Dúmque easdem supponimus, tum in Y, y, δ, tum in P, p, ξ, altitudines quæ in B, b, β: Solidum ex minutis adscriptum (partim inscriptum, partim circumscriptum,) pro vero Solido substituimus, quod ab illo differat, non nisi differentiâ quæ datâ minor sit.)

Cuneus autem Truncatus ille, quem diximus; seu Prisma parallelis Trapeziis interjectum: Constat ex Cuneo intermedio, seu Prismate Triangulo $\upsilon\beta\pi$ insistente; & bipartito Parallelepipedo, parallelogrammis $\upsilon\beta\delta$ y & $\pi\beta\xi$ p insistente.

Qui quidem Cuneus intermedius, propter formam, est, ad Pyramidem æque altam ejusdem baseos, ut $\frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{3}$, seu 3 ad 2, (est utique Cuneus illæ parallelepipedi illius Semis, cujus Pyramis Triens est:) Cumque porro altitudo Cunei, in β vel b, sit ad altitudinem baseos Pyramidis in B; ut $\beta\alpha$ seu b B, ad B V; hoc est, ut a ad s: Erit Cunei Triangulo $\upsilon\beta\pi$ insistentis, ad Pyramidem simili & æquali Triangulo Y α P incumbentem, ratio, (ex illis composita) ut $3a$ ad $2s$. Cúmque Cunei centrum gravitatis sit in β b, abscindens, versus β, $\frac{2}{3}\beta$ b, (per prop. 5, 6.) adeoque ipsius ab A α

distantia

diſtantia ſit, $bB + \frac{2}{3}BV$, ſeu $a + \frac{2}{3}s$, (ut ex ſchematis inſpectu Fig. 166, facile colligitur;) Centrique gravitatis Pyramidis $Y\alpha P$ (ut dictum 168. eſt) inde diſtantia ſit $\frac{3}{4}s$: Adeoque diſtantiarum ratio, ut $a + \frac{2}{3}s$, ad $\frac{3}{4}s$: Ratio hæc, cum ratione magnitudinum ($3a$ ad $2s$) compoſita; exhibet rationem Momenti Cunei illius, ad Momentum Pyramidis (reſpectu ejuſdem $A\alpha$,) ut $3a^2 + 2as$, ad $\frac{3}{2}s^2$, ſeu $6a^2 + 4as$ ad $3s^2$.

Et Parallelepipedum (bipartitum) cum ſit, propter formam, ad Pyramidem æquealtam, ejuſdem baſis, ut 3 ad 1: Sitque baſeos in β vel b altitudo, ad altitudinem in B, ut a ad s: Erit Parallelepipedi ad Pyramidem ratio $3a$ ad s. Cumque Parallelepipedi (utut bipartiti) commune centrum gravitatis ſit in medio βb: Adeoque ejuſdem ab $A\alpha$ diſtantia, $a + \frac{1}{2}s$: (Sitque centri gravitatis Pyramidis, ut dictum eſt, diſtantia $\frac{3}{4}s$:) Diſtantiarum ratio, $a + \frac{1}{2}s$ ad $\frac{3}{4}s$; cum ratione magnitudinum, $3a$ ad s, compoſita; exhibet rationem Momentorum, $3a^2 + \frac{3}{2}as$ ad $\frac{3}{4}s^2$, ſeu $12a^2 + 6as$ ad $3s^2$.

Cuneúſque, Truncato illi Cuneo ſuperimpoſitus; Componitur ex Pyramide intermediâ, triangulo $\upsilon\beta\pi$ ſupereminente, (pyramidi in $Y\alpha P$ ſimili & æquali;) & Cuneo bipartito, parallelogrammis $\upsilon\beta\delta y$, $\pi\beta\xi p$, ſupereminente.

Pyramidiſque Trianguli $\upsilon\beta\pi$ centrum gravitatis, cum intelligatur in $b\beta$ ſitum, (ſaltem in plano ſuper hanc erecto,) abſcindens; verſus β, $\frac{3}{4}\beta b$; adeoque ipſius ab $A\alpha$ diſtantiâ (ut ex ſchematis inſpectu facile colligitur,) $a + \frac{3}{4}s$: Erit (propter magnitudines æquales) momenti ejus ratio, ad momentum Pyramidis $Y\alpha P$, (reſpectu ejuſdem $A\alpha$,) eadem quæ diſtantiarum; hoc eſt, ut $a + \frac{3}{4}s$ ad $\frac{3}{4}s$; ſeu ut $4a + 3s$, ad $3s$; hoc eſt, ut $4as + 3s^2$, ad $3s^2$

Cuneíque bipartiti, cum (propter æquales baſes & altitudines,) ſit ad Pyramidem, ut 3 ad 2; Centríque diſtantia illius, ad centri hujus diſtantiam, ut $a + \frac{2}{3}s$ ad $\frac{3}{4}s$: Erit momentum bipartiti Cunei, ad momentum Pyramidis $Y\alpha P$, (reſpectu ejuſdem $A\alpha$,) ut $3a + 2s$ ad $\frac{3}{2}s$; ſeu $6as + 4s^2$ ad $3s^2$.

Ergo, Solidi totius, minuto Trapezio $y\delta\xi p$ incumbentis, (quod ex partibus jam expoſitis componitur,) ad momentum Pyramidis correſpondentis, incumbentis Triangulo $Y\alpha P$, (reſpectu ejuſdem $A\alpha$,) eſt ut $6a^2 + 4as$ plus $12a^2 + 6as$ plus $4as + 3s^2$ plus $6as + 4s^2$, ad $3s^2$: Hoc eſt, ut $18a^2 + 20as + 7s^2$, ad $3s^2$. Vel (ductis omnibus in communem altitudinem $V\alpha = h$;) ut $18a^2h + 20ash + 7s^2h$, ad $3s^2h$. Et ſic ubique. Adeoque momentum

Fig. 166, 168. mentum Solidi ex illis conflati (sive quod totam $A\tau\alpha$, sive quod ipsius partem ut $Ab\beta\alpha$, spectat;) ad momentum correspondentis solidi ex his conflati, (quod vel totum $AD\alpha$, vel ipsius partem $B\alpha A$, spectat;) ut *Omnia*, $18a^2h + 20ash + 7s^2h$: ad *Omnia*, $3s^2h$: eo spectantia.

Eademque ratio, sic aliàs colligitur: ad methodum nostræ *Arithmeticæ Infinitorum*.

Sunto rectæ complentes $Y\alpha P$ Triangulum (utpote arithmetice proportionales,) b, $2b$, $3b$, &c. usque ad maximam $YP = B$. Quarum puncta media, seu gravitatis Centra, in αB posita, habebunt (in Ungulâ Semiquadrantali aciem habente $A\alpha$) altitudines distantiis suis ab $A\alpha$ æquales, puta s, $2s$, $3s$, &c. usque ad maximam $BV = S$. Quæ distantiæ, in rectas illas respective ductæ, exhibent seriem magnitudinum rectis illis insistentium (ungulam complentium,) bs, $4bs$, $9bs$, &c. usque ad maximam BS. Quæ quidem series Magnitudinum, Pyramidem $Y\alpha P$ complentium, (utpote Series Secundanorum;) erit ad Seriem totidem maximæ æqualium, (hoc est, ad Parallelepipedum ejusdem basis & altitudinis,) ut 1 ad $2+1$; (per prop. 1. hujus:) Hoc est ut 1 ad 3. Puta, $\frac{1}{3}hBS$.

$$\begin{array}{l} b \,.\, 2b \,.\, 3b \,.\, \&c.\ \text{usque ad } B. \\ s \,.\, 2s \,.\, 3s \,.\, \&c.\ \text{usque ad } S. \\ \hline bs \,.\, 4bs \,.\, 9bs \,.\, \&c.\ \text{usque ad } BS. \quad = \frac{1}{3}hBS. \end{array}$$

Eademque Series magnitudinum (quarum omnium Centra gravitatis sunt in αB, planove super hanc erecto; saltem inde distant intervallo quod dato quovis minus sit;) in suas iterum distantias, s, $2s$, $3s$, &c. ductæ; exhibent momentorum earundem, respectu ipsius $A\alpha$, seriem bs^2, $8bs^2$, $27bs^2$, &c. usque ad BS^2 maximum. Quæ quidem series, (utpote Tertianorum,) est ad seriem totidem maximo æqualium; puta hBS^2: (Hoc est, ad Parallelepipedi Momentum in B suspensi;) ut 1 ad $3+1$; hoc est, ut 1 ad 4: (per prop. 1. hujus.) Adeoque $\frac{1}{4}hBS^2$.

$$\begin{array}{l} bs \,.\; 4bs \,.\; 9bs \,.\; \&c.\ \text{usque ad } BS. \\ s \,.\; 2s \,.\; 3s \,.\; \&c.\ \text{usque ad } S. \\ \hline bs^2 \,.\; 8bs^2 \,.\; 27bs^2 \,.\; \&c.\ \text{usque ad } BS^2. \quad = \frac{1}{4}hBS^2. \end{array}$$

Tra-

Trapezium verò complentes rectæ, (quarum minima δξ = ΥΡ Fig. 166, 168. $= B$,) erunt $B+b$, $B+2b$, $B+3b$, &c. usque ad $F+B$, seu $2B$. Quarum itaque summa, æquabit $hB+\frac{1}{2}hB=\frac{3}{2}hB$, per prop. 1.

$$\left.\begin{array}{lll} B.\ B.\ B.\ \&c. & & =hB \\ \text{plus}\ b.\ 2b.\ 3b.\ \&c.\ \text{usque ad}\ B. & & =\frac{1}{2}hB \end{array}\right\} = \frac{3}{2}hB.$$

Eadémque series in distantias suas ab Aα ductæ; hoc est (propter gravitatis centra singulorum in βb,) in $A+s$, $A+2s$, $A+3s$, &c. usque ad $A+S$: Exhibent Seriem Magnitudinum eisdem insistentium (solidum complentium) $BA+bA+sB+sb$, $BA+2bA+2sB+4sb$, $BA+3bA+3sB+9sB$, &c. Quorum omnium Aggregatum (per eandem prop. 1.) est $hBA+\frac{1}{2}hBA+\frac{1}{2}hSB+\frac{1}{3}hSB$, seu $\frac{3}{2}hBA+\frac{5}{6}hSB$.

$B+b$, in $A+s$, $=BA+bA+sB+sb$.
$B+2b$, in $A+2s$, $=BA+2bA+2sB+4sb$.
$B+3b$, in $A+3s$, $=BA+3bA+3sB+9sb$.
&c. usque ad,
$B+B$, in $A+S$, $=BA+BA+SB+SB$.

$hBA+\frac{1}{2}hBA+\frac{1}{2}hSB+\frac{1}{3}hSB$.
seu $\frac{3}{2}hBA + \frac{5}{6}hSB$.

Eadémque Magnitudinum series, in distantias iterum ducta; hoc est, in $A+s$, $A+2s$, $A+3s$, &c. exhibet seriem Momentorum, (respectu ejusdem Aα.) Quorum omnium Aggregatum (per eandem prop. 1.) est $hBA^2+\frac{1}{2}hBA^2+hSBA+\frac{2}{3}hSBA+\frac{1}{3}hS^2B+\frac{1}{4}hS^2B$, seu $\frac{3}{2}hBA^2+\frac{5}{3}hSBA+\frac{7}{12}hS^2B$.

$BA^2+bA^2+2sBA+2sbA+s^2B+s^2b$.
$BA^2+2bA^2+4sBA+8sbA+4s^2B+8s^2b$.
$BA^2+3bA^2+6sBA+18sbA+9s^2B+27s^2b$.
&c. usque ad,
$BA^2+BA^2+SBA+SBA+S^2B+S^2B$.

$hBA^2+\frac{1}{2}hBA^2+\frac{2}{2}hSBA+\frac{2}{3}hSBA+\frac{1}{3}hS^2B+\frac{1}{4}hS^2B$.
seu $\frac{3}{2}hBA^2 + \frac{5}{3}hSBA + \frac{7}{12}hS^2B$.

Adeoque Solidi Trapezio y δ ξ p incumbentis magnitudo, ad mag-

Fig. 166, 168. magnitudinem Pyramidis Triangulo Y α P incumbentis, eſt ut, $\frac{3}{2}hBA + \frac{5}{6}hSB$, ad $\frac{1}{3}hBS$. Atque momentum illius, ad momentum hujus, (reſpectu ejuſdem A α,) ut $\frac{3}{2}hBA^2 + \frac{5}{3}hSBA + \frac{7}{12}hS^2B$, ad $\frac{1}{4}hS^2B$. Seu, extrito B ubique, (utpote infinite exiguo, & ubique æquali;) ductiſque omnibus in 6 (pro magnitudinibus,) ſeu (pro momentis) in 12, (quò fractiones tollantur:) Magnitudo ad magnitudinem erit, ut $9hA + 5hS$, ad $2hS$: Et Momentum illius, ad Momentum hujus, ut $18hA^2 + 20hAS + 7hS^2$, ad $3hS^2$. Seu (reſtitutis minuſcularum valoribus) Magnitudo ad Magnitudinem, ut $9ah + 5sh$, ad $2sh$: Et momentum ad momentum, ut $18a^2h + 20ash + 7s^2h$, ad $3s^2h$.

Cumque hoc ubique obtineat; erit Solidorum omnium Trapeziis y δ ξ p inſiſtentium, (ſive quæ totam Semicycloidem ſpectant, ſive quæ ſpectant ipſius portionem, A b β α, b β τ, b β δ d, &c.) magnitudo; ad magnitudinem omnium Triangulis Y α P inſiſtentium, (ſive quæ totum ſpectant Semicirculum, ſive ipſius reſpectivam portionem, ut B α A, α B α, B α D, &c.) ut *Omnia* $9ah + 5sh$: ad *Omn.* $2sh$: eo ſpectantia. (De quo non ultra ſoliciti ſumus, utpote quod in capite præcedente tractavimus.) Eorúmque omnium Momentum, ad Momentum horum; ut *Omn.* $18a^2h + 20ash + 7s^2h$: ad *Omn.* $3s^2h$: eo ſpectantia. (Quod & ſupra inventum erat.)

Hoc eſt, ut *Omn.* $7s^2h$: ad *Omn.* $3s^2h$: (ſeu 7 ad 3:) atque inſuper ut *Omn.* $18a^2h + 20ash$: ad *Omn.* $3s^2h$. Sumptis *a* arithmetice proportionalibus.

Sunt autem *Omn.* a^2h: (puta, quæ portionem A b β α ſpectant,) hoc eſt, Ungulæ A b β α fig. 170. aciem habentis A α, momentum reſpectu A α, (per § K. prop 19.) $2eR^3 - 2avR^2 + \frac{1}{3}a^3R + a^2sR$. Adeoque *Omn.* $18a^2h := 36eR^3 - 36avR^2 + 6a^3R + 18a^2sR$.

Item, *Omn.* ash: eo ſpectantia; hoc eſt, Solidi A b β α fig. 170. ex ductu rectarum b β in β υ facti, momentum reſpectu A α, (per § H. prop. 18.) $-\frac{5}{4}eR^3 + avR^2 - \frac{1}{4}svR^2 + \frac{1}{2}as^2R$. Adeoque *Omn.* $20ash: = -25eR^3 + 20avR^2 - 5svR^2 + 10as^2R$.

Ergo, *Omn.* $18a^2h + 20ash: = 11eR^3 - 16avR^2 - 5svR^2 + 6a^3R + 18a^2sR + 10as^2R$.

Similiter; *Omn.* $\frac{1}{2}s^2h$: hoc eſt; Solidi A b β α, fig. 170. ex ductu rectarum b β in β υ facti, momentum reſpectu plani A τ α, (per § C. prop. 18.) $\frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{4}svR^2 + \frac{1}{6}s^3R$. Adeoque *Omn.* $3s^2h = \frac{3}{2}eR^3 + \frac{3}{2}svR^2 + s^3R$.

Momen-

Momentum igitur Ungulæ portionis Semicycloidis A b $\beta\alpha$, aciem habentis A α, respectu ejusdem A α; est ad Momentum respectivæ Ungulæ portionis Semicirculi B α A, aciem habentis A α, respectu ejusdem A α: ut $11eR^3 - 16avR^2 - 5svR^2 + 6a^3R + 18a^2sR + 10as^2R$ ad $\frac{3}{2}eR^3 + \frac{3}{2}svR^2 + s^3R$; atque insuper (ut modo dictum) ut 7 ad 3; hoc est, ut $\frac{7}{2}eR^3 + \frac{7}{2}svR^2 + \frac{7}{3}s^3R$, ad $\frac{3}{2}eR^3 + \frac{3}{2}svR^2 + s^3R$: Adeoque omnino, ut $\frac{29}{2}eR^3 - 16avR^2 - \frac{3}{2}svR^2 + 6a^3R + 18a^2sR + 10as^2R + \frac{7}{3}s^3R$, ad $\frac{3}{2}eR^3 + \frac{3}{2}svR^2 + s^3R$. Cumque hoc posterius sit (per § R. prop. 16.) duodecuplum Momenti Ungulæ B α A, aciem habentis A α, respectu ipsius A α: Erit & prius illud, duodecuplum momenti Ungulæ A b $\beta\alpha$ (portionis Semicycloidis) aciem habentis A α, respectu ejusdem A α: Adeoque ipsum illius momentum, $\frac{29}{24}eR^3 - \frac{4}{3}avR^2 - \frac{1}{8}svR^2 + \frac{1}{2}a^3R + \frac{3}{2}a^2sR + \frac{5}{6}as^2R + \frac{7}{36}s^3R$: (Hujusque Duplum, est Semisolidi circa A α conversione facti, Momentum respectu ipsius axis A α: ut supra sæpius ostensum est.) Fig. 166, 168.

Illudque Ungulæ Momentum, per magnitudinem suam, $\frac{3}{4}a^2R + \frac{3}{2}asR - \frac{2}{3}vR^2 + \frac{5}{12}s^2R$, (per § I prop. 20.) divisum; exhibet ipsius A b $\beta\alpha$ Ungulæ, aciem habentis A α, distantiam centri gravitatis ab A α,

$$\frac{87eR^2 - 96avR - 9svR + 36a^3 + 108a^2s + 60as^2 + 14s^3}{54a^2 + 108as - 48vR + 30s^2}.$$

(Semisolidique correspondentis, distantia centri gravitatis ab axe A α, est ad hanc Ungulæ; ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$.)

Speciatim vero, Ungulæ totius Semicycloidis A $\tau\alpha$, aciem habentis A α, Momentum respectu A α, (propter $a = \frac{1}{2}P$, $v = 2R$. & $s = 0$,) $\frac{1}{16}RP^3 - \frac{35}{48}R^3P$. Centrique gravitatis ab A α distantia, est

$$\frac{3P^3 - 35R^2P}{9P^2 - 64R^2}.$$

Similiter ostendetur, Ungulæ Segmenti Semicycloidis b $\beta\tau$, aciem habentis A α, Momentum respectu A α; ad momentum Ungulæ segmenti semicirculi α B α, aciem habentis A α, respectu ejusdem A α; esse, ut 7 ad 3; atque insuper, ut *Omn.* $18a^2h + 20ash$: ad *Omn.* $3s^2h$: eo spectantia; sumptis a arithmetice proportionalibus. Quæ similiter, mutatis mutandis, ad calculum reducentur. Cumque Ungulæ Segmenti Semicirculi Momentum illud per § S. prop. 16. innotescat: Habebitur & correspondens Ungulæ Segmenti Semicycloidis Momentum; & quæ hinc dependent. N.

Vel etiam; ex totius A $\tau\alpha$ Ungulæ momento, (modò tradito,) si

Fig. 166, 168. si auferatur (modò traditum) momentum Ungulæ A b β α: Restabit $\frac{1}{16}RP^3 - \frac{35}{48}R^3P - \frac{29}{24}eR^3 + \frac{4}{3}avR^2 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{2}a^3R - \frac{3}{2}a^2sR - \frac{5}{6}as^2R - \frac{7}{36}s^3R$, Momentum Ungulæ b β τ aciem habentis A α, respectu ipsius A α.

Atque hoc, per ipsius magnitudinem (§ I. traditam) $\frac{3}{16}RP^2 - \frac{4}{3}R^3 + \frac{2}{3}vR^2 - \frac{3}{4}a^3R - \frac{3}{2}asR - \frac{5}{12}s^2R$, divisum; exhibet ejusdem, ab A α, distantiam centri gravitatis,

$$\frac{9P^3 - 105R^2P - 174eR^2 + 192avR + 18svR - 72a^3 - 216a^2s - 120as^2 - 28s^3}{27P^2 - 192R^2 + 96vR - 108a^2 - 216as - 60s^2}.$$

O. Si vero ex Ungulæ A b β α (portionis Semicycloidis) momento illo, modò reperto; auferatur Momentum Ungulæ b β α V, (aciem habentis A α,) respectu A α: Relinquitur Ungulæ A b V (aciem habentis A α) momentum respectu A α.

Componitur autem Ungula illa b β α V, ex Pyramide Triangulo B α V incumbente, & solido incumbente Parallelogrammo b β α B.

Pyramidis istius momentum (per § R. prop. 16.) est, $\frac{1}{12}s^3h = \frac{1}{6}s^3R - \frac{1}{12}s^3v$.

Solidum Parallegrammo b β α B incumbens; altitudinem habet, in α, nullam; in β, $\alpha\beta = a$; in B, BV $= s$; in b, bV $= s + a$. Adeoque componitur ex prismate, triangulares bases habente, $\alpha\beta$, vel B b, $= \frac{1}{2}a^2$; (quarum itaque centra gravitatis à B, & α, sunt $\frac{2}{3}a$; &, propter altitudinem V $\alpha = h$, magnitudo prismatis $\frac{1}{2}a^2h$; centrique gravitatis ab A α distantia $\frac{2}{3}a + \frac{1}{2}s$, propter centrum prismatis in medio rectæ centra basium conjungente; adeoque momentum ejus respectu A α, $\frac{1}{3}a^3h + \frac{1}{4}a^2sh$:) Atque ex cuneo, altitudinem habente in $\alpha\beta$, nullam; in b B, æqualem ipsi B V $= s$: Adeoque (propter b B $= a$, & V $\alpha = h$,) magnitudinem habebit $\frac{1}{2}ash$, (semissem Prismatis, ejusdem basis & altitudinis:) Centrique gravitatis ab A α distantiam, $\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}s$: Ejusque propterea respectu A α momentum, $\frac{1}{4}a^2sh + \frac{1}{3}as^2h$. Solidique propterea totius parallelogrammo incumbentis momentum, respectu A α, $\frac{1}{3}a^3h + \frac{1}{2}a^2sh + \frac{1}{3}as^2h$.

Adeoque Solidi Trapezio b β α V incumbentis, momentum respectu A α, $\frac{1}{3}a^3h + \frac{1}{2}a^2sh + \frac{1}{3}as^2h + \frac{1}{12}s^3h$. Atque hoc per Ungulæ magnitudinem $\frac{1}{2}fah + \frac{1}{6}s^2h$ (per § K. prop. 20.) divisum; exhibet ipsius b β α V Ungulæ, aciem habentis A α, distantiam centri gravitatis ab A α, $\frac{4a^3 + 6a^2s + 4as^2 + s^3}{6fa + 2s^2}$.

Vel

Vel etiam sic colligitur, ejusdem b β α V Ungulæ, aciem habentis A α, respectu ipsius A α, Momentum. Fig. 166, 168.

Rectæ Trapezium complentes, ab α β incipiendo, usque ad b V; sunt A, $A+s$; $A+2s$, $A+3s$, &c. usque ad $A+S$. Earúmque puncta media, seu gravitatis centra, distantias habent, $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}s$, $\frac{1}{2}A+\frac{2}{2}s$, $\frac{1}{2}A+\frac{3}{2}s$, &c. usque ad $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}S$. Quæ in rectas illas ductæ, exhibent earundem momenta, seu Triangula rectis illis insistentia Ungulam complentia, $\frac{1}{2}A^2$, $\frac{1}{2}A^2+sA+\frac{1}{2}s^2$, $\frac{1}{2}A^2+2sA+\frac{4}{2}s^2$, $\frac{1}{2}A^2+3sA+\frac{9}{2}s^2$, &c. usque ad $\frac{1}{2}A^2+SA+\frac{1}{2}S^2$. Eadémque Triangula, ducta in earundem respective distantiam centri gravitatis ab A α, nempe $\frac{2}{3}A$, $\frac{2}{3}A+\frac{2}{3}s$, $\frac{2}{3}A+\frac{4}{3}s$, $\frac{2}{3}A+\frac{6}{3}s$, &c. usque ad $\frac{2}{3}A+\frac{2}{3}S$; exhibent seriem Momentorum, eorundem Triangulorum, respectu A α; $\frac{1}{3}A^3$, $\frac{1}{3}A^3+sA^2+s^2A+\frac{1}{3}s^3$, $\frac{1}{3}A^3+2sA^2+4s^2A+\frac{8}{3}s^3$, $\frac{1}{3}A^3+3sA^2+9s^2A+\frac{27}{3}s^3$, &c. usque ad $\frac{1}{3}A^3+SA^2+S^2A+\frac{1}{3}S^3$. Quarum omnium aggregatum (per prop. 1.) propter V $\alpha = h$, est, $\frac{1}{3}hA^3+\frac{1}{2}hSA^2+\frac{1}{3}hS^2A+\frac{1}{12}hS^3$. Seu (restituto valore minuscularum,) $\frac{1}{3}a^3h+\frac{1}{2}a^2sh+\frac{1}{3}as^2h+\frac{1}{12}s^3h$. Ut prius.

$A+s$, in $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}s$, $=\frac{1}{2}A^2+sA+\frac{1}{2}s^2$.
$A+2s$, in $\frac{1}{2}A+\frac{2}{2}s$, $=\frac{1}{2}A^2+2sA+\frac{4}{2}s^2$.
$A+3s$, in $\frac{1}{2}A+\frac{3}{2}s$, $=\frac{1}{2}A^2+3sA+\frac{9}{2}s^2$.
&c. usque ad
$A+S$, in $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}S$, $=\frac{1}{2}A^2+SA+\frac{1}{2}S^2$.

$\frac{1}{2}hA^2+\frac{1}{2}hSA+\frac{1}{6}hS^2$.

$\frac{2}{3}A+\frac{2}{3}s$, in $\frac{1}{2}A^2+sA+\frac{1}{2}s^2$, $=\frac{1}{3}A^3+sA^2+s^2A+\frac{1}{3}s^3$.
$\frac{2}{3}A+\frac{4}{3}s$, in $\frac{1}{2}A^2+2sA+\frac{4}{2}s^2$, $=\frac{1}{3}A^3+2sA^2+4s^2A+\frac{8}{3}s^3$.
$\frac{2}{3}A+\frac{6}{3}s$, in $\frac{1}{2}A^2+3sA+\frac{9}{2}s^2$, $=\frac{1}{3}A^3+3sA^2+9s^2A+\frac{27}{3}s^3$.
&c. usque ad
$\frac{2}{3}A+\frac{2}{3}S$, in $\frac{1}{2}A^2+SA+\frac{1}{2}S^2$, $=\frac{1}{3}A^3+SA^2+S^2A+\frac{1}{3}S^3$.

$\frac{1}{3}hA^3+\frac{1}{2}hSA^2+\frac{1}{3}hS^2A+\frac{1}{12}hS^3$.

Quod quidem Ungulæ b β α V momentum, $\frac{1}{3}a^3h+\frac{1}{2}a^2sh+\frac{1}{3}as^2h+\frac{1}{12}s^3h$, seu (propter $h=2R-v$,) $\frac{2}{3}a^3R-\frac{1}{3}a^3v+a^2sR-\frac{1}{2}a^2sv$

Fig. 166, 168. $+\frac{2}{3}as^2R-\frac{1}{3}as^2v+\frac{1}{6}s^3R-\frac{1}{12}s^3v$; ex Ungulæ A b β α momento, $\frac{29}{24}eR^3-\frac{4}{3}avR^2-\frac{1}{8}svR^2+\frac{1}{2}a^3R+\frac{3}{2}a^2sR+\frac{5}{6}as^2R+\frac{7}{36}s^3R$, (modo tradito,) ſubductum; Relinquit Ungulæ A b V, aciem habentis A α, momentum reſpectu A α, $\frac{29}{24}eR^3-\frac{4}{3}avR^2-\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{6}a^3R+\frac{1}{2}a^2sR+\frac{1}{6}as^2R+\frac{1}{36}s^3R+\frac{1}{3}a^3v+\frac{1}{2}a^2sv+\frac{1}{3}as^2v+\frac{1}{12}s^3v$.

Atque hoc, per hujus Ungulæ magnitudinem, $-\frac{2}{3}vR^2-\frac{1}{4}a^2R+\frac{1}{2}asR+\frac{1}{12}s^2R+\frac{1}{2}a^2v+\frac{1}{2}asv+\frac{1}{6}s^2v$, (per § K, L. prop. præced.) diviſum; exhibet Ungulæ A b V, aciem habentis A α, diſtantiam centri gravitatis ab A α,

$$\frac{87eR^3-96avR^2-9svR^2-12a^3R+36a^2sR+12as^2R+2s^3R+24a^3v+36a^2sv+24as^2v+6s^3v}{-48vR^2-18a^2R+36asR+6s^2R+36a^2v+36asv+12s^2v}.$$

Semiſolidique correſpondentis Momentum reſpectu axis converſionis ſuæ, duplum eſt Momenti Ungulæ reſpectu aciei ſuæ: Illiusque diſtantia centri gravitatis ab axe, ad hujus diſtantiam ab acie; ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$. Ut ſæpius oſtenſum eſt.

P. Eadémque Momenta & Diſtantiæ, ſic adhuc aliàs inveſtigantur. Nempe, Momento Ungulæ A b V per ſe invento, ſine ope Ungulæ A b β α: Hinc ipſius A b β α Ungulæ Momentum, reliquaque deducuntur.

Diviſâ rectâ A α in partes infinite exiguas, invicem æquales, in punctis S, C, Σ, &c. hoc eſt, ſumptis v arithmetice proportionalibus: Quæ Semicycloidem A τ α, ejúſve ſegmentum A b V, complent rectæ b V; ſunt *Omnes* $a+s$, eò ſpectantes. Quæque Semiquadrantalem Ungulam eidem inſiſtentem, aciem habentem A α, complent plana, eaſdem rectis inſiſtentia; ſunt Triangula Iſoſcelia, earundem rectarum ſemiquadrata: hoc eſt, *Omn.* $\frac{1}{2}a^2+as+\frac{1}{2}s^2$: eo ſpectantia. Horumque Triangulorum centra gravitatis, ab A α diſtant earundem rectarum b V beſſe, hoc eſt $\frac{2}{3}$ b V $=\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}s$. Adeoque Triangulorum illorum Momenta, (ductis magnitudinibus in reſpectivas diſtantias,) ſunt *Omn.* $\frac{1}{3}a^3+a^2s+as^2+\frac{1}{3}s^3$: (ſeu, Triens cuborum omnium b V,) ſumptis v arithmetice proportionalibus.

Sunt autem, *Omn.* $\frac{1}{3}a^3$: (ſumptis v arithmetice proportionalibus,) hoc eſt, Ungulæ A b B fig. 170. aciem habentis A α, momentum reſpectu A α, (per § M. prop. 19.) $2eR^3-2avR^2-\frac{1}{3}a^3R+a^2sR+\frac{1}{3}a^3v$.

Et *Omn.* a^2s: (eo ſpectantia,) hoc eſt, Duplum Momenti reſpectu A α, Solidi A b B fig. 170. ex ductu rectarum bB in bV reſpective, (per § N. prop. 18.) $-\frac{1}{4}eR^3-\frac{1}{4}svR^2+\frac{1}{6}a^3R-\frac{1}{2}a^2sR+\frac{1}{2}as^2R+\frac{1}{2}a^2sv$.

Item

Item *Omn.* as^2: (eo spectantia,) hoc est, Duplum Momenti ejusdem A b B Solidi, respectu plani A τ α, (per § O. prop. 18.) $-\frac{2}{3}eR^3 + \frac{2}{3}avR^2 - \frac{1}{3}as^2R + \frac{1}{9}s^3R + \frac{1}{3}as^2v$. Fig. 166, 168.

Et *Omn.* $\frac{1}{3}s^3$; (eo spectantia,) hoc est, Momentum Ungulæ A B V aciem habentis A α, respectu A α; $\frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R + \frac{1}{12}s^3v$: per § Q. prop. 16.

Ergo, *Omn.* $\frac{1}{3}a^3 + a^2s + as^2 + \frac{1}{3}s^3 : = \frac{29}{24}eR^3 - \frac{4}{3}avR^2 - \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{6}a^3R + \frac{1}{2}a^2sR + \frac{1}{6}as^2R + \frac{1}{36}s^3R + \frac{1}{3}a^3v + \frac{1}{2}a^2sv + \frac{1}{3}as^2v + \frac{1}{12}s^3v$. Quod igitur est Momentum Ungulæ segmenti semicycloidis A b V, aciem habentis A α, respectu ipsius A α. (Idem quod prius inventum erat.) Quod itaque per magnitudinem divisum, exhibebit distantiam centri gravitatis ab A α: ut prius.

Atque huic quidem Momento, si addatur Momentum Ungulæ b β α V, (modo traditum,) habebitur Ungulæ A b β α, aciem habentis A α, Momentum respectu A α: ut prius.

Exhibuimus igitur in expositis Ungulis Semicycloidis, ejúsque partium, tum Magnitudines, & Momenta; tum centri gravitatis in singulis distantias à duobus saltem planis non sibi invicem parallelis; atque in quo tertio per aciem plano constitutum sit, ex § G. prop. 12. constat, (eo nempe quod Ungulæ altitudinem bisecat;) Adeoque (per prop. 26. cap. præced.) ipsa gravitatis centra determinavimus. Q.

Quæque de Ungulis dicta sunt; eadem ad solida conversione facta facile transferuntur, ope prop. 12. & 14. ut suis locis sæpius ostensum.

Quæque de expositis dicta sunt; ad alia, calculo rite administrato, facile applicantur: Ut ad præcedentes aliquot propositiones admonuimus.

Quæque de Ungulis Solidisque Semicycloidem Primariam (hactenus traditam) dicta sunt; eadem omnia ad Ungulas, Solidáque, Secundarias (sive Protractas sive Contractas) similiter spectantia, facile transferentur. Nempe, quoties rectæ b B in calculum veniunt; pro a, substituenda erit alia quantitas, quæ, ad illam, eam habet rationem, quam habet recta τ α, ad $\frac{1}{2}P$, semiperipheriam circuli generantis. Et similiter, mutatis mutandis, de earundem Quadratis Cubis, cæterisque potestatibus; ut ad calcem propositionis præcedentis ostensum est. R. Fig. 175, 176.

PROP.

Fig. 177.

PROP. XXII.

A. Quæ Cycloidem contingit recta, eſt correſpondenti Circuli genitoris (circa cycloidis axem poſiti) Chordæ, ad verticem terminatæ, parallela.

B. Curvaque Semicycloidis, eſt Dupla Diametri circuli Genitoris.

C. Ejuſque portio quævis (ad verticem terminata) Dupla ſubtenſæ correſpondentis Arcûs circuli genitoris.

Adeoque ſecabitur Cycloidis curva, in ratione data.

Atque hinc Momenta & Magnitudines, ipsáque gravitatis centra, exhibentur; Tum Curvæ Cycloidis, partiúmque ejuſdem; tum ſuperficierum, earundem converſione, factarum.

Nempe (retentis ſymbolis ut in propoſitionibus præcedentibus, poſitoque $\chi = \sqrt{:} 4R^2 - c^2 : = \alpha$B.)

B. D, F. Curvæ Semicycloidis Aτ, magnitudo $4R$: Momentum reſpectu TA, $\frac{8}{3}R^2$; reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{16}{3}R^2$; Diſtantia
G, K. Centri gravitatis, à TA, $\frac{2}{3}R$; à $\tau\alpha$, $\frac{4}{3}R$: Momentum reſpectu Aα, $2RP - \frac{16}{3}R^2$; reſpectu Tτ, $\frac{16}{3}R^2$; Diſtantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{1}{2}P - \frac{4}{3}R$; à T$\tau$, $\frac{4}{3}R$.

C. Curvæ Ab; magnitudo, $2c$: Momentum reſpectu TA,
D, F. $\frac{2}{3}cv$; reſpectu bV, $\frac{4}{3}cv$; reſpectu $\tau\alpha$, $2cb + \frac{4}{3}cv = 4cR - \frac{2}{3}cv$: Diſtantia Centri gravitatis à TA,
G, K. $\frac{1}{3}v$; à bV, $\frac{2}{3}v$; à $\tau\alpha$, $b + \frac{2}{3}v = 2R - \frac{1}{3}v$: Momentum reſpectu A$\alpha$, $2ac - \frac{16}{3}R^2 + 4\chi R - \frac{2}{3}b\chi$;

Diſtantia

Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $a - \frac{8R^2 + lx - 6xR}{3c}$ Fig. 177.

Ungulæ Superficialis (Semiquadrantalis) ipsi $A\tau$ curvæ D, F.
insistentis, aciem habentis T A, Magnitudo, $\frac{8}{3}R^2$:
Momentum respectu T A, $\frac{16}{5}R^3$; respectu $\tau\alpha$, E, F.
$\frac{32}{15}R^3$: Distantia Centri gravitatis à T A, $\frac{6}{5}R$; à $\tau\alpha$,
$\frac{4}{5}R$: Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{4}{3}R^2P - \frac{64}{45}R^3$; re- H, L.
spectu $T\tau$, $\frac{64}{45}R^3$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$,
$\frac{1}{2}P - \frac{8}{15}R$; à $T\tau$, $\frac{8}{15}R$.

Aciémque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{16}{3}R^2$: Momentum D, F.
respectu T A, $\frac{32}{15}R^3$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{128}{15}R^3$; Distantia E, F.
Centri gravitatis à T A, $\frac{2}{5}R$; à $\tau\alpha$, $\frac{8}{5}R$: A $T\tau$, H, L.
$\frac{26}{15}R$; ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}P - \frac{26}{15}R$; Momentum respectu $T\tau$,
$\frac{416}{45}R^3$; respectu $A\alpha$, $\frac{8}{3}R^2P - \frac{416}{45}R^3$.

Aciémque habentis $A\alpha$; Magnitudo, $2RP - \frac{16}{3}R^2$: Mo- G, K.
mentum respectu T A, $\frac{4}{3}R^2P - \frac{64}{45}R^3$; respectu $\tau\alpha$, H, L.
$\frac{8}{3}R^2P - \frac{416}{45}R^3$; Distantia Centri gravitatis à T A,
$\frac{30P - 32R}{45P - 120R}R$; à $\tau\alpha$, $\frac{60P - 208R}{45P - 120R}R$: Momentum I, M.
respectu $A\alpha$, $RP^2 - \frac{1024}{45}R^3$; respectu $T\tau$, $\frac{1024}{45}R^3$
$- \frac{8}{3}R^2P$; Distantia Centri grav. ab $A\alpha$, $\frac{45P^2 - 1024R^2}{90P - 240R}$;
à $T\tau$, $\frac{1024R^2 - 120RP}{90P - 240R} = \frac{512R - 60P}{45P - 120R}R$.

Aciémque habentis $T\tau$; Magnitudo, $\frac{16}{3}R^2$: Momen- G, K.
mentum respectu T A, $\frac{64}{45}R^3$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{416}{45}R^3$; H, L.
Distantia Centri gravitatis à T A, $\frac{4}{15}R$; à $\tau\alpha$,
$\frac{26}{15}R$: Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1024}{45}R^3 - \frac{8}{3}R^2P$; I, M.
respectu $T\tau$, $\frac{16}{3}R^2P - \frac{1024}{45}R^3$; Distantia Centri gra-
vitatis ab $A\alpha$, $\frac{64}{15}R - \frac{1}{2}P$; à $T\tau$, $P - \frac{64}{15}R$.

Ungulæ Superficialis A b, aciem habentis T A; Magni- D, F.
tudo $\frac{2}{3}cv$: Momentum respectu T A, $\frac{2}{5}cv^2$; respectu E, F.
b V,

Fig. 177. b V, $\frac{4}{15}cv^2$; reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{4}{3}cvR - \frac{2}{5}cv^2$; Diſtantia Centri gravitatis à T A, $\frac{3}{5}v$; à b V, $\frac{2}{5}v$;

H, L. à $\tau\alpha$, $k + \frac{2}{5}v = 2R - \frac{3}{5}v$: Momentum reſpectu A α,

$$\frac{30ac^3R - 128R^5 + 64\chi R^4 + 8c^2\chi R^2 + 9c^4\chi}{90R^2}$$; Diſtantia Centri gravitatis ab A α,

$$\frac{30ac^3R - 128R^5 + 64\chi R^4 + 8c^2\chi R^2 + 9c^4\chi}{60cvR^2 = 30c^3R}.$$

D, F. Aciemque habentis b V; Magnitudo, $\frac{4}{3}cv$: Momentum

E, F. reſpectu T A, $\frac{4}{15}cv^2$; reſpectu b V, $\frac{16}{15}cv^2$; reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{8}{3}cvR - \frac{4}{15}cv^2$; Diſtantia Centri gravitatis à T A, $\frac{1}{5}v$; à b V, $\frac{4}{5}v$; à $\tau\alpha$, $h + \frac{4}{5}v = 2R - \frac{1}{5}v$:

H, L: Momentum reſpectu A α,

$$\frac{60ac^3R - 240c^2R^3 + 112c^2\chi R^2 + 6c^4\chi - 64\chi R^4 + 128R^5}{90R^2}.$$

Diſtantia Centri gravitatis ab A α,

$$\frac{60ac^3R - 240c^2R^3 + 112c^2\chi R^2 + 6c^4\chi - 64\chi R^4 + 128R^5}{120cvR^2 = 60c^3R}.$$

D, F. Aciemque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $2ch + \frac{4}{3}cv = 4cR$

E, F. $- \frac{2}{3}cv$: Momentum reſpectu T A, $\frac{4}{3}cvR - \frac{2}{5}cv^2$; reſpectu $\tau\alpha$, $8cR^2 - \frac{8}{3}cvR + \frac{2}{5}cv^2$; reſpectu b V, $\frac{8}{3}cvR - \frac{4}{15}cv^2$; Diſtantia Centri grav. à T A, $\frac{10vR - 3v^2}{30R - 5v}$;

H, L. à $\tau\alpha$, $\frac{60R^2 - 20vR + 3v^2}{30R - 5v}$; à b V, $\frac{20vR - 2v^2}{30R - 5v}$: Momentum reſpectu A α,

$$\frac{360acR^3 - 30ac^3R - 832R^5 + 416\chi R^4 + 52c^2\chi R^2 - 9c^4\chi}{90R^2};$$

Diſtantia Centri gravitatis ab A α,

360acR³

$$\frac{360acR^3 - 30ac^3R - 832R^5 + 416\chi R^4 + 52c^2\chi R^2 - 9c^4\chi}{360cR^3 - (60cvR^2 =)\, 30c^3R.}$$ Fig. 177.

Aciemque habentis $A\alpha$; Magnitudo, $2ac - \frac{16}{3}R^2 + (4\chi R - \frac{2}{3}b\chi =)\ \frac{8}{3}\chi R + \frac{2}{3}v\chi$: Momentum respectu T A, G,K. H,L.

$$\frac{30ac^3R - 128R^5 + 64\chi R^4 + 8c^2\chi R^2 + 9c^4\chi}{90R^2};$$ respectu $\tau\alpha$,

$$\frac{360acR^3 - 30ac^3R - 832R^5 + 416\chi R^4 + 52c^2\chi R^2 - 9c^4\chi}{90R^2};$$

respectu bV, $$\frac{60ac^3R - 240c^2R^3 + 112c^2\chi R^2 + 6c^4\chi - 64\chi R^4 + 128R^5}{90R^2};$$

Distantia Centri gravitatis à T A,

$$\frac{30ac^3R - 128R^5 + 64\chi R^4 + 8c^2\chi R^2 + 9c^4\chi}{180acR^2 - 480R^4 + 240\chi R^3 + (60v\chi R^2 =)\, 30c^2\chi R};$$

à $\tau\alpha$, $$\frac{360\,a\,c\,R^3 - 30\,a\,c^3\,R - 832\,R^5 + 416\chi R^4 + 52c^2\chi R^2 - 9c^4\chi}{180acR^2 - 480R^4 + 240\chi R^3 + 30c^2\chi R};$$

à bV, $$\frac{60\,a\,c^3\,R - 240\,c^2R^3 + 112\,c^2\,\chi\,R^2 + 6c^4\chi - 64\chi R^4 + 128R^5}{180acR^2 - 480R^4 + 240\chi R^3 + 30c^2\chi R}:$$

Momentum respectu $A\alpha$, $2\,a^2\,c + \frac{2}{3}c^3 - \frac{112}{9}\,c\,R^2 + \frac{4}{9}\,c\,\chi^2 + 8\,a\,\chi\,R - \frac{2a\chi^3}{3R} - \frac{c^5}{10R^2}$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, I,M.

$$\frac{180a^2cR^2 + 60c^3R^2 - 1120cR^4 + 40c\chi^2R^2 + 720a\chi R^3 - 60a\chi^3R - 9c^5}{180acR^2 - 480R^4 + 240\chi R^3 + 30c^2\chi R.}$$

N. Fig. 177. Adeoque exhibuimus, tum rectas Cycloidem (Primariam) tangentes; tum ipsius curvæ, partiumque ejusdem, longitudines, & Centra gravitatis; earumque Momenta respectu expositarum rectarum; Ungularum item superficialium, (adeoque & superficierum conversione factarum,) magnitudines, momenta, & Centra gravitatis. Quæque de expositis dicta sunt, ad alia facile transferentur.

O. Possunt etiam & Cycloidum Secundariarum (Contractarum scilicet & Protractarum) Tangentes exhiberi; earumque Curvis Semiellipses æquales; & partes partibus respective sumptis.

A. Sumpto, in Semicycloidis curva $A\tau$, puncto quovis b; duci intelligatur basi $\tau\alpha$, parallela b B; Circulo genitori, circa Cycloidis axem $A\alpha$ constituto, occurrens in B: Junctâque Chordâ A B; ducatur huic parallela, per punctum b, recta g b h. Dico rectam g b h, Semicycloidem in b contingere.

Sumptis in recta g b h, supra b, puncto g; &, infra, puncto h: ducantur, ipsi b B parallelæ, rectæ g x X G, h d H D, Semicycloidi occurrentes in x, d; Semicirculo in X, D; chordæque A B (productæ) in G, H.

Ostensum est (§ A. prop. 20.) arcui B A, æqualem esse rectam b B; adeoque & (propter parallelas) g G, & h H. Item arcui X A, rectam x X; & arcui D A, rectam d D.

Cumque ibidem demonstratum sit rectas B P, (fig. 167, 168, 169.) arcubus B X, ubique minores esse; rectasque B Y, arcubus B D majores: Similiter ostendetur, (fig. 177.) rectam X G minorem arcu B X; rectamque H D, majorem esse arcu B D. (Nam similiter, hic, ducitur A B, ab A; atque illic, α B, ab α.)

Adeoque; propter totam g G rectam, toti B A curvæ æqualem; & ablatam X G, ablatâ X B minorem: Erit reliqua X g recta, major quam reliqua X A curva, seu recta x X. Et, propterea, punctum g, extra cycloidem cadet.

Item; propter h H rectam, ipsi B A curvæ æqualem; & H D adjectam, majorem adjectâ B D: Erit tota D h recta, major quam tota

tota curva D A, ſeu D d recta. Et, propterea, punctum h eſt extra Cycloidem. Fig. 177.

Cum itaque, tum g (punctum quodvis ſupra b,) tum h (punctum quodvis infra b,) ſit extra Cycloidem; (adeoque unicum b punctum cycloidi commune;) recta g b h Cycloidem in b tangit.

Eſtque (propter parallelas) b g = B G, b h = B H, g h = G H; & (productâ b g, donec tangenti verticis A T occurrat in T,) b T = B A $= c = \surd 2vR$; (propter A V, A B, A α, hoc eſt, $v . c . 2R$. continue proportionales; ut ſæpe dictum eſt.) Item, (ductis g X O, b B V, h D C, ipſi T A parallelis, Axi A α occurrentibus in O, V, C, rectam V O, vel C O, intercipientibus; quam dicamus B;) erit, ut A V $= v$, ad A B $= \surd 2vR$; ſic V O, vel C O, $= B$; ad B G, vel H G; hoc eſt, ad b g, vel h g, $= \frac{B\surd 2vR}{v} = B\surd\frac{2R}{v}$. B.

Si itaque intelligatur recta A $\alpha = 2R$, in partes æquales numero infinitas, dividi, quarum una intelligatur V O, vel O C; adeoque omnes A V, hoc eſt omnes v, eo ſpectantes, arithmetice proportionales: Quæ his reſpondent ſubtenſæ totidem A B, hoc eſt, totidem $\surd 2vR$ correſpondentes; (ſeries utique ſubſecundanorum;) ſunt ut totidem rectæ V p ſemiparabolam A p P α (fig. 178.) complentes; cujus tum Axis A α, tum baſis α P, (adeoque & latus rectum,) ſit $= 2R$. Fig. 177, 178.

Rectæque b g, ſeu g h, tangentes; hoc eſt, (in partibus infinite exiguis) ipſæ b x, ſeu x d, curvæ; ſunt totidem $B\surd\frac{2R}{v}$, ſeu $\frac{B\surd 2R}{\surd v}$, correſpondentes; (hoc eſt, ſeries ſeriei ſubſecundanorum reciproca.)

Adeoque; ſi rectæ V O, vel O C, ſingulæ; hoc eſt, totidem B; intelligantur ipſis α O ſeu V O, totidem, fig. 177, 178. rectangulum A α O O complentibus, æquales; & ſumantur ubique, ut V p, ad α P, ſeu V P; ſic α O, ſeu V O, ad V ω: hoc eſt, ut $\surd 2vR$, ad $2R$; ſic B, ad $\frac{2BR}{\surd 2vR} = \frac{B\surd 2R}{\surd v} =$ V ω: Erunt omnes illæ b g, ſeu g h; hoc eſt, (in partibus infinite exiguis,) omnes illæ b x, ſeu x d, curvam A τ complentes; ad omnes illas V O, ſeu O C, complentes rectam A α; hoc eſt, ipſa A τ curva, ad rectam A α: ut

 omnes

Fig. 177, 178. omnes illæ $V\omega$ figuram interminabilem $A\alpha O\omega$ complentes, ad omnes illas VO complentes Rectangulum $A\alpha OO$; Hoc est, ut figura illa interminabilis, ad inscriptum parallelogrammum; Hoc est, ut Reciproca Secundanorum Series, cujus index est $-\frac{1}{2}$; ad congruam Æqualium seriem, cujus Index est ± 0, (per def. 1, 2. hujus.) hoc est (per prop. 1. hujus) ut 1 ad $-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$ seu ut 2 ad 1. Adeoque $A\tau$ curva, est dupla rectæ $A\alpha$.

Fig. 179. Vel etiam; eâdem Parabolâ inverso situ positâ, ut $\alpha\pi\Pi$, fig. 179. ductoque ad eandem diametrum Semicirculo $AB\alpha$: Si sumatur, ubique, ut VB ad $V\pi$, sic VO seu αO ad $V\omega$; (hoc est, ut $s=\sqrt{vh}$ ad $\sqrt{2hR}$, sic B ad $B\sqrt{\frac{2R}{v}}$:) habebitur eadem quæ prius figura interminabilis $A\alpha O\omega$: Reliquaque consequentur ut prius.

C. Similiter ostendetur (in partibus.) curvam Ab, ad AV rectam; esse, ut est figura $AV\omega\omega$ interminabilis ad $AVOO$ rectangulum.

Fig. 177, 178, 179. Et, consequenter, si intelligatur $A\alpha O\omega$ (figura interminabilis) rectâ $V\omega$ secari in ratione datâ: in eâdem ratione secabitur, in b, curva $A\tau$.

Quò autem secetur $A\alpha O\omega$ in ratione datâ; secanda erit $A\alpha$ recta in ejusdem ratione duplicatâ. Intellige, si ratio data sit r ad R; sitque AV ad $A\alpha$, ut r^2 ad R^2; erit $AV\omega\omega$, ad $A\alpha O\omega$, (adeoque Ab curva, ad curvam $A\tau$,) in data ratione r ad R. Esto enim $AV\ (=v)=\frac{2r^2}{R}$, (hoc est, ad $A\alpha=2R$, in ratione r^2 ad R^2:) Erit propterea $Vp\ (=AB=\sqrt{2vR})=\sqrt{4r^2}=2r$: Et $V\omega\ \left(=B\sqrt{\frac{2R}{v}}\right)=B\sqrt{\frac{R^2}{r^2}}=\frac{BR}{r}$. Adeoque Rectangulum $AV\omega$ $\left(=vB\sqrt{\frac{2R}{v}}\right)=2rB$. Hujus itaque duplum $4rB$, erit ipsa $AV\omega\omega$ interminabilis. (Nam, qua ratione $A\alpha O\omega$ est dupla inscripti parallelogrammi $A\alpha OO$; eâdem est $AV\omega\omega$ interminabilis, dupla huic inscripti parallelogrammi $AV\omega$; nempe per prop. 1. hujus.) Est autem (propter $A\alpha=2R$, & $\alpha O=B$,) Rectangulum $A\alpha OO$ $=2RB$; hujusque propterea duplum $A\alpha O\omega=4RB$. Ergo $AV\omega\omega$, ad $A\alpha O\omega$, (adeoque & Ab, ad $A\tau$,) ut $4rB$, ad $4RB$; hoc est, ut r ad R.

Cum itaque Sinus versi AV ad $A\alpha$, (hoc est v ad $2R$;) sint in duplicata ratione subtensarum AB ad $A\alpha$; (hoc est, $\sqrt{2vR}$

ad $2R$ ſeu $\sqrt{4R^2}$; vel $\sqrt{v}$ ad $\sqrt{2R}$:) Sintque item eædem AV ad Aα in duplicata ratione curvarum Ab ad Aτ, (ut modo demonſtratum eſt:) Eadem erit ratio Ab curvæ ad curvam Aτ, quæ eſt rectæ AB ad Aα rectam. Adeoque, ut Aτ curva ad rectam Aα, ſic curva Ab ad AB rectam. Eſt autem (uti jam demonſtravimus) curva Aτ dupla rectæ Aα; ergo & Ab curva, dupla eſt rectæ AB. Et ſic ubique. Hoc eſt, Aτ, $= 2$ A$\alpha = 4R$; & Ab $=$ 2AB $= 2c = 2\sqrt{2vR} = \sqrt{8vR}$. Fig. 177, 178, 179.

Vel etiam; ſic habetur, curvæ Aτ diviſio in ratione datâ. Diviſâ ſcilicet Aα in ratione datâ, in γ; aptetur AB $=$ Aγ: Ductâque Bb rectæ AT parallelâ, in eâdem ratione dividetur Aτ in b. Ut ex dictis patet. Nempe $R . r :: A\alpha . A\gamma = AB :: A\tau$. Ab. Fig 177, 180.

Porro; rectarum Vω, hoc eſt, BG, bg, vel GH, gh, hoc eſt, (in partibus infinite exiguis) bx, vel xd; à Tangente verticis TA, diſtantiæ, ſunt ipſæ AV $= v$, reſpectivæ. Quæ itaque in magnitudines $B\sqrt{\frac{2R}{v}}$ (modo inventas) ductæ; exhibent earundem reſpectu TA momenta, $B\sqrt{2vR}$ (ſeu cB.) Adeoque (ſumptis v arithmetice proportionalibus) curvæ Aτ, vel Ab, momentum reſpectu AT; vel Semiquadrantalis Ungula ſuperficialis ipſi Aτ vel Ab curvæ inſiſtens, aciem habens TA; eſt aggregatum omnium $B\sqrt{2vR}$ eo ſpectantium; vel (omiſſis B) omnium $\sqrt{2vR}$, hoc eſt, omnium Vp rectarum, Semiparabolam AαP, vel AVp, fig. 178. complentium: (eſt enim B, ut ex ipſius origine patet, nihil aliud quam ipſius Aα vel AV pars infiniteſima; quæ omnes ſimul ſumptæ ipſam Aα vel AV conficiunt; atque hic nihil innuit aliud quam rectarum illarum, planum complentium, craſſitiem.) Et propterea, ſuperficialis Ungula ipſi Aτ vel Ab curvæ inſiſtens, (aciem habens AT,) æquatur ipſi AαP, vel AVp, ſemiparabolæ; hoc eſt (propter latus rectum $2R$, axemque A$\alpha = 2R$, vel AV $= v$,) erit Ungula Aτ, $=$ AαP $= \frac{8}{3}R^2$; & Ungula Ab, $=$ AVp $= \frac{2}{3}v\sqrt{2vR} = \frac{2}{3}vc$. per prop. 1, vel 6. hujus. Adeoque quæ converſione curvæ Aτ vel Ab circa TA, deſcribitur ſuperficies; eſt $\frac{8}{3}RP$, vel $\frac{2P}{3R}v\sqrt{2vR} = \frac{2vcP}{3R}$; & ſemiconverſione, $\frac{4}{3}RP$, vel $\frac{P}{3R}v\sqrt{2vR} = \frac{vcP}{3R}$. Fig. 177. D.

Illudque

Fig.17. Illudque momentum, $\frac{8}{3}R^2$, vel $\frac{2}{3}v\sqrt{2vR} = \frac{2}{3}cv$, per ipsius curvæ A τ vel A b magnitudinem, $4R$ vel $2\sqrt{2vR} = 2c$ (modò inventum,) divisum; exhibet, centri gravitatis à T A, distantiam; nempe, ipsius A τ, $\frac{2}{3}R$; ipsiusque A b, $\frac{1}{3}v$.

Adeoque; ipsius A τ distantia centri gravitatis à $\tau\alpha$, erit $\frac{4}{3}R$; ejusque propterea respectu $\tau\alpha$ momentum, seu semiquadrantalis Ungula, $\frac{16}{3}R^2$: Ipsiusque A b, Distantia Centri gravitatis à b V, $\frac{2}{3}v$; & à $\tau\alpha$, $b+\frac{2}{3}v = 2R-\frac{1}{3}v$; adeoque ejusdem momentum (vel Semiquadrantalis Ungula) respectu b V, $\frac{4}{3}v\sqrt{2vR} = \frac{4}{3}vc$; & respectu $\tau\alpha$, $2b\sqrt{2vR}+\frac{4}{3}v\sqrt{2vR} = 2bc+\frac{4}{3}vc$, vel $4R\sqrt{2vR} - \frac{2}{3}v\sqrt{2vR} = 4cR-\frac{2}{3}cv$. Et superficies conversione vel semiconversione factæ, ad hæc momenta; ut P vel $\frac{1}{2}P$ ad R.

E. Deinde: Eorundem omnium $\sqrt{2vR}$ (Ungulam A τ vel A b, aciem habentem T A, complentium,) distantiæ à T A, sunt AV$=v$ respectivè: Adeoque eorundem respectu T A momenta, sunt omnia $v\sqrt{2vR}$ seu $\sqrt{2v^3R}$ (vel vc;) hoc est, ipsa rectarum V p semiparabolam A α P vel A V p constituentium momenta respectu T A. Hoc est, (per prop. 1. vel 6. hujus,) Semiquadrantalis Ungulæ superficialis, ipsi A τ, vel A b, insistentis, aciem habentis T A, respectu ejusdem T A, momentum, est $\frac{16}{5}R^3$, vel $\frac{2}{5}v^2\sqrt{2vR} = \frac{2}{5}cv^2$. Adeoque, superficiei semiconversione circa T A factæ momentum respectu ipsius T A, (quippe duplum momenti correspondentis Ungulæ Semiquadrantalis, propter magnitudinum rationem, ut $\frac{1}{2}P$ ad R, seu P ad $2R$, & distantiarum ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$, seu $4R$ ad P; ut sæpe ostensum est;) $\frac{32}{5}R^3$, vel $\frac{4}{5}cv^2 = \frac{4}{5}v^2\sqrt{2vR}$, prout de tota A τ, parteve A b, intelligitur.

Illudque Ungulæ Momentum $\frac{16}{5}R^3$ vel $\frac{2}{5}cv^2$, per magnitudinem $\frac{8}{3}R^2$ vel $\frac{2}{3}cv$ divisum; exhibet distantiam centri gravitatis istius A τ vel A b superficialis Ungulæ (aciem habentis T A) ab ipsa T A, $\frac{6}{5}R$ vel $\frac{3}{5}v$; (adeoque correspondentis Superficiei Semiconversione factæ, centri inde distantiam, $\frac{24R^2}{5P}$, vel $\frac{12vR}{5P}$; nempe, ad illam Ungulæ, ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$, seu $4R$ ad P.) Et propterea, distantiam centri gravitatis ejusdem Ungulæ A τ (aciem habentis T A) à $\tau\alpha$, $\frac{4}{5}R$ (ejusque igitur respectu $\tau\alpha$ momentum $\frac{32}{15}R^3$;) Ungulæque A b (aciem item habentis T A) distantiam centri gravitatis à b V, $\frac{2}{5}v$; à $\tau\alpha$, $b+\frac{2}{5}v = 2R-\frac{3}{5}v$; adeoque ipsius, respectu b V, momentum, $\frac{4}{15}v^2\sqrt{2vR} = \frac{4}{15}cv^2$; & respectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}vb\sqrt{2vR} + \frac{4}{15}v^2\sqrt{2vR} = \frac{2}{3}s^2c + \frac{4}{15}v^2c$, vel $\frac{4}{3}vR\sqrt{2vR} - \frac{2}{5}v^2\sqrt{2vR} = \frac{4}{3}cvR - \frac{2}{5}cv^2$.

Sed

Sed & idem $\frac{32}{15}R^3$ (propter magnitudinum & distantiarum reciprocationem) est etiam Ungulæ superficialis A τ, aciem habentis $\tau\alpha$ momentum respectu TA; quod itaque per magnitudinem $\frac{16}{3}R^2$ (modo inventam) divisum, exhibet distantiam centri gravitatis à TA, $\frac{2}{5}R$; adeoque, à $\tau\alpha$, $\frac{8}{5}R$, ejusque propterea respectu aciei suæ $\tau\alpha$ momentum, $\frac{128}{15}R^3$: Superficiei vero semiconversione circa $\tau\alpha$ descriptæ, respectu ipsius $\tau\alpha$, Momentum, (utpote Momenti Ungulæ duplum,) $\frac{256}{15}R^3$; Centrique gravitatis à $\tau\alpha$ distantiam, (utpote ad illam Ungulæ ut $4R$ ad P,) $\frac{32R^2}{5P}$. Fig. 177.

Item (propter eandem magnitudinum & distantiarum reciprocationem) $\frac{4}{15}v^2\sqrt{2vR}=\frac{4}{15}cv^2$, momentum etiam erit Ungulæ Ab aciem habentis bV, respectu ipsius TA: Quod itaque per magnitudinem modo inventam $\frac{4}{3}v\sqrt{2vR}=\frac{4}{3}cv$ divisum, exhibet distantiam centri gravitatis à TA, $\frac{1}{5}v$; adeoque à bV, $\frac{4}{5}v$; à $\tau\alpha$, $h+\frac{4}{5}v$ $=2R-\frac{1}{5}v$; ejusque propterea respectu ipsius bV (aciei suæ) momentum $\frac{16}{15}v^2\sqrt{2vR}=\frac{16}{15}cv^2$; & respectu $\tau\alpha$, $\frac{4}{3}chv+\frac{16}{15}cv^2$ $=\frac{8}{3}cvR-\frac{4}{15}cv^2$: Superficiei vero semiconversione circa bV factæ, momentum respectu ipsius bV, $\frac{32}{15}cv^2$; ejusque inde distantiam centri gravitatis $\frac{16vR}{5P}$.

Itemque (ob eandem causam) $\frac{4}{3}cvR-\frac{2}{5}cv^2$, est etiam Momentum Ungulæ superficialis Ab, aciem habentis $\tau\alpha$, respectu TA: Quod itaque per magnitudinem modo inventam $4cR-\frac{2}{3}cv$ divisum, exhibet illius à TA distantiam centri gravitatis $\frac{10R-3v}{30R-5v}v$: Adeoque, à $\tau\alpha$, $\frac{60R^2-20vR+3v^2}{30R-5v}$; à bV, $\frac{20vR-2v^2}{30R-5v}$: Ejusque propterea momentum respectu $\tau\alpha$, $8cR^2-\frac{8}{3}cvR+\frac{2}{5}cv^2$; & respectu bV, $\frac{8}{3}cvR-\frac{4}{15}cv^2$: Superficiei vero semiconversione ipsius Ab circa $\tau\alpha$ descriptæ, momentum respectu ipsius $\tau\alpha$, $16cR^2-\frac{16}{3}cvR+\frac{4}{5}cv^2$; centrique gravitatis inde distantiam $\frac{240R^3-80vR^2+12v^2R}{30RP-5P}$.

Eadem etiam sic habentur. Sumptis Subtensis AB$=c$ (adeoque & curvis Ab$=2c$) arithmetice proportionalibus; adeoque (per § C.) divisâ Aτ curva in partes æquales; erit singulorum b punctorum F. Fig. 177, 181.

à

Fig. 177, 181. à T A diſtantiæ A V $(= v) = \frac{c^2}{2R}$; (hoc eſt, ut ſeries ſecundanorum, ſeu ordinatim-applicatæ in ſemiparabolæ complemento;) eorumque à $\tau\alpha$ diſtantiæ $V\alpha = 2R - \frac{c^2}{2R}$. Adeoque ſi intelligatur A b τ curva fig. 177. in rectam expandi, vel huic æqualem rectam ſumi A b τ, vel $\alpha\beta$P, fig. 181; Ejuſque b punctis, æqualiter ab invicem diſtantibus, inſiſtentes rectæ b p ipſis A V reſpectivis æquales, figuram A P τ complentes: Exhibebunt hæ rectæ ſingulorum b punctorum, ſeu particularum minutarum, momenta reſpectu ipſius T A fig. 177. (ſicut & reſiduæ p β, earundem momenta reſpectu $\tau\alpha$; nam propter b p = A V, erit p β = V α:) Et propterea, tum planum A τ P, totius A τ curvæ; tum planum A b p, curvæ A b, momentum reſpectu T A: Et ſimiliter planum A P α, curvæ A τ; & A p $\beta\alpha$, curvæ A b momentum exhibebit, reſpectu $\tau\alpha$; & A p V, ejuſdem A b momentum reſpectu b V. Eſt autem, (propter ordinatas $bp = \frac{c^2}{2R}$, in duplicatâ ratione diametrorum $Ab = 2c$,) Trilineum A P τ ſemiparabolæ complementum; ipſumque A P α, Parabola: Adeoque (propter $A\tau = 4R$, & $\tau P = 2R$,) $AP\tau = \frac{8}{3}R^2$; & $AP\alpha = \frac{16}{3}R^2$; (per prop. 6. hujus:) Quæ itaque ſunt curvæ A τ momenta reſpectu T A & $\tau\alpha$. Similiter; propter $Ab = 2c$, & $bp = \frac{c^2}{2R}$; erit curvæ A b momentum reſpectu T A, $\frac{c^3}{3R}$; & reſpectu b V, $\frac{2c^3}{3R}$; & A p $\beta\alpha$ (= A b $\beta\alpha$ — A p b) $= 4cR - \frac{c^3}{3R}$ ejuſdem, reſpectu $\tau\alpha$, momentum. Hoc eſt, (propter $c^2 = 2vR$) $\frac{2}{3}cv$, & $\frac{4}{3}cv$, & $4cR - \frac{2}{3}cv$. Ut prius. Quæ quidem momenta, eadem ſunt atque correſpondentes Ungulæ; ut ſæpius dictum eſt.

Cumque quæ has ſuperficiales Ungulas conſtituunt rectæ, ſunt ipſarum ab aciebus ſuis diſtantiis æquales; adeoque momenta, ut ipſarum quadrata: Erit ſuperficialis Ungulæ A τ aciem habentis T A, momentum reſpectu T A, omnia rectarum b p quadrata, hoc eſt omnia $\frac{c^4}{4R^2}$ uſque ad eorum maximum, hoc eſt quadratum $\tau P = \frac{16R^4}{4R^2} = 4R^2$; adeoque ad maximum toties ſumptum, ut 1 ad 5:

hoc

hoc eſt (propter $A\tau = 4R$,) $\frac{1}{5} \times 4R \times 4R^2 = \frac{16}{5}R^3$ per prop. 1. hujus. Fig. 177, 181.

Et ſimiliter, Superficialis Ungulæ A b, aciem item habentis T A, (fig. 177.) reſpectu ejuſdem T A momentum; erunt omnia $\frac{c^4}{4R^2}$ uſque ad eorum maximum, puta $\frac{C^4}{4R^2}$; adeoque (propter A b $= 2C$,) momentum illud erit $\frac{1}{5} \times 2C \times \frac{C^4}{4R^2} = \frac{C^5}{10R^2}$; vel (reſtituendo c minuſculam) $\frac{c^5}{10R^2}$; hoc eſt, (propter $c^2 = 2vR$, adeoque $c^4 = 4v^2R^2$,) $\frac{2}{5}cv^2$.

Similiter, Superficialis Ungulæ A b, aciem habentis b V, fig. 177. momentum reſpectu ejuſdem b V; erunt omnia quadrata rectarum, ipſi A V parallelarum, ſemiparabolam A p V complentium; hoc eſt, quadrata rectarum $\frac{C^2}{2K} - \frac{c^2}{2R}$; hoc eſt, omnia $\frac{C^4 - 2c^2C^2 + c^4}{4R^2}$; hoc eſt, per prop. 1. hujus, (propter $Ab = 2C$, & quadratum b p, $= \frac{C^4}{4R^2}$,) $\frac{2C^5 - \frac{4}{3}C^5 + \frac{2}{5}C^5}{4R^2} = \frac{\frac{16}{15}C^5}{4R^2}$; vel (reſtituto valore c minuſculæ) $\frac{4c^5}{15R^2}$; hoc eſt, (propter $c^4 = 4v^2R^2$,) $\frac{16cv^2}{15}$; ut prius.

Item; Superficialis Ungulæ A b aciem habentis $\tau\alpha$, momentum reſpectu $\tau\alpha$, ſunt omnia quadrata $p\beta$ eo ſpectantia; hoc eſt, quadrata rectarum $p\beta$, parabolæ portionem $Ap\beta\alpha$ complentium; hoc eſt, omnium $b\beta - bp$; h.e. omn. $2R - \frac{c^2}{2R}$, ſeu $\frac{4R^2 - c^2}{2R}$; hoc eſt, omnia $\frac{16R^4 - 8c^2R^2 + c^4}{4R^2}$; hoc eſt, per prop. 1. hujus (propter $Ab = \alpha\beta = 2C$,) $\frac{32CR^4 - \frac{16}{3}C^3R^2 + \frac{2}{5}C^5}{4K^2}$; hoc eſt, (propter $c^2 = 2vR$, & $c^4 = 4v^2R^2$; item, reſtituta c minuſcula;) $8cR^2 - \frac{8}{3}cvR + \frac{2}{5}cv^2$: Ut prius.

Atque hinc, centrorum gravitatis à T A, b V, $\tau\alpha$, diſtantiæ; reliquaque deducentur; eadem quæ prius.

Kkk Porro;

G. Porro; si intelligatur curva $A\tau$ fig. 177. in minutas partes æ-
Fig. 177, quales (ut prius) dividi; Erit singulorum b punctorum, seu par-
182, tium minutarum, ab $A\alpha$, distantia $bV = bB + BV = a + s$:
183. Sumptis $AB = c$ (adeoque & $Ab = 2c$) arithmetice proportionalibus.

Adeoque; si intelligatur curva $A\tau$ fig. 177. in rectam $A\tau$ fig. 182. expandi; cui ordinatim-applicentur, (in singulis b punctis,) ex una parte, rectæ bB (trilineum $A\tau\alpha$ fig. 182. complentes) ipsis bB fig. 177. æquales; &, ex altera parte, rectæ $b\upsilon$ (complentes bilineum $A\tau\upsilon$) æquales ipsis BV fig. 177. singulæ Rectæ $Bb\upsilon$ fig. 182. singulorum b punctorum, seu minutarum partium, momenta respectu rectæ $A\alpha$ fig. 177. exhibebunt; adeoque & omnes omnium; sive quæ totam $A\tau$, sive quæ ipsius partem Ab spectant. Hoc est, Tota $A\alpha\tau\upsilon$, totius $A\tau$ curvæ; ejusque pars $ABb\upsilon$, partis Ab; momentum respectu rectæ $A\alpha$ fig. 177. exhibebunt; vel correspondentem Ungulam Semiquadrantalem.

Sunt utique rectæ Bb, trilineum $A\alpha\tau$ fig. 182. complentes; hoc est, rectæ Bb fig. 177. ut arcus chordarum in semicirculo, vel sinuum rectorum in Quadrante, arithmetice proportionalium; hoc est, ut rectæ γo fig. 170. complentes trilineum $\alpha\varkappa\Gamma$; (quod est, figuræ sinuum rectorum unius quadrantis $\alpha\varkappa\delta$, complementum ad parallelogrammum).

Quippe sumptis $\alpha\gamma$, seu ξo, sinibus rectis arithmetice proportionalibus; erunt, quæ his respondent, γo, seu $\alpha\xi$, eorundem arcubus æquales: quorum duplis, æquantur, chordarum in semicirculo respondentium arcus; seu rectæ Bb, fig. 182. Puta, rectis γo complentibus $A\varkappa\alpha$ trilineum fig. 183. ipsi $\alpha\varkappa\Gamma$ fig. 170. simile. Neque aliter differt trilineum $A\tau\alpha$ fig 182. ab $A\alpha\varkappa$ fig. 183. quam quod (retentis eisdem latitudinibus $bB = \gamma o$) altitudinem duplum habeat, nempe $A\tau = 2A\alpha$. Adeoque cum trilineo $\alpha\varkappa\Gamma$, fig. 170. comparatum, latitudinem habet duplam ($bB = 2\gamma o$) altitudinem quadruplam, $A\tau = 4\alpha\Gamma$. Cum itaque Latitudo Dupla sit, & Altitudo Quadrupla; Figura figuræ est Octupla: Nempe $A\tau\alpha$ fig. 182. $= 8\alpha\Gamma\varkappa$ fig. 170. Et $ABb = 8\alpha o\gamma$; similiter divisis $A\tau$ in b, & $\alpha\Gamma$ in γ.

Est autem $\alpha\delta\varkappa\Gamma = \frac{1}{4}RP$ (propter $\alpha\delta = \frac{1}{4}P$, & $\alpha\Gamma = R$;) & $\alpha\varkappa\delta = R^2$, (per § Q. prop. 17.) ergo $\alpha\varkappa\Gamma = \frac{1}{4}RP - R^2$. Adeoque $A\alpha\tau$ (fig. 182.) $= 2RP - 8R^2$.

Similiter, (in partibus,) $\alpha\xi o\gamma = as$, (positis $\alpha\xi = a$; &

ξo

$\xi o = s$;) & $\alpha o \xi = vR$ (per § Q. prop. 17.) ergo $\alpha o \gamma = as$ Fig. 177,
$- vR$. Adeoque A B b (fig. 182.) $= 8as - 8vR$, Hoc eſt, Octu- 182,
plum facti ex s ſemiſubtenſa, ſeu ſinu ſemiarcus, in ejuſdem ſinûs 183.
arcum, ſeu ſemiarcum ſubtenſæ; minus, octuplo ſinus verſi ejuſdem ſemiarcûs, in Radium ducti. Hoc eſt (fig. 179.) 8 A N × A M — 8 M N × N C: Hoc eſt, 2 A N B × A M B — 8 M N × N C: Hoc eſt (propter M N = C N — $\frac{1}{2}$ αB) 2 A N B × A M B — 8 N C × N C + 4 α B × N C: Hoc eſt (poſitis A N B $= a$, A M B $= c$, αB $= \chi$, & N C $= R$,) $2ac - 8R^2 + 4\chi R$.

Deinde; rectæ b υ fig. 182. (Bilineum A $\tau \upsilon$ complentes,) hoc eſt B V fig. 177. (ſumptis AB $= c$, adeoque & Ab $= 2c$, arithmetice proportionalibus,) ſunt ſinus recti Arcuum quorum ſubtenſæ ſunt arithmetice proportionales. Eſt autem (propter ſimilia Triangula fig. 177.) ut A $\alpha = 2R$ ad A B $= c$; ſic α B $= \sqrt{:4R^2 - c^2:} = \chi$, ad BV $= s = \frac{c\sqrt{:4R^2 - c^2:}}{2R} = \frac{c\chi}{2R}$. Adeoque Omnes b υ complentes vel totam A $\tau \upsilon$, vel ipſius partem A b υ, ſunt Omnia $\frac{c\sqrt{:4R^2 - c^2:}}{2R}$ vel $\frac{c\chi}{2R}$, eo ſpectantia; ſumptis c arithmetice proportionalibus. Quarum aggregatum ſic colligitur.

Si intelligatur A α Q (fig 183.) Circuli quadrans; qui Radium habeat A $\alpha = 2R$ æqualem circuli genitoris Diametro; in quo ſumantur A $\gamma = c$ arithmetice proportionales; rectæque γ q, ipſi A Q parallelæ. Erit ubique γ q $= \sqrt{:4R^2 - c^2:} = \chi$. (Nam quadratum q A, hoc eſt A α, dempto quadrato A γ, æquatur quadrato γ q.) Adeoque Omnes γ q, ſive quæ totam A α Q quadrantem, ſive quæ ipſius partem A γ q Q complent, ſunt Omnes $\sqrt{:4R^2 - c^2:}$ (ſeu omnes χ.) eo ſpectantes: Cumque harum ab A Q diſtantia ſit A $\gamma = c$ reſpective: Erunt Omnia $c\sqrt{:2R^2 - c^2:}$ (ſeu Omn. $c\chi$,) idem atque iſtius A α Q quadrantis, ejuſve A γ q Q ſegmenti, momentum reſpectu A Q rectæ.

Quadrantis autem A α Q, ſi poneretur radius $= R$, momentum reſpectu A Q, eſſet $\frac{1}{3}R^3$ (per § Q. prop. 15.) ergo, poſito radio A$\alpha = 2R$, erit $\frac{8}{3}R^3$: Quod itaque eſt aggregatum omnium $c\sqrt{:4R^2 - c^2:}$ eo ſpectantium. Adeoque $\frac{4}{3}R^2 = Omn. \frac{c\sqrt{:4R^2 - c^2:}}{2R}$ ipſum A $\alpha \upsilon$ Bilineum fig. 183. (ſumptis ubique, ut A α ad A γ, ſic γ q ad $\gamma \upsilon$.) Ejuſque duplum (propter duplam altitudinem) $\frac{8}{3}R^2$, eſt Bilineum A $\tau \upsilon$ fig. 182. Quod ab A $\alpha \upsilon$ fig. 183. non aliter differt,

Fig. 177, 182, 183. differt, quam quod (retentis eiſdem latitudinibus reſpectivis $b\upsilon = \gamma\upsilon$) altitudinem duplam habeat, $A\tau = 2A\alpha$.

Item, Sectoris qAQ, momentum reſpectu AQ, poſito Radio $= R$, eſſet (per § Q. prop. 15.) $\frac{1}{3}\upsilon R^2$; hoc eſt, Triens facti ex arcûs ſinu verſo in quadratum Radii; hoc eſt, in præſenti caſu, ex $QV = AQ - \gamma q = 2R - \sqrt{:4R^2 - c^2:} = 2R - \chi$, in quadratum $A\alpha$, $= 4R^2$: Hoc eſt, $\frac{8}{3}R^3 - \frac{4}{3}R^2\sqrt{:4R^2 - c^2:} = \frac{8}{3}R^3 - \frac{4}{3}\chi R^2$. Cui ſi addatur Momentum (reſpectu ejuſdem AQ) Trianguli $Aq\gamma$; hoc eſt (propter $\gamma q = \sqrt{:4R^2 - c^2:} = \chi$, & $A\gamma = c$; centrique gravitatis ab AQ diſtantiam $\frac{2}{3}c$;) $\frac{1}{3}c^2\sqrt{:4R^2 - c^2:} = \frac{1}{3}c^2\chi$. Habetur totius $A\gamma qQ$ momentum reſpectu AQ, $\frac{8}{3}R^3 - \frac{4}{3}R^2\sqrt{:4R^2 - c^2:} + \frac{1}{3}c^2\sqrt{:4R^2 - c^2:}$ vel $\frac{8}{3}R^3 - \frac{4}{3}\chi R^2 + \frac{1}{3}\chi c^2$: Hoc eſt (propter $4R^2 - c^2 = \chi^2$,) $\frac{8}{3}R^3 - \frac{1}{3}\chi^3$. Quod itaque eſt Omnium $c\sqrt{:4R^2 - c^2:}$ eo ſpectantium aggregatum: Adeoque $\frac{4}{3}R^2 - \frac{\chi^3}{6R} = Omn. \frac{c\sqrt{:4R^2 - c^2:}}{2R}$ eſt ipſum $A\gamma\upsilon$ fig. 183. Ejuſque duplum $\frac{8}{3}R^2 - \frac{\chi^3}{3R}$, (propter duplam altitudinem) eſt ipſum $Ab\upsilon$ fig. 182.

Eſt itaque (propter $A\alpha\tau = 2RP - 8R^2$, & $A\tau\upsilon = \frac{8}{3}R^2$,) totum $A\alpha\tau\upsilon$ fig. 182. $= 2RP - \frac{16}{3}R^2$. Quod itaque eſt curvæ Semicycloidis $A\tau$ fig. 177. momentum reſpectu rectæ $A\alpha$; vel Semiquadrantalis Ungula eidem inſiſtens aciem habens $A\sigma$. (Adeoque ſuperficies curva ejuſdem circa $A\alpha$ converſione deſcripta, $2P^2 - \frac{16}{3}RP$; &, ſemiconverſione, $P^2 - \frac{8}{3}RP$.) Illudque curvæ $A\tau$ momentum, per magnitudinem $(4R)$ diviſum; exhibet ejuſdem $A\tau$ curvæ diſtantiam centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}P - \frac{4}{3}R$: Adeoque à $T\tau$, $\frac{4}{3}R$, tantundem ſcilicet quantum à $\tau\alpha$ (§ D.) atque tantundem eſt ejuſdem reſpectu utriuſvis Momentum, nempe $\frac{16}{3}R^2$; & æquales utrobique ſuperficies converſione exhibet, $\frac{16}{3}RP$; & ſemiconverſione $\frac{8}{3}RP$.

Item (propter $AbB = 2ac - 8R^2 + 4\chi R$; & $Ab\upsilon = \frac{8}{3}R^2 - \frac{\chi^3}{3R}$,) totum $ABb\upsilon$ fig. 182. $= 2ac - \frac{16}{3}R^2 + 4\chi R - \frac{\chi^3}{3R}$; vel (propter $\chi^2 = 2bR$; cum ſint αA, αB, αV; hoc eſt, $2R, \chi, b$, continue proportionales;) $2ac - \frac{16}{3}R^2 + 4\chi R - \frac{2}{3}b\chi = 2ac - \frac{16}{3}R^2 + \frac{8}{3}\chi R + \frac{2}{3}\upsilon\chi$. Quod itaque, eſt ipſius Ab curvæ momentum reſpectu $A\alpha$; vel Semiquadrantalis Ungula eidem inſiſtens,

insistens, aciem habens A α. (Adeoque superficies curva ejusdem circa A α conversione facta, $\frac{2acP}{R} - \frac{16}{3}RP + (\frac{8}{3}\chi P + \frac{2v\chi P}{3R} =)$ Fig. 177, 182, 183.

$\frac{4}{3}\chi P - \frac{2b\chi P}{3R}$: Et, semiconversione facta, hujus semissis.) Illudque momentum, per magnitudinem ($2c$) divisum; exhibet, ejusdem A b curvæ, distantiam centri gravitatis ab A α, $a - \frac{8R^2}{3c} + \frac{2\chi R}{c} - \frac{b\chi}{3c} = a - \frac{8R^2 + b\chi - 6\chi R}{3c}$.

Deinde; (Divisâ ut prius A τ, curvâ fig. 177, 180. in minutas partes æquales:) Cum quæ singulis b punctis (seu minutis particulis) insistunt, semiquadrantalem ungulam, cujus acies T A, complentes, sint (per § F.) $\frac{c^2}{2R}$; sintque illarum ab A a distantiæ (per § G.) $a + s$; erunt singularum momenta $\frac{a+s}{2R}c^2 = \frac{f}{2R}c^2$, (sumptis c arithmetice proportionalibus.) Adeoque momentum simul omnium, (sive quæ totam A τ, sive quæ partem A b spectant,) est Aggregatum omnium $\frac{fc^2}{2R}$ eo spectantium; hoc est, *Omn.* $\frac{ac^2}{2R} + \frac{sc^2}{2R}$. H. Fig. 177, 180.

Sunt autem *Omnes a* (sumptis c arithmetice proportionalibus) æquales respectivis rectis b B fig. 182. vel γo fig. 183. (ut § G. ostensum est) harumque ab A δ distantiæ sunt ipsæ A $\gamma = c$ respectivæ; adeoque quæ illis insistunt plana Ungulam Semiquadrantalem complentia (aciem habentem A δ) sunt *Omn.* ac: Horumque planorum ab A δ distantiæ sunt itidem A $\gamma = c$: Ergo eorum omnium momenta sunt *Omn.* ac^2. Fig. 170, 182. 183.

Sunt itaque *Omnia* ac^2 eo spectantia, idem atque Momentum Ungulæ Semiquadrantalis A $\kappa\alpha$, vel A $o\gamma$, (aciem habentis A δ,) respectu ipsius A δ. Hoc est, *Sexdecuplum* momenti similis Ungulæ $\alpha\kappa\Gamma$, vel $\alpha o\gamma$, fig. 170. (aciem habentis $\alpha\delta$,) respectu ipsius $\alpha\delta$. Nempe in ratione *Quadruplicata* laterum homologorum, A α ad $\alpha\Gamma$, (quæ dupla est;) propter tum singulas trium solidi dimensionum, tum distantiam ab axe conversionis; Duplas in A $\kappa\alpha$, earum quæ in $\alpha\kappa\Gamma$.

Fig. 170, 182, 183. Est autem Momentum Ungulæ $\alpha\kappa\Gamma$ fig. 170. respectu aciei suæ $\alpha\delta$, idem atque Momentum Ungulæ $\alpha\delta\kappa\Gamma$, dempto momento Ungulæ $\alpha\kappa\delta$ respectu communis aciei $\alpha\delta$. Hoc est, $\frac{1}{12}R^3P$ (propter $\alpha\Gamma = R$, & $\alpha\delta = \frac{1}{4}P$,) dempto $\frac{2}{9}R^4$ (per § N. prop. 19.) Hoc est, $\frac{1}{12}R^3P - \frac{2}{9}R^4$. Adeoque Momentum similis Ungulæ $A\kappa\alpha$ fig. 183. respectu aciei $A\delta$, (utpote illius Sedecuplum) $\frac{4}{3}R^3P - \frac{32}{9}R^4$. Quod itaque est aggregatum omnium ac^2 totam $A\alpha$ fig. 183. spectantium. Adeoque $\frac{2}{3}R^2P - \frac{16}{9}R^3$, aggregatum *Omn.* $\frac{ac^2}{2R}$, eo spectantium. Et (propter $A\tau$ fig. 182. $= 2A\alpha$, fig. 183.) ejusdem duplum $\frac{4}{3}R^2P - \frac{32}{9}R^3$ est aggregatum *Omn.* $\frac{ac^2}{2R}$, spectantium $A\tau$ rectam fig. 182. curvamve $A\tau$ fig. 177.

Item Momentum Ungulæ $\alpha o\gamma$ fig. 170. respectu aciei suæ $\alpha\xi$; idem est atque Momentum Ungulæ $\alpha\xi o\gamma$, dempto momento Ungulæ $\alpha o\xi$, respectu communis aciei $\alpha\xi$. Hoc est, $\frac{1}{3}as^3$ (positis $\alpha\xi = a$, & $\alpha\gamma = \xi o = s$,) dempto $\frac{1}{9}v^2R^2 + \frac{1}{9}s^2vR$ (per § N. prop. 19.) Hoc est, $\frac{1}{3}as^3 - \frac{1}{9}v^2R^2 - \frac{1}{9}s^2vR$; (sumptis s, pro semisubtensa, seu sinu dimidii arcus; & a, v, pro illo arcu dimidio ejusque sinu verso; hoc est, $a = AN$, $s = AM$, $v = MN$, fig. 179. Adeoque Momentum similis Ungulæ $Ao\gamma$ fig. 183. (utpote illius sexdecuplum,) $\frac{16}{3}as^3 - \frac{16}{9}v^2R^2 - \frac{16}{9}s^2vR$ (sumptis a, s, v, eodem sensu;) Hoc est (sumptis $a = ANB$, $c = 2s = AMB$, $v = MN = CN - CM = CN - \frac{1}{2}\alpha B = R - \frac{1}{2}\chi$, adeoque & $v^2 = R^2 - \chi R + \frac{1}{4}\chi^2 = R^2 - \chi R + R^2 - \frac{1}{4}c^2 = 2R^2 - \chi R - \frac{1}{4}c^2$;) $\frac{1}{3}ac^3 - \frac{32}{9}R^4 + \frac{16}{9}\chi R^3 + \frac{4}{9}c^2R^2 - \frac{4}{9}c^2R^2 + \frac{2}{9}c^2\chi R$, $= \frac{1}{3}ac^3 - \frac{32}{9}R^4 + \frac{16}{9}\chi R^3 + \frac{2}{9}c^2\chi R$. Quod itaque est aggregatum *Omnium* ac^2 rectam $A\gamma$ spectantium. Adeoque $\frac{ac^3}{6R} - \frac{16}{9}R^3 + \frac{8}{9}\chi R^2 + \frac{1}{9}c^2\chi$, aggregatum *Omn.* $\frac{ac^2}{2R}$, eo spectantium. Et (propter $A\tau$ fig. 182. figuræ altitudinem, duplam altitudinis $A\alpha$ fig. 183.) ejusdem duplum, nempe $\frac{ac^3}{3R} - \frac{32}{9}R^3 + \frac{16}{9}\chi R^2 + \frac{2}{9}c^2\chi$, est aggregatum *Omnium* $\frac{ac^2}{2R}$, rectam Ab fig. 182, curvamque Ab fig. 177. spectantium.

Insuper Omnes s (sumptis c arithmetice proportionalibus,) sunt idem atque omnes bv fig 182. seu duplum *Omnium* $s = \gamma v$ fig 183. (ut § G. ostensum

ostensum est.) Sed Omn. s (= Omn. γv) sunt Omn. $\frac{c\sqrt{:4R^2 - c^2:}}{2R}$ Fig. 177, 180, 182, 183.

seu Omn. $\frac{c\chi}{2R}$. Adeoque Omn. sc, (seu ipsius $A\alpha v$, vel $A\gamma v$, momentum respectu AQ, vel correspondens Ungula) sunt Omn. $\frac{c^2\sqrt{:4R^2 - c^2:}}{2R}$ (Idem atque Ungulæ A Q q α vel A Q q γ, aciem habentis A Q, momentum respectu A Q, per $2R$ divisum:) Et Omn. sc^2; (hoc est, momentum Ungulæ $A\alpha v$, vel $A\gamma v$, fig. 183. aciem habentis A Q, respectu ejusdem A Q,) sunt Omn. $\frac{c^3\sqrt{:4R^2 - c^2:}}{2R}$ seu Omn. $\frac{c^3\chi}{2R}$. Et propterea Omn. $\frac{sc^2}{2R}$, sunt Omn. $\frac{c^3\sqrt{:4R - c^2:}}{4R^2}$, seu Omn. $\frac{c^3\chi}{4R^2}$.

Sunt autem Omnes $\sqrt{:4R^2 - c^2:}$ seu Omnes χ; (sumptis c arithmetice proportionalibus,) sigillatim æquales rectis γ q, complentibus quadrantem A α Q fig. 183. (per § G.) Quibus æquales intelligantur rectæ γ q quadrantem A α Q fig. 184. similiter complentes. Cui adjacere intelligatur Semiparaboloidis Cubicalis complementum A P α, quadrato A α P D inscriptum; verticem habens A. Cujus itaque Paraboloideos Latus rectum erit $4R^2$ (quod utique in diametrum A D = $2R$, ductum, efficiat $8R^3$ Cubum ordinatim in Paraboloide applicatæ D P = $2R$;) per quod itaque $4R^2$, si dividatur rectæ D P = A α = $2R$, cubus $8R^3$; habebitur Diameter in Paraboloide vel Ordinatim in Complemento applicata AD = αP $= \frac{8R^3}{4R^2} = 2R$: Et similiter, si per idem $4R^2$, dividatur, rectæ pd = Aγ = c, Cubus c^3; habebitur diameter in Paraboloide, vel ordinatim applicata in complemento A d = γ p = $\frac{c^3}{4R^2}$; & sic ubique. (Sunt utique Ordinatim-applicatæ in Semiparaboloidis hujus complemento, in diametrorum interceptarum complementi ratione triplicata, seu ut earum Cubi.) Fig. 184.

Cum itaque quæ quadrantem A α Q fig. 184. complent rectæ γ q, sint ipsæ, $\chi = \sqrt{:4R^2 - c^2:}$ quæque Semiparaboloideos Cubicalis complementum A α P, complent rectæ γ p, sint ipsæ $\frac{c^3}{4R^2}$; quæ ex his fiunt rectangula, sunt ipsa $\frac{c^3\sqrt{:4R^2 - c^2:}}{4R^2}$ seu $\frac{c^3\chi}{4R^2}$.

Si

Fig. 177, 184. Si itaque intelligatur ex hujusmodi rectangulis compleri Solidum, ipsi A α Q quadranti incumbens, altitudinem habens, in singulis γ q rectis, æqualem respectivis rectis γ p; Solidum hoc integrum AαQ, ejusve segmentum A γ q; erit aggregatum omnium $\frac{c^3\sqrt{:4R^2-c^2:}}{4R^2}$ quæ vel totam A α, vel ipsius partem A γ, spectant. Vel etiam (quod eodem recidet) si intelligatur A α P complementi Semiparaboloidis planum, super circuli plano, in A α, ad angulos rectos erectum, moveri (invariato angulo) ab A α ad Q τ, motu suo describens solidum Prismaticum seu columnare, circuli plano incumbens, duobus Trilineis ipsi A α P similibus & æqualibus interjectum; quod secet Cylindri recti superficies arcui Q q α insistens, solidum inde abscindens A Q q α: Solidum sic abscissum, complebunt istiusmodi rectangula. Quippe γ p recta, sic mota, super γ q rectam describet q γ p rectangulum. Et sic ubique.

Idemque Solidum, alia adhuc complebunt plana, rectis κ q, (ipsi A α parallelis, & æqualiter ab invicem dissitis,) insistentia; ipsis A χ p respectivis similia & æqualia. Quippe, dum A α P, motu jam dicto latum, ad κ q pervenit; ejusdem pars A χ p, eidem κ q, insistens, plano solidi sic descripti, eidem κ q insistenti, congruit. Et sic ubique. Adeoque, Omnia A χ p plana, totidem κ q rectis insistentia totum A Q q α solidum complent.

Sumptis autem in A Q ($= 2R$,) rectis A κ ($= c$) arithmetice proportionalibus; quæ his respondent κ q, sunt totidem $\sqrt{:4R^2-c^2:}$ hoc est, totidem χ. Ductisque q χ p (ipsi Q A parallelis,) rectæ in complemento Paraboloidis eisdem κ q, seu A χ, respondentes χ p, sunt totidem $\frac{\chi^3}{4R^2}$; (sunt utique in Paraboloidis cubicalis complemento, Ordinatim-applicatæ, in triplicata ratione diametrorum; puta, χ p recta, ad rectam α P, ut cubus A χ ad cubum A α; & sic ubique.) Adeoque A χ p d rectangulum, (utpote factum ex A $\chi = \kappa$ q $= \chi$, in χ p $= \frac{\chi^3}{4R^2}$) est $\frac{\chi^4}{4R^2}$; hoc est (propter $\chi = \sqrt{:4R^2-c^2:}$) $\frac{16R^4-8c^2R^2+c^4}{4R^2}$. Adeoque A χ p paraboloidis Cubicalis complementum (utpote ad circumscriptum parallelogrammum ut 1 ad 4, per prop. 6. hujus;) est $\frac{\chi^4}{16R^2} =$

$16R^4$

$\frac{16R^4 - 8c^2R^2 + c^4}{16R^2}$. Et ſic ubique. Adeoque omnia Aχp Trilinea, hoc eſt, Omnia $\varkappa$q plana, ſolidum complentia, ſunt Omnia $\frac{16R^4 - 8c^2R^2 + c^4}{16R^4}$ eo ſpectantia; ſive totum AQqα ſolidum ſpectemus, ſive ipſius portionem aliquam ut AVqα. Fig. 177, 184.

Sunt autem (per prop. 1. hujus) ſi totum AQqα ſpectemus, (propter AQ $= 2R$,) *Omn.* $c^2, = \frac{8}{3}R^3$; & *Omn.* $c^4, = \frac{32}{5}R^5$. Adeoque *Omn.* $16R^4 - 8c^2R^2 + c^4 :, = 32R^5 - \frac{64}{3}R^5 + \frac{32}{5}R^5 = \frac{256}{15}R^5$, & *Omn.* $\frac{16R^4 - 8c^2R^2 + c^4}{16R^2} : = \frac{16}{15}R^3$. Hoc eſt, Omnia $\frac{c^3\sqrt{:4R^2 - c^2}}{4R^2}$ ſeu Omnia $\frac{sc^2}{2R}$, rectam Aα fig. 184. vel planum A$\varkappa\upsilon$ fig. 183. ſpectantia. Adeoque (propter Aτ fig. 182. $= 2$Aα fig. 183.) hujus duplum, $\frac{32}{15}R^3$, erit Aggregatum Omnium $\frac{sc^2}{2R}$ ſpectantium planum A$\tau\upsilon$, vel rectam Aτ fig. 182. vel curvam Aτ fig. 177.

Si vero ſolidi portionem AVqα ſpectemus; ut ſit rectarum A$\varkappa = c$, maxima AV $= \gamma$q $= X$; erunt (per eandem prop. 1. hujus) *Omn.* $c^2, = \frac{1}{3}X^3$; & *Omn.* $c^4, = \frac{1}{5}X^5$: Adeoque *Omn.* $16R^4 - 8c^2R^2 + c^4 : = 16XR^4 - \frac{8}{3}X^3R^2 + \frac{1}{5}\chi^5$ & *Omn.* $\frac{16R^4 - 8c^2R^2 + c^4}{16R^2} : = XR^2 - \frac{1}{6}X^3 + \frac{X^5}{80R^2}$.

Hoc autem AVqα ſolidum, ex ſolido AQq$\alpha = \frac{16}{15}R^3$ (modò reperto) ſubductum; relinquit ſolidum VqQ, $= \frac{16}{15}R^3 - XR^2 + \frac{1}{6}X^3 - \frac{X^5}{80R^2}$.

Huic vero VqQ ſolido; ſi addatur ſolidum AVqγ; hoc eſt (propter planum Vq $=$ Aγp $= \frac{C^4}{16R^2}$, & AV $= x$,) $\frac{xC^4}{16R^2}$ (poſito A$\gamma = C$:) Habetur ſolidum AγqQ $= \frac{16}{15}R^3 - xR^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{xC^4}{16R^2} - \frac{x^5}{80R^2}$: Hoc eſt, (propter $x^2 = 4R^2 - C^2$, adeoque $x^4 = 16R^4 - 8C^2R^2 + C^4$;) $\frac{16}{15}R^3 - xR^2 + \frac{2}{3}xR^2 - \frac{1}{6}xC^2 + \frac{xC^4}{16R^2} - \frac{1}{5}xR^2 + \frac{3}{10}xC^2 - \frac{xC^4}{80R^2} = \frac{16}{15}R^3 - \frac{8}{15}xR^2$

Fig. 177, 184. $-\frac{2}{15}XC^2+\frac{XC^4}{20R^2}$: Vel (restituto valore minuscularum, $A\gamma = c$, & $AV = \gamma q = \chi = \surd : 4R^2 - c^2 :$) $\frac{16}{15}R^3 - \frac{8}{15}\chi R^2 - \frac{1}{15}c^2\chi + \frac{c^4\chi}{20R^2}$. Quod itaque est aggregatum Omnium $\frac{c^3\surd : 4R^2 - c^2 :}{4R^2}$ seu Omnium $\frac{sc^2}{2R}$, rectam $A\gamma$ fig. 184. vel planum $A\gamma\upsilon$ fig. 183. spectantium. Adeoque (propter $A\tau$ fig. 182. $= 2\,A\alpha$ fig. 183. & consequenter $Ab = 2\,A\gamma$;) hujus duplum, $\frac{32}{15}R^3 - \frac{16}{15}\chi R^2 - \frac{2}{15}c^2\chi + \frac{c^4\chi}{10R^2}$; aggregatum Omnium $\frac{sc^2}{2R}$, spectantium planum $Ab\upsilon$, vel rectam Ab fig. 182. vel curvam Ab fig. 177. vel (propter $c^2 = 4R^2 - \chi^2$,) $\frac{32}{15}R^3 - \frac{2}{3}\chi^3 + \frac{\chi^5}{10R^2}$.

Fig. 177. Cum itaque sint, quæ totam $A\tau$ spectant, *Omn.* $\frac{ac^2}{2R}$, $= \frac{4}{3}R^2P - \frac{32}{9}R^3$, (ut modò ostensum erat;) & *Omn.* $\frac{sc^2}{2R}$, $= \frac{32}{15}R^3$, (ut jam ostensum est:) Erunt *Omn.* $\frac{a+s}{2R}c^2 := \frac{4}{3}R^2P - \frac{64}{45}R^3$. Quod itaque (per modo demonstrata) est semiquadrantalis Ungulæ superficialis, toti $A\tau$ fig. 177. insistentis, aciem habentis AT, momentum respectu $A\alpha$; Aut etiam (propter Altitudinum & Distantiarum reciprocationem,) aciem habentis $A\alpha$, momentum respectu TA.

Hoc itaque Momentum, per Ungulæ $A\tau$, aciem habentis TA, magnitudinem $\frac{8}{3}R^2$ (§ D, F. ostensam,) divisum; exhibet ejusdem Centri gravitatis ab $A\alpha$ distantiam, $\frac{1}{2}P - \frac{8}{15}R$. (Eademque erit inde distantia centri gravitatis correspondentis superficiei conversione vel semiconversione circa TA factæ; eadem utique quæ superficialis Ungulæ: Momentorum vero ratio, eadem quæ magnitudinum; nempe ad illud Ungulæ, ut P vel $\frac{1}{2}P$ ad R. Et sic alibi; nempe quoties axis libræ est, ad axem conversionis, ad angulos rectos: Ut sæpius insinuatum est:) Adeoque ejusdem à $T\tau$ distantia, est $\frac{8}{15}R$; Ejusque propterea, respectu $T\tau$, momentum, $\frac{64}{45}R^3$.

Quod itidem est Ungulæ $A\tau$, aciem habentis $T\tau$, momentum respectu TA. Hoc itaque per magnitudinem (§ G. traditam) $\frac{16}{3}R^2$, divisum; exhibet hujus, à TA, distantiam centri gravitatis $\frac{4}{15}R$:

Adeoque

Adeoque à $\tau\alpha$, $\frac{26}{15}R$; ipsiusque respectu $\tau\alpha$ momentum, $\frac{416}{45}R^3$. Fig. 177.
Atque hoc itidem est Ungulæ A τ, aciem habentis $\tau\alpha$ momentum, respectu T τ. Quod itaque per hujus magnitudinem $\frac{16}{3}R^2$, divisum; exhibet centri gravitatis à T τ distantiam, item $\frac{26}{15}R$: Adeoque ab A α, $\frac{1}{2}P - \frac{26}{15}R$; ejusque respectu A α momentum $\frac{8}{3}R^2P - \frac{416}{45}R^3$.

Idemque (quod modo dictum est) momentum $\frac{8}{3}R^2P - \frac{64}{45}R^3$, per Ungulæ A τ aciem habentis A α, magnitudinem, $2RP - \frac{16}{3}R^2$, (§ G. ostensum,) divisum; exhibet ejusdem distantiam centri grav. a TA, $\frac{30P - 32R}{45P - 120R}R$: Adeoque à $\tau\alpha$, $\frac{60P - 208R}{45P - 120R}R$. Et propterea ejusdem respectu $\tau\alpha$ Momentum $\frac{8}{3}R^2P - \frac{416}{45}R^3$.

Sed & hoc ipsum (propter Altitudinum & Distantiarum reciprocationem) est etiam Ungulæ A τ, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu A α. Per hujus itaque magnitudinem $\frac{16}{3}R^2$ (§ D, F. inventam) divisum; exhibet hujus distantiam centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{2}P - \frac{26}{15}R$. Ut modo dictum est.

Similiter; Cum quæ portionem A b spectant, sint *Omn.* $\frac{ac^2}{2R}$, $= \frac{ac^3}{3R} - \frac{32}{9}R^3 + \frac{16}{9}\chi R^2 + \frac{2}{9}c^2\chi$; & *Omn.* $\frac{sc^2}{2R} := \frac{32}{15}R^3 - \frac{16}{15}\chi R^2 - \frac{2}{15}c^2\chi + \frac{c^4\chi}{10R^2}$; (ut modo ostensum est:) Erunt *Omn.* $\frac{a+s}{2R}c^2 := \frac{ac^3}{3R} - \frac{64}{45}R^3 + \frac{32}{45}\chi R^2 + \frac{4}{45}c^2\chi + \frac{c^4\chi}{10R^2} = \frac{30ac^3R - 128R^5 + 64\chi R^4 + 8c^2\chi R^2 + 9c^4\chi}{90R^2}$. Quod itaque est Momentum Ungulæ A b, aciem habentis T A, respectu A α; vel etiam (ob altitudinum & distantiarum reciprocationem) aciem habentis A α, Momentum respectu T A.

Hoc itaque Momentum; per Ungulæ A b, aciem habentis T A, magnitudinem $\frac{2}{3}cv$ (§ D, F. inventam) divisum; exhibet ejusdem ab A α distantiam centri gravitatis $\frac{ac^2}{2vR} - \frac{32R^3}{15cv} + \frac{16\chi R^2}{15cv} + \frac{2c\chi}{15v} + \frac{3c^3\chi}{20vR^2}$; vel (propter $2vR = c^2$,) $a - \frac{32R^3}{15cv} + \frac{16\chi R^2}{15cv} + \frac{2c\chi}{15v} + \frac{3c\chi}{10R}$: Hoc est, $\frac{30ac^3R - 128R^5 + 64\chi R^4 + 8c^2\chi R^2 + 9c^4\chi}{60cvR^2 = 30c^3R.}$ I-

Fig. 177. Idemque Momentum, per Ungulæ Ab, aciem habentis $A\alpha$, magnitudinem, $2ac - \frac{16}{3}R^2 + 4\chi R - \frac{2}{3}b\chi = 2ac - \frac{16}{3}R^2 + \frac{8}{3}\chi R + \frac{2}{3}v\chi$ (§ G. inventam) divisum; exhibet hujus distantiam centri gravitatis à TA,

$$\frac{30ac^3R - 128R^5 + 64\chi R^4 + 8c^2\chi R^2 + 9c^4\chi}{180acR^2 - 480R^4 + 240\chi R^3 + (60v\chi R^2 =)\,30c^2\chi R.}$$

Adeoque à $\tau\alpha$, $$\frac{360acR^3 - 30ac^3R - 832R^5 + 416\chi R^4 + 52c^2\chi R^2 - 9c^4\chi}{180acR^2 - 480R^4 + 240\chi R^3 + 30c^2\chi R.}$$

Et à bV (subducendo ex $AV = v$ ejusdem à TA distantiam,)

$$\frac{180acvR^2 - 480vR^4 + 240v\chi R^3 + 30c^2v\chi R - 30ac^3R + 128R^5 - 64\chi R^4 - 8c^2\chi R^2 - 9c^4\chi}{180acR^2 - 480R^4 + 240\chi R^3 + 30c^2\chi R,}$$

vel (propter $2vR = c^2$,)

$$\frac{60ac^3R - 240c^2R^3 + 112c^2\chi R^2 + 6c^4\chi - 64\chi R^4 + 128R^5}{180acR^2 - 480R^4 + 240\chi R^3 + 30c^2\chi R.}$$

Et consequenter, ejusdem momentum respectu $\tau\alpha$, (magnitudine in distantiam ducta) erit

$$\frac{360acR^3 - 30ac^3R - 832R^5 + 416\chi R^4 + 52c^2\chi R^2 - 9c^4\chi}{90R^2.}$$

Quod etiam (propter altitudinum & distantiarum reciprocationem) est momentum Ungulæ Ab aciem habentis $\tau\alpha$, respectu $A\alpha$: Adeoque (momentum illud per hujus magnitudinem dividendo; hoc est, per $4cR - \frac{2}{3}cv$, ut § D, F. ostenditur,) hujus distantia centri gravitatis ab $A\alpha$, est

$$\frac{360acR^3 - 30ac^3R - 832R^5 + 416\chi R^4 + 52c^2\chi R^2 - 9c^4\chi}{360cR^3 - (60cvR^2 =)\,30c^3R.}$$

Similiter, ejusdem Ungulæ Ab aciem habentis $A\alpha$, momentum respectu bV, (magnitudine in distantiam ducta) erit

$$\frac{60ac^3R - 240c^2R^3 + 112c^2\chi R^2 + 6c^4\chi - 64\chi R^4 + 128R^5}{90R^2.}$$

Quod itaque (propter altitudinum & distantiarum reciprocationem) est etiam Momentum Ungulæ Ab aciem habentis bV, respectu $A\alpha$.

A α. Adeoque (per magnitudinem $\frac{4}{3}cv$, § D, F. inventam, dividendo ;) erit hujus distantia centri gravitatis ab A α,

$$\frac{60ac^3R - 240c^2R^3 + 112c^2\chi R^2 + 6c^4\chi - 64\chi R^4 + 128R^5}{120cvR^2 = 60c^3R}.$$

Superest tandem, ut superficialis Ungulæ A τ vel A b, aciem habentis A α, momentum respectu A α investigemus. I. Fig. 177, 182, 183, 170.

Divisâ itaque, ut prius, A τ in minutas partes æquales: Adeoque sumptis A b $= 2c$ fig. 177, 182. arithmetice proportionalibus: Erit cujusque b puncti, seu partis minutæ, ab A α distantia, b B V fig. 177. hoc est B b υ fig. 182. Adeoque omnes rectæ punctis b insistentes, Ungulam complentes, sunt totidem B b υ rectæ, trilineum A $\alpha\tau\upsilon$ fig. 182. complentes ; hoc est, bis Omnes $o\gamma\upsilon$ fig. 183. hoc est, totidem $a+s$, subtensis c arithmetice proportionalibus respondentes. Quæ itidem in $a+s$ distantiam ductæ, exhibent earum respectu A α momenta, totidem $a^2+2as+s^2$.

Sunt autem, Omnia a^2 ; seu omnia quadrata γo fig. 183. *Duplum* Semiquadrantalis Ungulæ, seu momenti trilinei A $\varkappa\alpha$, seu A $o\gamma$, (prout vel totum vel pars consideratur ;) respectu A α fig. 183. Hoc est (propter figuras similes A $\varkappa\alpha$ fig. 183. & $\alpha\varkappa\Gamma$ fig. 170.) *Sexdecuplum* momenti trilinei $\alpha\varkappa\Gamma$ vel $\alpha o\gamma$, fig. 170. respectu rectæ $\alpha\Gamma$, (nempe in triplicata ratione laterum Homologorum, A$\alpha = 2$R, ad $\alpha\Gamma =$ R.)

Est autem, Momentum Trilinei $\alpha o\gamma$, fig. 170. hoc est, $\alpha\xi o\gamma - \xi o\alpha$, (respectu $\alpha\Gamma$,) $\frac{1}{2}a^2s$, minus, $-cR^2+avR$; (per § O. prop. 19.) seu $\frac{1}{2}a^2s+cR^2-avR$, hoc est $\frac{1}{2}a^2s+aR^2-sR^2-avR$, (posito $a = \alpha\xi$ fig. 170. pro arcu AN fig. 179. semisse arcus A B ; adeoque $s =$ AM, & $v =$ MN $=$ CN $- \frac{1}{2}\alpha$B $=$ R $- \frac{1}{2}\chi$:) Adeoque Momentum trilinei A $o\gamma$ fig. 183. (utpote istius Octuplum,) $4a^2s+8aR^2-8sR^2-8avR$, (sumptis a, s, v, eodem sensu :) Hoc est, (posito $a =$ A B, $= 2$ A N ; & $c = 2s$; & R $- \frac{1}{2}\chi = v$;) $\frac{1}{2}a^2c+4aR^2-4cR^2-4aR^2+2a\chi R = \frac{1}{2}a^2c-4cR^2+2a\chi R$: Adeoque Omnia a^2 eo spectantia (utpote momenti duplum) $a^2c-8cR^2+4a\chi R$; hoc est Omnia quadrata γo fig. 183. Adeoque (propter A τ fig. 182. $= 2$ Aα fig. 183.) Omnia quadrata B b fig. 182. seu *Omnia* a^2, (eo spectantia) $= 2a^2c - 16cR^2 + 8a\chi R$. Et propterea, si totam A τ spectemus ; (propter $a = \frac{1}{2}P$, $c = 2$ R, & $\chi = 0$,) erit $RP^2 - 32R^3 = Omn.\ a^2$.

Item,

Fig. 177, 182, 183, 170.

Item, omnia s^2, hoc est, omnia quadrata bυ fig. 182. seu, bis Omnia quadrata $\gamma\upsilon$ fig. 183. Idem sunt (propter $\gamma\upsilon = $ b$\upsilon = \frac{c\sqrt{:4R^2 - c^2:}}{2R}$) atque totidem $\frac{4c^2R^2 - c^4}{4R^2}$. Sunt autem (sumptis c arithmetice proportionalibus, usque ad maximam $C = AB$,) *Omn.* $c^2 := \frac{1}{3}C^3$; & *Omn.* $c^4 := \frac{1}{5}C^5$ (per prop. 1. hujus.) Ergo *Omn.* $\frac{4c^2R^2 - c^4}{4R^2} :=$ *Omn.* $c^2 - \frac{c^4}{4R^2} := \frac{1}{3}C^3 - \frac{C^5}{20R^2}$: Nempe Omnia quadrata $\gamma\upsilon$, seu Omn. s^2: fig. 183. Ergo (propter $A\tau = 2A\alpha$,) Omnia quadrata bυ fig. 182. *Omn.* $s^2 = \frac{2}{3}C^3 - \frac{C^5}{10R^2}$. Et propterea, si totam Aτ spectemus, (propter $C = 2R$,) *Omn.* $s^2 := \frac{16}{3}R^3 - \frac{16}{5}R^3 = \frac{32}{15}R^3$.

Item, (propter $s = \frac{c\sqrt{:4R^2 - c^2}}{2R}$,) Omnia as, sunt totidem $\frac{ac\sqrt{:4R^2 - c^2:}}{2R}$: Adeoque (propter $o\gamma = a$, & $q\gamma = \sqrt{:4R^2 - c^2:}$ & $A\gamma = c$:) *Omnia* as; hoc est, Omnia Rectangula $o\gamma\upsilon$ fig. 183. sunt Momentum, respectu Aδ, omnium $q\gamma o$ rectangulorum, (solidive ex his conflati,) per $2R$ divisum. Hoc est (propter figuras similes A$\varkappa\alpha$ fig. 183. & $\alpha\varkappa\Gamma$ seu d$\tau\delta$, fig. 170. item AQqα fig. 183. & CDEα fig. 169. rationemque laterum homologorum Aα ad $\alpha\Gamma$, ut 2 ad 1;) *Sexdecuplum* Momenti (per $2R$ divisi) solidi $\alpha o\gamma$ vel deg fig. 170. altitudines habentis respectivis EΣ fig. 169. æquales, respectu rectarum $\alpha\delta$ vel dc.

Est autem portio solidi hujusmodi b$\tau\beta$, seu e$\tau\varepsilon$, $= \frac{1}{4}\alpha^2R - \frac{1}{4}s^2R$, per § K. prop. 18. (posito $\tau\varepsilon = \alpha$;) Hoc est (posito eg seu $\varepsilon\delta = \xi$, adeoque $\alpha = \frac{1}{4}P - \xi$;) $\frac{1}{64}P^2R - \frac{1}{8}\xi PR + \frac{1}{4}\xi^2R - \frac{1}{4}s^2R$: Adeoque d$\tau\delta$ (propter $\xi = 0$, & $s = R$,) $= \frac{1}{64}P^2R - \frac{1}{4}R^3$. Et propterea de$\varepsilon\delta$ (d$\tau\delta$ — e$\tau\varepsilon$) $= \frac{1}{8}\xi PR - \frac{1}{4}\xi^2R + \frac{1}{4}s^2R - \frac{1}{4}R^3$. Unde si subducatur portio e$\varepsilon\delta$g; hoc est, factum ex eg $= \xi$, in E$\Sigma\alpha$ (fig. 169.) hoc est, (per § F. prop. 15.) in $\frac{1}{2}\alpha R - \frac{1}{2}sR + \frac{1}{2}sh$ (posito $\alpha = \tau\varepsilon = \alpha E$, & $h = \alpha\Sigma = e\varepsilon$;) hoc est (posito $\alpha = \frac{1}{4}P - \xi$, & $h = R - x$;) in $\frac{1}{8}PR - \frac{1}{2}\xi R - \frac{1}{2}sR + \frac{1}{2}sR - \frac{1}{2}sx$; hoc est, in $\frac{1}{8}PR - \frac{1}{2}\xi R - \frac{1}{2}sx$; Nempe, $\frac{1}{8}\xi PR - \frac{1}{2}\xi^2R - \frac{1}{2}\xi sx$: Relinquitur portio deg $= \frac{1}{4}\xi^2R + \frac{1}{2}\xi sx + \frac{1}{4}s^2R - \frac{1}{4}R^3$.

Et portionis solidi b$\tau\beta$ seu e$\tau\varepsilon$, respectu $\tau\alpha$, momentum est,

$\frac{1}{4}\alpha^2R^2$

$\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{5}{36}s^2R^2 - \frac{2}{9}bR^3 - \frac{1}{9}s^2bR$, per § Q. prop. 18. (poſito Fig. 177,
$\tau\epsilon = \alpha$, & $\alpha\Sigma = b$;) Hoc eſt, (poſitis $\alpha = \frac{1}{4}P - \xi$, & $b = R$ 182,
$- x$,) $\frac{1}{64}P^2R^2 - \frac{1}{8}\xi PR^2 + \frac{1}{4}\xi^2R^2 - \frac{5}{36}s^2R^2 - \frac{2}{9}R^4 + \frac{2}{9}xR^3 - \frac{1}{9}s^2R^2$ 183,
$+ \frac{1}{9}s^2xR$; ſeu $\frac{1}{64}P^2R^2 - \frac{1}{8}\xi PR^2 + \frac{1}{4}\xi^2R^2 - \frac{1}{4}s^2R^2 - \frac{2}{9}R^4 + \frac{2}{9}xR^3$ 170.
$+ \frac{1}{9}s^2xR$. Adeoque Momentum ſolidi $d\tau\delta$ (propter $\xi = 0$, & $x = 0$, & $s = R$,) $\frac{1}{64}P^2R^2 - \frac{1}{4}R^4 - \frac{2}{9}R^4$, ſeu $\frac{1}{64}R^2l^2 - \frac{17}{36}R^4$. Et propterea, Momentum portionis $de\epsilon\delta$ (reſpectu ejuſdem $\tau\alpha$) eſt $\frac{1}{8}\xi PR^2 - \frac{1}{4}\xi^2R^2 - \frac{1}{4}R^4 + \frac{1}{4}s^2R^2 - \frac{2}{9}xR^3 - \frac{1}{9}s^2xR$. Unde ſi auferatur momentum portionis $e\epsilon\delta g$; hoc eſt, factum ex $eg = \xi$, in momentum ſegmenti ſemicirculi $E\Sigma\alpha$ (fig. 169.) reſpectu ipſius $\tau\alpha$; hoc eſt (per § L. prop. 15.) in $\frac{1}{2}\alpha R^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{2}sbR - \frac{1}{3}s^3$ (poſito $\tau\epsilon = \alpha$, & $\alpha\Sigma = b$;) hoc eſt, (poſito $\alpha = \frac{1}{4}P - \xi$, & $b = R - x$,) in $\frac{1}{8}PR^2 - \frac{1}{2}\xi R^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{2}sxR - \frac{1}{3}s^3$, ſeu, in $\frac{1}{8}PR^2 - \frac{1}{2}\xi R^2 - \frac{1}{2}sxR - \frac{1}{3}s^3$; Nempe $\frac{1}{8}\xi R^2P - \frac{1}{2}\xi^2R^2 - \frac{1}{2}\xi sxR - \frac{1}{3}\xi s^3$: Relinquitur portionis deg, Momentum (reſpectu ejuſdem $\tau\alpha$) $\frac{1}{4}\xi^2R^2 - \frac{1}{4}R^4 + \frac{1}{4}s^2R^2 - \frac{2}{9}xR^3 - \frac{1}{9}s^2xR + \frac{1}{2}\xi sxR + \frac{1}{3}\xi s^3$.

Hoc itaque, per magnitudinem, (modo inventam,) diviſum; Fig. 170.
exhibet ipſius deg (portionis ſolidi) diſtantiam centri gravitatis à $\tau\alpha$,

$$\frac{9\xi^2R^2 - 9R^4 + 9s^2R^2 - 8xR^3 - 4s^2xR + 18\xi sxR + 12\xi s^3}{9\xi^2R + 18\xi sx + 9s^2R - 9R^3}$$

$$= R - \frac{8xR^3 + 4s^2xR - 12\xi s^3}{9\xi^2R + 18\xi sx + 9s^2R - 9R^3}:$$ Adeoque à cd,

$$\frac{8xR^3 + 4s^2xR - 12\xi s^3}{9\xi^2R + 18\xi sx + 9s^2R - 9R^3}.$$ Quod in magnitudinem ductum, exhibet ſolidi deg momentum reſpectu cd, $\frac{2}{9}xR^3 + \frac{1}{9}s^2xR - \frac{1}{3}\xi s^3$ (poſitis, $\xi = DE$ fig. 169. $= eg = o\gamma = \alpha\xi$ fig. 170. & $x = C\Sigma = \xi o = \alpha\gamma$; & $s = E\Sigma$;) Vel (ſubſtituto σ pro s, qui ſit ſinus arcus $B\alpha$ fig. 169. $= \beta\delta$ fig. 170.) momentum ſimilis ſolidi $\alpha o\gamma$ reſpectu $\alpha\delta$, $\frac{2}{9}xR^3 + \frac{1}{9}\sigma^2xR - \frac{1}{3}\xi\sigma^3$.

Et conſequenter; ſimilis ſolidi $A\alpha\gamma$ fig. 183. (ex ductu recta- Fig. 182.
rum $o\gamma$ in γq reſpective) momentum reſpectu $A\delta$, (utpote prio- 183.
ris ſexdecuplum, propter tum ſingulas dimenſiones, tum diſtantiam, ut 2 ad 1,) $\frac{32}{9}xR^3 + \frac{16}{9}\sigma^2xR - \frac{16}{3}\xi\sigma^3$: Hoc eſt (poſito $a = 2\xi$, propter arcum ſemicirculi duplum reſpectivi arcus in quadrante; & $c = 2x$, propter chordam arcus a, duplam ſinûs recti dimidii arcus; & $\chi = 2\sigma$, propter ſubtenſam complementi arcus a ad ſemicirculum, duplum ſinus complementi dimidii arcus ad quadrantem;) $\frac{16}{9}cR^3 + \frac{2}{9}\chi^2cR - \frac{1}{3}a\chi^3$: Hoc itaque per 2 R diviſum;

hoc

Fig. 177, 182, 183. hoc est, $\frac{8}{9}cR^2 + \frac{1}{9}c\chi^2 - \frac{a\chi^3}{6R}$; exhibet (ut jam ostensum est) aggregatum omnium as, seu rectangulorum $o\gamma v$ fig. 183. adeoque (propter $A\tau = 2A\alpha$) hujus duplum, est aggregatum omnium as, seu rectangulorum B b v fig. 182. Et propterea hujus duplum, seu illius quadruplum, $\frac{32}{9}cR^2 + \frac{4}{9}c\chi^2 - \frac{2a\chi^3}{3R} =$ *Omn.* $2as$: fig. 182. Adeoque, si totam $A\tau$ spectemus (propter $c = 2R$, & $\chi = 0$) erunt (quæ eo spectant) *Omn.* $2as := \frac{64}{9}R^3$.

Fig. 177. Ergo (propter *Omn.* $a^2 := 2a^2c - 16cR^2 + 8a\chi R$; & *Omn.* $s^2 := \frac{2}{3}c^3 - \frac{c^5}{10R^2}$; & *Omn.* $2as := \frac{32}{9}cR^2 + \frac{4}{9}c\chi^2 - \frac{2a\chi^3}{3R}$; ut jam ostensum est:) *Omn.* $a^2 + 2as + s^2 := 2a^2c + \frac{2}{3}c^3 - \frac{112}{9}cR^2 + \frac{4}{9}c\chi^2 + 8a\chi R - \frac{2a\chi^3}{3R} - \frac{c^5}{10R^2}$. Quod itaque est Momentum Ungulæ A b fig. 177. aciem habentis $A\alpha$, respectu $A\alpha$: Hujusque Duplum (ut sæpius dictum) Superficiei semiconversione factæ momentum respectu axis conversionis $A\alpha$. Adeoque, si totam $A\tau$ spectemus, (propter $a = \frac{1}{2}P$, & $c = 2R$, & $\chi = 0$,) erunt *Omn.* $a^2 + s^2 + 2as := P^2R + \frac{16}{3}R^3 - \frac{224}{9}R^3 - \frac{16}{5}R^3 = P^2R - \frac{1024}{45}R^3$. Quod itaque est Ungulæ $A\tau$, aciem habentis $A\alpha$, momentum respectu $A\alpha$: Hujusque Duplum, est correspondentis superficiei semiconversione circa $A\alpha$ descriptæ momentum respectu ejusdem $A\alpha$.

Momento itaque per magnitudinem (§ G. inventam,) diviso; habetur Ungulæ A b, aciem habentis $A\alpha$, distantia centri gravitatis ab ipsa $A\alpha$,

$$\frac{180a^2cR^2 + 60c^3R^2 - 1120cR^4 + 40c\chi^2R^2 + 720a\chi R^3 - 60a\chi^3R - 9c^5}{180acR^2 - 48cR^4 + 240\chi R^3 + (60v\chi R^2 =)\ 30c^2\chi R};$$

& superficiei semiconversione circa $A\alpha$ factæ, distantia centri gravitatis à conversionis axe $A\alpha$, erit ad illam Ungulæ, ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$, seu $4R$ ad P; ut alibi: Nempe quoties idem est Axis Conversionis & Axis Libræ.

Totiusque $A\tau$ Ungulæ, aciem eandem $A\alpha$ habentis, distantia ab $A\alpha$, similiter habebitur, $\frac{45P^2 - 1024R^2}{90P - 240R}$; (& superficiei semiconversione factæ, ad hanc Ungulæ, ut $4R$ ad P;) Ungulæque propterea distantia centri gravitatis à $T\tau$, $\frac{1}{2}P -$

45 P^2

$\frac{45P^2 - 1024R^2}{90P - 240R} = \frac{1024R^2 - 120RP}{90P - 240R} = \frac{512R - 60P}{45P - 120R}R$ Et pro- Fig. 177.
pterea, ejusdem respectu T τ momentum $\frac{1024R^3 - 120R^2P}{45} = \frac{1024}{45}R^3 - \frac{8}{3}R^2P$. Quod itidem est (propter altitudinum & distantiarum reciprocationem) Momentum Ungulæ A τ, aciem habentis T τ, respectu A α. Adeoque, per hujus magnitudinem $\frac{16}{3}R^2$ (per § G.) divisum; exhibet hujus, ab A α, distantiam centri gravitatis, $\frac{64}{15}R - \frac{1}{2}P$: &, ab acie sua T τ, $P - \frac{64}{15}R$: & propterea momentum respectu aciei suæ T τ, $\frac{16}{3}R^2P - \frac{1024}{45}R^3$.

His ita peractis; ea quæ jam exhibuimus (§ G, H, I.) divisâ K.
A τ curvâ in partes æquales; adeoque sumptis subtensis A B $= c$, Fig. 177.
arithmetice proportionalibus; non erit inutile, aliquatenus prosequi secundum alteram methodum (qua § B, C, D, E, usi sumus,) divisâ A α in partes æquales; adeoque sumptis sinibus versis A V $= v$ arithmetice proportionalibus.

Si itaque intelligatur recta A α fig. 177. in exiguas partes æquales numero infinitas dividi; quarum una intelligatur V O $= B$: Quæ his respondent b g tangentes, seu (quod in partibus infinite exiguis pro eodem reputabitur) b x curvæ, sunt ut totidem V $\omega = B\sqrt{\frac{2R}{v}}$, seu $\frac{B\sqrt{2R}}{\sqrt{v}}$, (per § B, C.) Harumque ab A α distantiæ, sunt bV $= a + s$, (sinibus versis arithmetice proportionalibus respondentes,) ipsam A $\tau\alpha$ semicycloidem complentes, (vel etiam, tum figuram Arcuum A $\tau\alpha$ fig. 170, 185. tum semicirculum A B α fig. 169, 185. complentes; quippe illam complent *omnes a*; semicirculum, *omnes s*.) Adeoque particularum curvæ A τ fig. 177. momenta respectu A α; sunt ut totidem rectangula b V ω fig. 177. hoc est totidem $\frac{a+s}{\sqrt{v}}$ $B\sqrt{2R}$; seu totidem bVω + BVω fig. 185. hoc est, totidem $\frac{aB\sqrt{2R}}{\sqrt{v}} + \frac{sB\sqrt{2R}}{\sqrt{v}}$; vel (omissa B, quæ nonnisi infinitesimam partem ipsius A α significat, seu rectarum crassitiem planum complentium,) totidem $\frac{a}{\sqrt{v}}\sqrt{2R} + \frac{s}{\sqrt{v}}\sqrt{2R}$.

Fig. 177. Et quidem, Aggregatum *omnium* $\frac{s}{\sqrt{v}}\sqrt{2R}$ facile habetur: Cum enim ſit $s^2 = vh$, adeoque $s = \sqrt{vh}$, erit $\frac{s}{\sqrt{v}} = \sqrt{h}$; & *Omnes* $\frac{s}{\sqrt{v}}\sqrt{2R}$, idem atque *Omnes* $\sqrt{2hR}$, hoc eſt ipſæ π V, fig. 179. Adeoque *Omn.* $s\sqrt{\frac{2R}{v}}$ curvam A b fig. 177. ſpectantes æquantur ipſi portioni parabolæ A Π π V fig. 179. hoc eſt, $\frac{8}{3}R^2 - \frac{2}{3}h\sqrt{2hR}$, per prop. 6. hujus. Quod (propter $2hR = \chi^2$, & $h = \frac{\chi^2}{2R}$,) tantundem eſt atque $\frac{8}{3}R^2 - \frac{\chi^3}{3R}$, in § G. repertum; ſeu *Omnes s*, (vel *Omn.* $\frac{c\sqrt{:4R^2 - c^2}}{2R}$,) ſumptis A b $= 2c$ arithmetice proportionalibus. Nempe Π A V π fig. 179. $=$ A b v fig. 182. (ſimiliter diviſis A τ, A τ, fig. 177, 182. in punctis b;) Hoc eſt, *Omn. s*, ſumptis A b $= 2c$ arithmetice proportionalibus; idem atque *Omn.* $s\sqrt{\frac{2R}{v}}$, ſumptis A V $= v$ arithmetice proportionalibus. Utrumvis enim eſt ipſius A b momentum, quantum ad diſtantias B V.

At, *Omnia* $\frac{a}{\sqrt{v}}\sqrt{2R}$, ſeu *Omn.* $a\sqrt{\frac{2R}{v}}$, ſumptis v arithmetice proportionalibus; puta ſolidum A b V ω fig. 185. (ex rectangulis b V ω conflatum) per B, hoc eſt α O, vel V O, diviſum; tantundem eſt atque planum A b B fig. 182. ſeu *Omn. a*, ſumptis A b $= 2c$ arithmetice proportionalibus: (Utrumvis utique eſt momentum A b fig. 177. quantum ad diſtantias b B.) Adeoque cum horum aggregatum deprehenſum eſt (§ G.) $= 2ac - 8R^2 + 4\chi R$; tantundem erit & Aggregatum *Omn.* $a\sqrt{\frac{2R}{v}}$, ſumptis A b $= v$, arithmetice proportionalibus. Quod quum ibidem deprehenſum ſit, non opus erit ut hic ſolicite inveſtigemus. Atque hinc reliqua deducentur, ut ad § G.

Sed & idem ſolidum A b V ω fig. 185. (quod complent omnia b V ω rectangula, ſeu Omnia $aB\sqrt{\frac{2R}{v}}$, ſumptis v arithmetice pro-

portionalibus;

portionalibus;) complent etiam alia plana rectis x r (æqualiter ab invicem distantibus) trilineum A b V complentibus insistentia, hoc est, totidem rectis, q r — q x. Sunt autem quæ singulis b K, seu q r insistunt plana solidum complentia, respectivis A V $\omega\omega$ æqualia; (ut ex constructione figuræ patet, si intelligatur A α O ω planum, super plano A $\tau\alpha$ ad angulos rectos erectum, motu suo versus τ, solidum describere.) Adeoque omnia q r plana; tantundem sunt atque, b V $= a$, in planum A V $\omega\omega$; hoc est, in duplum rectanguli A V ω; hoc est (per § B, C.) in $2v \times B\sqrt{\frac{2R}{v}} = 2B\sqrt{2vR}$; hoc est $2AV \times B\sqrt{\frac{2R}{V}}$ (posito AK $= A$, & AV $= V$;) seu $2A \times B\sqrt{2VR}$; seu bVp rectangulum, in altitudinem $2B$ ductum; vel Duplum rectanguli b V p, in B ductum. Et, eadem ratione, Omnia x q plana; sunt totidem A o ω planis æqualia; hoc est, totidem $2v \times B\sqrt{\frac{2R}{v}}$, seu $2B\sqrt{2vR}$, (sumptis a arithmetice proportionalibus,) usque ad maximum $V =$ b K. Adeoque $2AB\sqrt{2VR}$, demptis *Omn.* $2B\sqrt{2vR}$, sumptis a arithmetice proportionalibus; idem est atque *Omn.* $aB\sqrt{\frac{2R}{v}}$; sumptis v arithmetice proportionalibus. (Nempe idem solidum A b V:) Et (dividendo per B,) $2A\sqrt{2VR}$ — *Omn.* $2\sqrt{2vR}$: sumptis a arithmetice proportionalibus; idem atque *Omn.* $a\sqrt{\frac{2R}{v}}$, sumptis v arithmetice proportionalibus; seu *Omn.* a, sumptis A b $= 2c$ arithmetice proportionalibus; hoc est, Trilineum A b B fig. 182. Fig. 177, 185.

Potestque idem (si opus est) solidum considerari tanquam ex planis ipsi A b V parallelis conflatum. Et sic alibi.

Similiter; Divisâ, ut prius, A α in minutas partes æquales; cum quæ his respondent particularum b x momenta respectu A α, fig. 177. seu Ungulæ (aciem habentis A α) particulæ, sint (ut dictum est) ut totidem $\frac{a + s}{\sqrt{v}}\sqrt{2R}$, seu $a\sqrt{\frac{2R}{v}} + s\sqrt{\frac{2R}{v}}$; sintque ipsarum à T A distantiæ, A V $= v$ respectivæ; erit omnium respectu T A momentum, totidem $a\sqrt{2vR} + s\sqrt{2vR}$; sumptis v arithmetice proportionalibus. L.

Et quidem aggregatum *Omn.* $s\sqrt{2vR}$, (hoc est, omnium rectangulorum

gulorum BVp fig. 185.) facile habetur. Cum enim sint *Omn.* $s\sqrt{\frac{2R}{v}}$, Fig. 179. idem atque totidem πV fig. 179. erunt *Omn.* $s\sqrt{2vR}$, hoc est *Omn.* $vs\sqrt{\frac{2R}{v}}$; vel etiam (propter $s=\sqrt{vh}$,) *Omn.* $v\sqrt{2hR}$; idem atque earundem πV momenta respectu ΠA rectæ. Est autem (per prop. [illegible] hujus, (semiparabolæ $\alpha\Pi$A distantia centri gravitatis ab $\alpha\tau$, $\frac{3}{5}\alpha$A $=\frac{6}{5}R$; adeoque ab AT, $\frac{4}{5}R$; & (propter magnitudinem $\frac{8}{3}R^2$) momentum ejus respectu AT, $\frac{32}{15}R^3$. Et semiparabolæ $\alpha\pi$V, distantia centri gravitatis ab $\alpha\tau$, $\frac{3}{5}\alpha$V $=\frac{3}{5}h$; adeoque ab AT, $2R-\frac{3}{5}h$; & (propter magnitudinem $\frac{2}{3}h\sqrt{2hR}$,) momentum respectu AT, $\frac{4}{3}hR\sqrt{2hR}-\frac{2}{5}h^2\sqrt{2hR}$. Ergo (subductione factâ) Momentum portionis ΠAVπ respectu TA, est $\frac{32}{15}R^3-\frac{4}{3}hR\sqrt{2hR}+\frac{2}{5}h^2\sqrt{2hR}$. Hoc est (propter $2hR=\chi^2$, & $\sqrt{2hR}=\chi$, & $h=\frac{\chi^2}{2R}$,) $\frac{32}{15}R^3-\frac{2}{3}\chi^3+\frac{\chi^5}{10R^2}$. Tantundem scilicet atque *Omn.* $\frac{sc^2}{2R}$, sumptis Ab $=2c$ arithmetice proportionalibus; ut § H. ostensum est.

Fig. 177, 185. Suntque *Omn.* $a\sqrt{2vR}$, sumptis v arithmetice proportionalibus; (hoc est, omnia rectangula bVp fig. 185.) idem atque *Omn.* $\frac{ac^2}{2R}$, sumptis Ab $=2c$ arithmetice proportionalibus. (Utrumvis utique est Ungulæ Ab fig. 177. quantum ad altitudines bB, momentum respectu TA; ungulæve Ab aciem habentis TA momentum quantum ad distantias bB.) Quod § H. deprehendimus $\frac{ac^3}{3R}-\frac{32}{9}R^3+\frac{16}{9}\chi R^2+\frac{2}{9}c^2\chi$. Atque hinc reliqua deducentur ut ad § H.

Sed & idem solidum AbVp fig 185. (quod complent omnia bVp rectangula, seu omnia $a\sqrt{2vR}$, sumptis v arithmetice proportionalibus;) complent etiam alia plana rectis xr insistentia; hoc est (ut ex constructione patebit, si intelligatur AαP semiparabola, ad angulos rectos erecta, & super A$\alpha\tau$ plano mota, solidum describere,) totidem semiparabolæ AVp, demptis omnibus Aop, quarum altitudines Ao $=$ qx sint sinus versi arcuum arithmetice proportionalium: Hoc est (posito AK $=$ bV $=A$, & AV$=V$,) $\frac{2}{3}A\sqrt{2V^3R}$ demptis *omnibus* $\frac{2}{3}\sqrt{2v^3R}$, sumptis a arithmetice proportionalibus. Quod itaque tantundem etiam valet atque *Omn.* $\frac{ac^2}{2R}$, sumptis Ab $=2c$ arithmetice proportionalibus.

Po-

Poteſtque idem ſolidum (ſi opus eſt) conſiderari tanquam ex planis ipſi A b V parallelis conflatum: Ut ante monitum eſt.

Similiter; cum, diviſâ ut prius A α in minutas partes æquales, ſint, quæ his reſpondent, curvæ A τ particulæ b x, ut totidem $B\sqrt{\frac{2R}{v}}$, ut oſtenſum eſt; erit Ungulæ aciem habentis A α momentum reſpectu A α, ut Omnia, $B\sqrt{\frac{2R}{v}}$, in reſpectiva quadrata b V, hoc eſt, in reſpectiva $a^2 + 2as + s^2$, ſumptis v arithmetice proportionalibus. Hoc eſt (omiſſo B, ut prius,) $Omn.\, a^2\sqrt{\frac{2R}{v}} + 2as\sqrt{\frac{2R}{v}} + s^2\sqrt{\frac{2R}{v}}$; ſumptis v arithmetice proportionalibus. M. Fig. 177, 185.

Et quidem Aggregatum *Omnium* $s^2\sqrt{\frac{2R}{v}}$, hoc eſt (propter $s^2 = vh$,) $Omn.\, s\sqrt{2hR}$; vel $Omn.\, vh\sqrt{\frac{2R}{v}}$, ſeu $Omn.\, h\sqrt{2vR}$; facile habetur. Eſt utique Semiparabolæ A p V fig. 178. Momentum reſpectu P α ſeu $\tau\alpha$. Hoc eſt (propter diſtantiam centri gravitatis a T A, $\frac{3}{5}$ A V $= \frac{3}{5}v$; adeoque a $\tau\alpha$, $2R - \frac{3}{5}v$; & magnitudinem $\frac{2}{3}v\sqrt{2vR}$; per prop. 6. hujus;) $\frac{4}{3}vR\sqrt{2vR} - \frac{2}{5}v^2\sqrt{2vR}$. Hoc eſt (propter $2vR = c^2$, & $\sqrt{2vR} = c$, & $v = \frac{c^2}{2R}$,) $\frac{2}{3}c^3 - \frac{c^5}{10R^2}$. Tantundem ſcilicet atque Omn. s^2, ſumptis A b $= 2c$ arithmetice proportionalibus; quod § I. repertum eſt.

Suntque $Omn.\, as\sqrt{\frac{2R}{v}}$; hoc eſt (propter $s = \sqrt{vh}$;) $Omn.\, a\sqrt{2hR}$, idem atque ſolidum ex ductu rectarum b V fig. 185. (figuram Arcuum complentium) in reſpectivas π V fig. 179, 185. Adeoque $Omn.\, 2as\sqrt{\frac{2R}{v}}$; eſt iſtiuſmodi ſolidi Duplum. Eſtque tantundem atque $Omn.\, 2as$, ſumptis A b $= 2c$ arithmetice proportionalibus. Quod § I. repertum eſt.

Poteſtque idem (ſi opus eſt) ſolidum conſiderari tanquam ex planis quæ rectis x r inſiſtant conflatum: Aut etiam ex planis ipſi A b V parallelis; ut in præcedentibus monitum eſt, atque alibi etiam intelligendum erit.

Et

Fig. 177, 185. Et $Omn. a^2 \sqrt{\frac{2R}{v}}$, (sumptis v arithmetice proportionalibus;) tantundem est atque $Omn. a^2$, sumptis A b $= 2c$ arithmetice proportionalibus; quod § I. itidem repertum est. (Est autem, idem atque solidum ex ductu quadratorum rectarum b V fig. 185. in respectivas V ω, per V O divisas.) Atque hinc reliqua habentur quæ § I. traduntur.

Quodque, de eodem solido aliis adhuc planis (puta quæ rectis x r insistant, vel ipsi A b V sint parallela,) conflando, in præcedentibus monitum est; etiam hic locum habet.

N. Exhibuimus itaque non modo rectas Cycloidem (Primariam intellige) tangentes; sed & ipsius Curvæ Semicycloidis, ejusque partium longitudinem, (exhibendo scilicet curvis illis æquales rectas,) ejusque in data ratione divisionem: Sed & curvæ semicycloidis, partiumque ipsius, centra gravitatis, (per horum scilicet à duabus saltem in eodem plano rectis, non invicem parallelis, distantiam;) earúmque momenta respectu expositarum aliquot rectarum, (quæ ad alias item rectas facile transferentur:) Ungularum item superficialium, & Superficierum conversione factarum, momentis illis respondentium, tum magnitudines, tum momenta, ipsaque Centra gravitatis; exhibitis scilicet horum distantiis à duobus saltem planis, plano Cycloidis ad angulos rectos, non invicem parallelis; dummodo etiam in quo tertio per Ungulæ aciem, seu axem conversionis plano situm sit, per § G. prop. 12. constet; eo nempe, per conversionis axem quod conversionis arcum bisecat; eoque per aciem Ungulæ, quod bisecat Ungulæ altitudinem; unde (per prop. 26. cap. præced.) ipsa gravitatis Centra determinantur. Quæque de expositis dicta sunt, ad alia transferentur; ut ad propositiones præcedentes aliquot ostensum est.

Atque de Cycloide primariâ, hactenus.

O. Cycloides verò Secundarias quod attinet; *Protractam* scilicet &
Fig. 176, 187, 188. *Contractam*; (quarum illa quidem basin habet *Majorem*, Hæc *Minorem*, quam est Peripheria Circuli Generantis:) Differunt quidem illæ, à Primariâ, in hoc potissimum; quod recta $\epsilon\beta$ (curvis Semicycloidis, & Semicirculi Generantis circa Cycloidis axem constituti, interjectæ,) sint respectivis Arcubus β I (in protractâ) seu β E (in contractâ) non quidem *Æquales, (ut, in primaria, b B rectæ Arcubus B A,) sed Proportionales; (Majores quidem in Pro-

Protractâ, Minores in Contractâ, & in eâ utrobique ratione, quam Fig. 176,
habet Cycloidis illius vel Semicycloidis Basis, ad Peripheriam vel 187,
Semiperipheriam Circuli generantis;) Æquales autem respectivis 188.
arcubus istius Circuli, cujus Peripheria vel Semiperipheria sit hujus Cycloidis vel Semicycloidis Basi æqualis. Puta, recta ϐβ (fig. 176.) sive quæ Protractam τϐI; sive quæ contractam τϐE, spectat; æqualis rectæ bB, hoc est arcui BA, circuli ABα Genitoris primariæ τbA; cujus utique Semiperipheria ABα, æquatur Semicycloidis suæ Basi τα, (adeoque & ipsis τι, τε,) seu promotioni Centri cC. Sunt enim rectæ bB, ϐβ, fig. 176. (seu bB, βα fig. 166.) mensura distantiæ centri circuli Genitoris ab axe Aα, dum respectiva puncta b (in Cycloide primaria,) seu ϐ (in secundariis) motu circuli generantis designantur: (ut ex constructione patet.) Adeoque, dummodo æquales sint τα, τι, τε, seu cC in omnibus eadem; æquales item erunt bB, ϐβ, utpote æqualium eædem partes vel proportionales.

Quæ autem Cycloides secundarias (τϐI protractam, vel contractam τϐE,) in dato quovis puncto ϐ, contingunt rectæ γϐν, sic habentur. Semicirculo Genitori Iβι vel Eβε, circa axem Iι, Eε, constituto; Concentricus fiat (circa idem C centrum) ABα, semiperipheriam habens ABα æqualem expositæ Semicycloidis basi τι, τε. Ductâque ϐβ basi parallelâ (circulo genitori circa axem constituto occurrens in β, & semicycloidi suæ in ϐ,) jungatur βC, peripheriæ ABα occurrens in B; (arcum BA, ipsi βI, vel βE, similem abscindens.) Atque à peripheriæ ABα puncto axis infimo α, ad peripheriæ genitoris punctum β, ducatur αβ recta; & huic ad angulos rectos βΓ. Quæ huic parallela (per assignatum Semicycloidis punctum ϐ) recta ducitur γϐν, Semicycloidem illam in ϐ contingit. (Excepto casu, de quo mox dicetur.)

Et quidem si intelligatur β punctum, in ipsis E, ε, I, ι; rectæ γϐν tangentes erunt ipsi cC, vel τα (Cycloidis primariæ Genitori Abα correspondentis basi) parallelæ.

In Cycloide autem Contracta Eϐτ, si β intelligatur in ipsa ατ, (ubi scilicet hæc peripheriam Eβε secat,) quæ huic respondet tangens γϐν est axi Eε parallela; si vero β sit alibi supra ατ, tangens γϐν (sicut & βΓ recta) axi Eε, occurret supra E; sed infra ε, si β sit alibi infra ατ.

In Cycloide verò Protracta Iϐτ, si ita sumi intelligatur, in Iβι peripheria, punctum β, ut αβ recta peripheriam illam in β tangat; quod huic respondet punctum ϐ, (cum illud ipsum sit in quo Cyclois

illa

illa recurvari incipit,) tangentem nullam habet, (sed quæ ipsam Tangere deberet, illam ibidem secat;) quæ vero supra hoc punctum sunt tangentes, exterius tangunt; quæ infra, interius: Axique Iι (continuato) occurrunt, illæ quidem supra I; hæ verò, supra ι; (saltem non infra:) Rectæque βΓ correspondentes, ipsi Iι axi occurrunt; illic quidem supra C centrum; hic, infra.

Fig. 175. Ipsæ autem Cycloidum harum Curvæ, Curvis semiellipsium æquantur: Et partes partibus respective sumptis. Puta, Cycloidis Contractæ Curva τEτ, Fig. 175. Semiellipseos curvæ æquatur, cujus Axium alter, quem quidem (sed, propter curvaturam, contractum,) repræsentat τAτ curva, sit $= 2\,A\alpha + AE$, (cujus ordinatim-applicatæ sint ipsæ bc;) alter vero $= 2\,AE$; quippe cujus semissis sit ipsa AE recta.

Cycloidis vero Protractæ curva τIτ fig. 175. æquatur Curvæ Semiellipseos, axium habentis alterum (quem, propter curvaturam, protractum repræsentat τAτ curva,) æqualem $2\,A\alpha - AI$; (cujus ordinatim-applicatæ sunt ipsæ bp;) alterum, $= 2\,AI$.

Et quidem tota τEτIτ figura (sumptis $AE = AI$,) alia non est quam ellipsis quædam distorta; cujus quidem, si axium alter intelligatur τAτ, suam retinens longitudinem, semiellipsis superior, (propter curvaturam,) protrahitur; inferior, contrahitur: eique Axi ordinatim-applicatæ sunt cbp rectæ.

De his autem, quæ Cycloides Secundarias spectant, (quarum considerationem ultra non prosequimur,) videatur Appendix ad nostrum de Cycloide Tractatum, unà cum Epistola eidem subjuncta (circa finem:) Ubi hæc fusius explicantur & demonstrantur.

SCHOLIUM.

IN propositionibus aliquot præcedentibus, quæ Cycloidem spectant ejusque solida, vel eò viam struunt; aliquanto fusior fui: eâ præsertim de causâ, quòd in meo *De Cycloide* Tractatu, (Anno 1659. edito,) calculum non ad omnes casus perduxeram; Sed ad eum saltem (alióśque qui ad hunc erant necessarii) quem, ex reliquis selectum, Anonymus Problematum Propositor præ cæteris designabat tanquam difficillimum, atque ad quem nisi cæteris intellectis non perveniri posse putabatur. Contentus, in reliquis, (ob rationes ibidem traditas,) saltem fontes tradidisse unde Calculi Geometrici beneficio omnia deducenda erant.

Quanquam

Quanquam enim mihi in animo fuerat, dum ea quæ prodierunt sub prelo forent, reliquum etiam calculum absolvisse, & simul edidisse: Cùm tamen interea temporis (eodem anno) inexpectatò prodierit D. *Paschalii*, seu *Dettonvillii*, (Propositoris Problematum,) de eadem re tractatus: Potius ducebam; rem totam, prout tunc erat, edere, (calculo ad reliqua nondum absoluto,) ne viderer ex tractatu suo (quod insinuaturos nonnullos præsentiebam) mea deduxisse. Et propterea, ipsa schediasmata sic edenda placuit, prout ea jam ante cum nostratibus communicaveram; quæque nominatim Honoratissimus D. Vicecomes *Brounkerus* subducto calculo examinaverat (ne forte, in multiplici calculo, quòd sæpe contingit, alicubi error calculi obrepsisset,) & comprobaverat, (ne uno quidem calculi lapsu per totum illud opus deprehenso,) jam tum per plures menses antequam *Dettonvilii* opus prodierit. Sed & totius Methodi summam, jam ante per annum integrum, ad D. *Carcavium* suum (prout *Dettonvilius* ipse, tum Anonymus, jusserat,) *Parisios* miseram; ubi & ea viderat *Paschalius* ipse; prout ejus ad *Wrennium* nostrum literæ, disertè indicant: Ut nullus iniquæ de meis suspicioni locus sit.

Et quanquam fieri non possit, quin, eandem rem tractantibus, nonnulla mihi cum illo fuerint communia: Methodum meam ab illius diversam esse, qui utramque comparaverit non poterit non videre. Quantò autem mea sit quàm illius expeditior, magisque directè ad scopum tendat; aliorum esto judicium, siqui fuerint qui volent tum juxta mea, tum juxta illius principia, vel calculum universum, vel istius saltem casûs quem ex reliquis selegit ille, (de Centro gravitatis Semisolidi, ex Semicycloidis circa basin suam Semiconversione facti, determinando,) calculum instituere.

Et, speciatim, illam Cycloidis in Segmenta distributionem, ubi ostenditur, non modò Semicycloidem Semicirculi triplam esse, (quod pridem innotuit,) sed & illius Portiones (rectis debito modo abscissas) Portionum hujus respective triplas esse; (puta in Fig. 166. Fig.166.
$b\beta\tau = 3\,B\alpha B$, $A\alpha\beta b = 3\,A\alpha B$, $d\delta\beta b = 3\,D\alpha B$, & sic ubique;) quam ego totius processûs mei originem facio; cæteraque hinc deduco: Ille ne uspiam advertit. Et quidem nesciisse planè videtur, donec ex scriptis meis id resciverit. Quippe rem tanti in hoc negotio momenti, non putandus est, modò sciverit, reticuisse velle. Neque illud prius adverterunt, credo, ex Gallis ulli; quamquam jam tum per annos plus quam quadraginta in rem illam Cycloidis, intenti fuerant ex illis summi viri, quam ego tum primum (ad illud

provocatus,) considerandam suscepi; nescius alia jam tum ab aliis inventa fuisse, quam quod apud *Torricellium* & *Schotenium* traditum noverim, Cycloidis planum circuli triplum esse; Methodúmque ibidem tradi, pro tangentibus ducendis.

Atque hinc esse judico; quòd ille *Figuram Sinuum Versorum*, nusquam in auxilium advocat; sed ea longis ambagibus ex *Sinuum Rectorum* doctrinâ petitum it, quæ ex Sinibus Versis multò promptiùs fuissent depromenda.

Curvámque figuræ isti adjacentem A d τ, fig. 170. (quam *Ellipsin Expansam* dicimus) non omnino considerâsse videtur: Quamquam enim quæ ipsi est *Cycloidis Socia*, non alia sit quam hujus Curvæ pars dimidia, ut d A; (quod in subjunctis tractatui *de Cycloide*, pag. 100. demonstro;) illam tamen ex alia plane origine deducit, unde hæc tota non deducetur. Quam enim ille *Dimidiam*, ductu Circini in superficie Cylindri, (ex apertura quæ diametro Basis Cylindri æqualis sit,) descriptam vult: Hoc est, (quippe hoc tantundem valet) communi *Sphæræ atque Cylindri* sectione; (posito Sphæræ Centro in Cylindri superficie; ejusque Radio, hujus Basis Diametro æquali:) Nos, *Totam*, ex communi *Cylindri & Plani* sectione deducimus: (Utrique interim absumptam Cylindri superficiem in Planum expandentes.) Quod illum minimè advertisse existimo.

Hinc est, quòd, in propositis suis, selegit ille casum illum, ut difficillimum, qui Semisolidum circa Semicycloidis Basin spectat; (quem, nisi perspectis quæ Semisolidum circa Axem spectant, solutum iri posse non putaverat; nec quidem, per ejus methodum, absque illis solvi potest.) Qui tamen (utut ille hoc nesciverit) longe facilior est, quàm casus similis de Semisolido circa Axem. Quod ex traditis nostris, propter illam quam diximus Semicycloidis in sua Segmenta, Segmentis Semicirculi respondentia, distributionem, satis liquet. Verùm cùm ille hanc distributionem nesciverit; non poterat eò pervenire, nisi ope Semisolidi circa Axem. Adeoque, longo circuitu & perplexo admodum calculo eò tandem tendere necesse habet, quò nos rectâ pervenimus.

Hinc etiam est (ni fallor) quod in Problematis primitùs propositis, illud Semicycloidis Segmentum (cum suis Solidis) expendendum proponat, quod rectâ Basi parallelâ abscinditur, (ut b V A, fig. 166.) potiùs quàm quod rectâ abscindatur quæ parallela sit Axi. Utut enim, distributionem hanc intelligentibus, posterioris hujus consideratio fuisset non minus intricata; illi tamen, qui distributionem

nem

nem eam nondum perſpectam habuit, prior illa habita eſt intricatior; & quidem, per methodum ab illo traditam, difficiliùs abſolvetur.

Quæ omnia, quidem, manifeſta ſunt indicia, diſtributionem hanc (& quidem pulcherrimam) ipſi minimè fuiſſe perſpectam.

Quod quidem eouſque verum eſt, ut ſiquis velit, ſecundum ipſius methodi leges, (quod nos in noſtrâ fecimus,) caſuum omnino omnium calculum aggredi, eorum præſertim qui Semiſolidi circa $\tau\alpha$ (ſemicycloidis baſin,) vel (huic parallelam) b V, centra gravitatis ſpectant; (expertus loquor;) rem adeo perplexam reperiet, ut mirum ſit ni, laboris pertæſus, in medio itinere laſſus deſiſtat. Quod in cauſa fuiſſe ſuſpicor, cur ille (utut id pollicitus videretur) ad calculum non revocaverit caſus omnes à ſe propoſitos; ſed, unius tantum numeros exhibuiſſe contentus (ſuppreſſis interim quibus huc pervenerat veſtigiis) de reliquis altum habet ſilentium.

Sed neque noverat ille (neque ex ſuis alii) Cycloidis curvæ æqualem rectam exhibere, aut in datâ ratione curvam illam ſecare; antequam id ex Anglia reſciverit. Unde factum erat quod Poſteriora Quæſita, quæ Cycloidis Curvam hujuſque ſegmenta ſpectant; & Superficies illius, vel ſegmentorum ſuorum, converſione factas; harúmque omnium Centra gravitatis; non fuerint unà cum Prioribus propoſita; ſed tum demum poſtea quam ex *Wrennii* noſtri literis indicatum fuerat, quo pacto poſſint huic curvæ, ſuiſque partibus, æquales Rectæ exhiberi. Quod ex illius ad *Wrennium* literis abunde liquet.

Quæ omnia non eo animo dicta ſunt, ut inventis ſuis derogatum eam: Sed ut nobis quæ noſtra ſunt aſſeram, & reapſe oſtendam, etiam omnia illa non minùs eſſe (ne dicam *magis*) methodis noſtris pervia, quam ſuis; nequis ſupereſſe poſſit iniquis ſuſpitionibus locus, nedum malignis inſinuationibus.

Quod autem hac in re, præter ea quæ pridem edidimus, jam ſuperadditum habetur: Non aliud eſt (rem ipſam quod ſpectat) quam calculi, pridem inchoati, continuatio. Non enim alia hic adhibemus principia, vel methodi leges alias, quàm quæ in illo *de Cycloide* Tractatu paſſim adhibemus. Sed & quæ illic habentur, fere deprompta ſunt ex principiis meis, in *Arithmetica Infinitorum* pridem traditis, Anno 1656. editis: quæ & in *Commercio Epiſtolico*, Anno 1658. edito. (Epiſt. 15, & 16, hujuſque appendice,) ad Centra gravitatis accommodaveram. Quippe hæc omnia vix aliud ſunt, quàm iſtius Methodi Univerſalis, ad particulares caſus accommodatio.

Postquam vero ea quæ præcesserunt omnia, ad calculum uti hic habentur perduxeram; eaque per complures menses Prelo subjecta fuerant; & magna pars impressa: incidi in *Laloveræ* de Cycloide tractatum; ante aliquot annos Tolosæ editum, sed (uti audio) nonnisi nuperrime in Angliam allatum. Qui varios de Cycloide ejusque Solidis, & horum Centris gravitatis, Casus, ad calculum redegit, suâ methodo. Hanc ego, quamvis eam hactenus examinare nondum vacaverit; eaque, primâ saltem fronte, non parum intricata mihi videatur: Sanam tamen esse, saltem quod summam rei spectat existimo. Eò potissimum, quòd calculi sui numeros (saltem in plerisque quos contuli casibus,) cum nostris consentire reperio. Sicubi verò dissentiant, (quod in paucis fit,) id Calculi potiùs alicui lapsui fortuito (qui condonandus erit) quam Methodi vitio, imputandum videtur. Quod & de nostris intellectum esto, sicubi irrepserit (quod facile fieri possit, & quidem ægrè cavebitur, in tam multiplici calculo,) calculi lapsus aliquis, (nedum calami, aut etiam Preli.) Quippe, Methodum ipsam meam, satis ubique demonstratam esse, satis securus sum: Sed neque de ipso Calculo multum metuo.

Quod autem ille multus sit in conquerendo, quasi cum eo minùs candidè actum fuerit: Ego quidem non miror; ut qui sæpius eadem ab eisdem hominibus expertus fuerim, de quibus hic conqueritur. Sed & jam, ante nos, Cartesius (ut in ipsius editis Epistolis passim liquet) eadem sæpiùs conquestus est. Et Torricellium (ne plures memorem) pari modo habitum fuisse, ex eâ liquet Apologiâ quam pro illo sive *Carolus Dati*, sive quisquis alius, sub ficto nomine *Timauri Antiatis*, edidit Florentiæ, Anno 1663. Linguâ Italicâ. Sunt utique qui Problemata sua, *Totius Europæ Mathematicis* solvenda exponunt; ne dicam venditant, jactitantve; (quasi quidem huic soli negotio cæteris vacaret, ut sua pensa absolverent:) Quæ quidem si negligimus; Insultant: Si solvimus; Irascuntur, calumniantur, opprobriis onerant, insimulant plagii; (quasi quidem ipsi soli sapiant, atque impossibile sit ut alii, nisi ipsorum scriniis expilatis, quicquam in Mathematicis arduum præstare possint.) Quod fecit ut ego jam per plures annos tantum-non religiose abstinuerim, utut aliquoties publice provocatus, & lacessitus, nequid hujusmodi commercii cum illis ultra haberem, apud quos nec impunè licet eloqui, nec tacere: Nec nisi nuperrimè, nimis lacessitus, silentia rupi.

Quid autem rei sit, cur ibi *Dettonvilium* à *Paschalio* alium esse, insimulatum ire videantur, (quod & *Lalovera* observat,) ego non in-

intelligo; quem ego pro eodem ſemper habui, atque etiamnum habeo. Et quidem, eundem eſſe, *Lalovera* (in tractatu ſuo) iis indiciis oſtendit, ut de eo non ſit cur quiſquam dubitet, ſaltem donec alius (à *Paſchalio*) *Dettonvilius* reperiri poſſit. Et quidem ex *Paſchalii* ad *Wrennium* literis, (jam antequam Problematum Propoſitor *Dettonvilii* nomen profeſſus fuerat,) non erat conjectu difficile, ipſum fuiſſe iſtorum Problematum Authorem: Et quidem, utut D. *Carcavius* in ſuis ad me literis, quaſi rem diſſimulaturus, *Dettonvillium* a *Paſchalio* diſtinguat; (quaſi non idem forent;) in D. *Hugenii* tamen ad me literis, (per quem D. *Carcavius* ad me tranſmittenda curavit aliquot *Dettonvillii* exemplaria, ad alios aliquot diſtribuenda; quem itaque putaverim tum *Carcavii* mentem, tum Authorem libri cognoviſſe;) Junii 9. 1659. *Hagæ* datis, ſic ſcribitur; *Ad poſtremas tuas nihil hactenus reſcripſi, eò quòd ab illo jam tempore expectabam libros hoſce* Dettonvillii *ſeu* Paſchalii, *quos mihi ad te curandos commiſſum iri noveram. Quaterna hæc exemplaria ad te uti mitterem rogat* Carcavius; *te verò ut ſingula ex his, Viris Clar.* Wrennio, Wardo, & Hobbio, *tradi cures. Orátque ut examinato* Dettonvillii *opere ſententiam ſuam quiſque ipſi edere velit.* Et quidem *Wrennius* noſter, Pariſiis huc ante triennium reverſus, (ubi moram aliquam poſuerat,) *Paſchalium*, dixit, iſtius libri Authorem Pariſiis habitum eſſe, nemine (quantum ille obſervaverat) vel reclamante vel dubitante. Sin fallimur omnes, (quod vix crediderim:) Siquando alius a *Paſchalio* prodiverit *Dettonvillius*; mihi certè perinde erit: (Quippe hic, mihi, neque ſeritur neque metitur:) Ego ſaltem hactenus, alium non novi.

Laloveræ Numeros quos cum meis me Contuliſſe dixi; illi ſunt qui habentur, ad octo Problemata, prop. 25. lib. 3. qui (ad terminos meos reducti) cum noſtris conſentiunt omnes.

Item, qui habentur, ad octo Problemata prop. 36. lib. 4. qui omnes item cum meis conſentiunt; niſi quod in octavo Problemate diſſentiant. Quippe quam aſſignat ille diſtantiam (à converſionis axe) Centri gravitatis Semiſolidi, ex ſemiconverſione ſuperioris ſemiſſis ſemicycloidis A d C (in mea fig. 166.) circa axem A C; eſſet (ad terminos noſtros reducta,)

$$\frac{6RP^3 + 144R^2P^2 + 216R^3P - 512R^4}{9P^3 + 144RP^2 - 240R^2P.}$$

At verò, juxta meos numeros, (per § O, P prop. 21. hujus,) Ungulæ Segmenti A b V, aciem habentis A V ſeu A α, diſtantia centri gravi-

gravitatis ab AV, ſeu Aα, (hoc eſt, à perpendiculari plano ſuper Aα erecto,) ubicunque ſumatur V, ſive ſupra C, ſive infra C, ſive (quem ille ſolum caſum conſiderat) in ipſo C centro; eſt

$$\frac{87aR^3 - 87sR^3 - 96avR^2 - 9svR^2 - 12a^3R + 36a^2sR + 12as^2R + 2s^3R + 24a^3v + 36a^2v + 24as^2v + 6s^3v}{-48vR^2 - 18a^2R + 36asR + 6s^2R + 36a^2v + 36asv + 12s^2v};$$

Hoc eſt, in præſenti caſu, (propter $a = \frac{1}{4}P$, & $s = v = R$,) $\frac{3RP^3 + 72R^2P^2 + 108R^3P - 1408R^4}{18RP^2 + 288R^2P - 480R^3}$; (ut factâ Reductione patebit.) Adeoque in Semiſolido (cujus diſtantia eſt ad illam Ungulæ, ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$, ſeu $4R$ ad P, ut ſæpiùs ante oſtenſum eſt,) erit $\frac{6RP^3 + 144R^2P^2 + 216R^3P - 2816R^4}{9P^3 + 144RP^2 - 240R^2P}$. Quod à numeris noſtris in hoc diſſentit; quòd habeat ille $-512R^4$, pro $-2816R^4$. Siquis autem dubitaverit, ubi numeri diſcrepant, utrum penes illius numeros, an penes meos. erratum fuerit; errorem penes illum eſſe, etiam abſque operosâ diſquiſitione, facile conſtabit. Quippe ſi ad numeros abſolutos (quam proxime) fiat reductio; reperietur diſtantia centri gravitatis iſtius Semiſolidi, ab Aα, ſecundum meum calculum, quaſi $\frac{2}{7}$ totius diſtantiæ $\alpha\tau$; at ſecundum ejus, quaſi $\frac{2}{5}$; quam nimiam eſſe, qui figuram iſtius ſolidi mente conceperit, minimè dubitabit: Eſt enim tanta fere quanta ſi eſſet Semicylindrus, cujus diſtantia ſaltem minor eſſet quam $\frac{4}{9}$; quæ nonniſi paulo major eſt quam $\frac{2}{5}$, hoc eſt $\frac{4}{10}$: Adeoque hanc nimiam eſſe, non erit dubitandum.

Denique; qui habentur ad octo Problemata, ſuæ prop. 59. lib. 5. qui cum noſtris item conſentiunt omnes; excepto octavo Problemate. Quod eſt de diſtantia centri gravitatis (à converſionis Axe Aα) ſuperficiei factæ ex ſemiconverſione curvæ Aτ (in mea fig. 166.) circa Aα. Eſt enim, ſecundum ipſius numeros, (ad meos terminos reductos,) $\frac{18RP^2 + 48R^2P - 544R^3}{9P^2 - 24RP}$; quæ ad numeros abſolutos reducta, major erit quam $\frac{2}{3}$ totius $\alpha\tau$; quam nimiam eſſe, certum eſt; (quippe quæ major eſt quàm ſi eſſet ſuperficies ſemicylindrica, in quâ diſtantia minor eſſet quam $\frac{2}{3}$, imò quàm, $\frac{4}{9}$.) Eſt autem, juxta numeros meos (§ I. M prop. 22.) Centri gravitatis Ungulæ ipſi Aτ inſiſtentis, aciem habentis Aα, diſtantia ab Aα, (hoc eſt, à perpendiculari plano huic inſiſtente,) $\frac{45P^2 - 1024R^2}{90P - 240R}$; adeóque in ſemiſolido correſpondente, diſtantia à converſionis axe Aα, (utpote ad illam

illam Ungulæ, ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$; seu $4R$ ad P;) $\frac{90RP^2 - 2048R^3}{45P^2 - 120RP}$; quæ, ad numeros absolutos reducta, minor erit quam $\frac{2}{3}$, imò quàm $\frac{8}{17}$, (sed major quàm $\frac{7}{15}$,) totius $a\,\tau$.

Verùm cùm numeri ejus pro casibus illis (nunc unico, nunc duobus,) quos ille expendit; (nempe, qui vel totam A $\tau\,a$, vel superiorem semissem A d C spectant;) cum nostris universalibus (casum quemlibet indifferenter respicientibus;) in cæteris conveniant: non in ipsius Methodi vitium, sed in calculi lapsum aliquem, rejiciendus erit hic in paucis dissensus.

Inveniet autem, in his meis, Lector, eandem non rarò quantitatem pluribus modis (sed qui sint ἰσοδύναμοι) designatam. Quod ideo factum est, quoniam nunc hic, nunc ille modus, (ubi ad usum reducendus erit,) accommodatior videri possit; adeoque Lectoris commodo consultum est, ut (reductionibus à me jam factis) eum seligat designandi modum qui ipsi gratior videbitur, vel suis usibus accommodatior. Quinimò & alii plures esse possunt modi (quos ego ne nimius essem non apposui) easdem quantitates designandi, prout quis alias atque alias reductiones instituere velit.

Sed & passim deprehendet, me easdem quantitates pluribus methodis investigâsse, atque ad calculum perduxisse. Quod factum est, tum ut Methodos illas plures edocerem; (adeoque ostenderem quàm abunde sufficiant principia nostra ad hæc quæsita multis modis exhibenda:) tum etiam ut de calculo ritè adhibito magis securus essem, quàm si unico modo illum exquisivissem. Quàm enim, in multiplici calculo, lapsus in proclivi sit, nemini vel parum exercitato ignotum esse potest. Ideoque, quò caverentur hujusmodi lapsus, cautè prospiciendum putavi, ut ea fere omnia, in quibus saltem siquis foret error idem etiam alia inde dependentia latè inficeret, pluribus methodis ad calculum redigerentur; ut plurium methodorum consensu (quæ sibi mutuò Probationum seu Examinum vices subirent) confirmatior essem de calculo ritè instituto. Quod fecit, ut vel de ipso Calculo, tanquam omnino rectè instituto, confirmatior fuerim, etiam ante cognitum (quod jam nuperrime, post finita omnia contigit,) *Lalovera* cum nostris consensum.

His autem de Cycloide, fusiùs (ut dictum est) explicatis; reliqua quæ sequuntur breviùs exequemur: Ne si omnia particulatim persequi velim, in immensum excresceret hoc Caput; quod jamjam multo ultra quam speraveram excrevit.

PROP.

PROP. XXIII.

A. Superficies curva Cylindri recti, ejusve Portio duabus rectis lineis interjecta, æquatur Parallelogrammo rectangulo æquè alto, cujus Basis sit æqualis peripheriæ basis Cylindri, ejusve respectivæ portioni eisdem rectis lineis interjectæ.

B. Idemque obtinet in Superficie istiusmodi Solidi cujuslibet Columnaris recti, quamvis basin habeat non circularem, sed Ellipticam, Parabolicam, Hyperbolicam, aliámve sive rectilineam sive curvilineam quamlibet.

C. Centrum gravitatis est in medio rectæ conjungentis centra gravitatis peripheriarum (sive totalium sive partialium, prout casus contigerit,) oppositarum basium.

D. Adeoque (propter arcûs circularis centrum gravitatis datum) datur Superficiei istius Cylindricæ (perfectæ vel imperfectæ) centrum gravitatis.

E. Idemque in aliis illis superficiebus columnaribus dabitur, si detur respectiva curvarum basium Centra gravitatis.

F. Datur etiam expositæ superficialis Ungulæ Cylindricæ, tum
H. Magnitudo, tum Centrum gravitatis.

G, I. Idemque (datis Curvarum, ut dictum est, Longitudinibus & Centris gravitatis) dabitur in reliquis superficiebus Columnaribus.

K, L, M. Quodque de Ungulis superficialibus dictum est; idem ad qualvis in superficiebus illis figuras, planorum sectionibus terminatas accommodabitur.

N. Quæque de Cylindri Recti, Rective Solidi Columnaris, superficie dicta sunt; eadem ad Scalenorum superficies transferentur.

Estque

Estque Superficies Cylindri Recti, ad Superficiem Scaleni, ejusdem Lateris, & super eadem Base; ut est Perimeter Basis, ad Perimetrum Sectionis quæ Lateri seu Axi sit ad angulos rectos: Quod & de partibus respectivis intelligendum erit. O.

Idemque non minùs obtinet in aliis Solidis Columnaribus, cujuscunque basis. P.

Ungulæque, & aliæ figuræ superficiales modò dictæ, quæ in erectis exigendæ sunt ad Basis Perimetrum; eædem, in Scalenis, similiter exigendæ sunt ad sectionem illam quæ Recta sit ad Scaleni Axem. Q.

INtelligantur enim, fig. 172. super basis Cylindri recti Peripherîa, ejusve portione aliquâ, $\alpha\Delta\tau$, in singulis punctis (æqualiter ab invicem dissitis) erigi perpendiculares rectæ, ut $\Delta\delta$, curvam Cylindri superficiem complentes; (juxta Def. 1. Cap. 4. hujus:) quæ, propter omnes ad basin angulos æquales rectos, totidem parallelogramma rectangula (æque alta invicem & æquè lata) repræsentabunt, superficiem illam curvam complentia; quæ, si in planum expandi intelligantur, totidem rectangulis rectilineis congruunt, complentibus rectangulum rectilineum ejusdem altitudinis, cujus basis æquetur ipsi $\alpha\Delta\tau$ curvæ in rectam expansæ. A. Fig. 172.

Idemque similiter ostenderetur, etiamsi $\alpha\Delta\tau$ curva, non esset arcus Circularis, sed alia quævis Curva. B.

Hujus autem superficiei curvæ Cylindricæ, vel Columnaris, Centrum gravitatis esse in mediâ longitudine, ostensum est, ad prop. 2. hujus; atque in eâ rectâ quæ oppositarum basium superficiei istius Centra gravitatis conjungit, per prop. 5. hujus: Ergo, in hujus puncto medio. C.

Adeoque, propter datum arcûs circularis centrum gravitatis, per 14 hujus; dabitur, non tantum totius superficiei Curvæ Cylindri recti, sed & portionis cujusvis (duabus rectis ad basin perpendicularibus interjectæ) Centrum gravitatis. D.

Idemque similiter dabitur, in alia superficie columnari, etiamsi $\alpha\Delta\tau$ curva, non sit arcus circuli, sed alia quævis curva, dummodo hujus curvæ centrum gravitatis notum sit. E.

Si verò ex hujus Cylindri recti superficie curvâ, plano quovis $T\kappa AT$ utcunque obliquè posito, abscindi intelligatur superficialis F.

Fig. 172. Ungula T κ A δ; (ubicunque contingat T A, Ungulæ acies; non minus quàm si sit Diameter Circuli T δ A:) propter datum inclinationis angulum υ a β, arcûsque Centrum gravitatis; dabitur Ungulæ altitudo super centrum illud, quæ in arcûs longitudinem ducta dat superficialis istius Ungulæ Aream; per prop. 11. hujus. Quod non minus valet de Ungulâ totâ T κ A δ, quàm de partialibus A β υ, β υ κ δ, &c. Nam & hic ob data arcuum A β, β δ, &c. Centra gravitatis, adeoque eorum ab acie A T distantias, & angulum inclinationis, adeoque altitudinem super gravitatis Centra; habebitur area: Ductâ altitudine illâ in curvæ longitudinem.

G. Atque hæc obtinent, quæcunque sit A δ T curva (non minus quàm si sit arcus circularis,) cujus & Longitudo & Centrum gravitatis nota intelligantur.

H. Habitis autem, eo quo dictum est modo, Ungularum magnitudinibus; earundem Momenta eâ methodo investigari possunt, quam, ex prop. 10. petitam, in superioribus sæpius adhibuimus: Nempe, omnium arcuum (Ungulam superficialem complentium) Momenta respectu expositæ rectæ, (quæ, propter cognita curvarum tum longitudines, tum Centra gravitatis, adeoque ipsorum ab exposita recta, planove per illam perpendiculari, distantias, habentur,) sunt ipsum Ungulæ Momentum respectu istius rectæ; quod, per magnitudinem divisum, exhibet distantiam Centri gravitatis ab illo perpendiculari plano. Atque hoc si respectu plurium rectarum (quæ non sint ad invicem parallelæ) fiat; habebitur ipsum gravitatis Centrum.

Vel etiam, (per § W. prop. 13. hujus) haberi possunt Ungularum istiusmodi in superficie Cylindri recti, saltem quarum acies est Circuli diameter, Centrum gravitatis; & Cylindracearum superficierum (parallelis rectis interjectarum) Centra dari, modò ostensum est, § C, D, hujus: Atque in harum aliquas (addendo vel subducendo, prout opus fuerit,) resolvi potest istiusmodi quævis Ungula superficialis Cylindri recti, (ut exemplis mox proferendis ostendetur:) Dabitur igitur, (per prop. 27. cap. præced.) istiusmodi cujusvis Ungulæ Centrum gravitatis.

I. Hæc autem, quò ad alias curvas transferantur, opus erit, ut tum ipsius A δ T, quæcunque fuerit curva, tum partium ipsius quæ rectis putà ipsi A T parallelis (si nempe momentum respectu hujus inquiratur) æqualiter ab invicem dissitis abscinduntur, tum longitudines, tum Centra gravitatis, vel (quæ ex his resultant) momenta habeantur. Quippe, his habitis, momenta similiter exquirentur (per prop. 10. hujus) atque si essent arcus circulares.

Quod autem de Ungulis ſuperficialibus traditum eſt; idem ad quaſvis in eâ ſuperficie figuras, planorum utcunque poſitorum interſectionibus (cum ea curvâ ſuperficie) terminatas, accommodabitur. Nam, ut figuræ quævis in plano rectilineæ reſolvi poſſunt in rectangula triangula & parallelogramma; eodem fere modo figuræ quælibet (in recti Cylindri vel Columnaris ſolidi ſuperficie) planorum ſectionibus factæ, reſolvi poſſunt in ſuperficiales ungulas & Cylindraceas ſuperficies rectangulas. Adeoque ex partialium magnitudinibus habitis, habebitur (addendo, & ſubducendo, ut caſus poſtulaverit) magnitudo expoſitæ: Atque, ex illarum habitis Centris gravitatis, habebitur hujus, per prop. 27. cap. præced. K. Fig. 189.

Exempli gratia; Sit iſtiuſmodi Figura expoſita (in ſuperficie Cylindri recti) planis terminata, C A D, (fig. 189.) Atque demiſſis (ad Cylindri baſin B A S) rectis C B, D S; erit expoſita C A D figura, eadem atque Ungula ſuperficialis C B A S D, demptis C A B, & D A S. L.

Sed, propter dati arcûs B A S Centrum gravitatis datum (per prop. 14. hujus,) adeoque ipſius diſtantiam à datâ Ungulæ acie (ſeu communi baſis B A S, planique Ungulam abſcindentis C D F, ſectione) X Z; & conſequenter (propter datum etiam Inclinationis Planorum angulum F X B) Longitudinem rectæ, quæ arcûs Centro gravitatis inſiſtit, rectis in ſuperficie curvâ Cylindri parallelæ: Datur etiam (per prop. 11. hujus) ſuperficialis ungulæ C B A S D area ſeu magnitudo.

Et ſimiliter; propter datum arcûs B A Centrum gravitatis; Ungulæque Aciem E A (quæ ſive ſit ipſi X Z parallela, ſive ſecus, perinde eſt;) Angulumque Inclinationis C E B: Dabitur ſuperficialis Ungulæ C A B magnitudo.

Et, ſimili proceſſu, dabitur magnitudo ſuperficialis Ungulæ D A S.

Datur ergo, expoſitæ Figuræ C A D = C B A S D — C A B — D A S magnitudo. (Et ſimiliter, mutatis mutandis, in expoſitis Figuris iſtiuſmodi aliis.) Quod oſtendendum erat.

(Idemque pariter obtinebit, etiamſi curva B A S non ſit arcûs circularis, ſed alia quævis curva, dummodo (ut ſupra dictum eſt) tum ipſius, tum partium ſui B A, A S, habeantur longitudines & Centra gravitatis.)

Porro; quo habeatur expoſitæ figuræ C A D (juxta tenorem § W. prop. 13. hujus) Centrum gravitatis; reſolvenda erit ea, non tantum in Ungulas C B A S D, C A B, D A S; ſed & hæ porro ita M.

 ſunt

Fig. 189. sunt resolvendæ, ut per superficies Cylindraceas rectangulas, atque ejusmodi ungulas quæ acies habeant in diametro Circuli (additas demptasque prout res postulaverit,) exhiberi possint.

Putà; cùm Ungulæ CBASD acies XZ non sit in diametro circuli BAS, (sed extra illam in eodem plano:) ducta intelligatur in secante Plano CFD, per L punctum in Axe Cylindri, recta LH, ipsi XZ parallela; quæ curvæ CD occurrat in H: Atque, per H, circulus GHK, centro L descriptus, basibus Cylindri parallelus. Adeoque fient superficiales Ungulæ CHG, DHK, communem aciem habentes LH in circuli Diametro. Quarum si auferatur illa, & hæc addatur, superficiei Cylindraceæ rectangulæ GBASK; habetur Ungula CBASD. Habitis itaque illarum tum Magnitudinibus, tum Centris gravitatis (nempe Ungularum CHG, DHK, per § W. prop. 13. & Cylindraceæ GBASK per § C, D, hujus;) habebitur etiam (per prop. 27. cap. præced.) Centrum gravitatis ipsius CBASD = GBASK + DHK — CHG.

Similiter ostendetur (mutatis mutandis) Ungulam DAS, componi ex Cylindraceâ AMNS, additâ Ungulâ DON, demptâ AOM, quarum Ungularum communis acies OP est in diametro Circuli. Habebitur itaque Centrum gravitatis ipsius DAS = AMNS + DON — AOM.

Item, Ungulam CAB haberi, demptis, ex Ungulâ CQT, tum Ungulâ AQR, (quarum communis acies QV est in circuli diametro,) tum Cylindracea BART. Adeoque habebitur Centrum gravitatis ipsius CAB = CQT — AQR — BART.

Habebitur itaque (per prop. 27. cap. præced.) Centrum gravitatis figuræ expositæ CAD = CBASD — DAS — CAB. (Et similiter in aliis figuris, mutatis mutandis.) Quod erat ostendendum.

Non autem erat necesse, in auxilium advocare § W. prop. 13. sed per methodum illam (sæpiùs adhibitam) ex prop. 10. hujus petitam, absolvi posset negotium: Eademque rem absolvet in aliis (ut dictum est) Superficiebus Columnaribus, dummodo Curva basis, partesque suæ, nota habeant tum Magnitudines tum Centra gravitatis.

N. Si verò exposita sit Cylindri (non Recti, sed) Scaleni superficies; ut in fig. 190. Quæ ad singula Perimetri basis puncta (æqualiter ab invicem dissita) obliquè cadunt rectæ (axi Cylindri parallelæ) superficiem curvam cylindraceam complentes; neque habebunt

Fig. 190.

ab

ab invicem eandem quam respectiva basis puncta distantiam, (sed minorem, propter obliqua quæ repræsentant parallelogramma, quorum latitudo minor est quam est basium longitudo;) neque distantias invicem æquales, (propter inæqualem inclinationem ad basis perimetrum.) Utut enim habeant illæ ad planum basis Cylindri eandem omnes inclinationem; non tamen eandem habent omnes ad curvam basis perimetrum; (quod, si opus esset, facile est demonstratu; sed, consideranti, clarius per se liquebit, quam ut id sit opus.) Quo fit, ut Parallelogramma, quæ repræsentant rectæ illæ, superficiem complentia, neque Rectangula reputanda sint, sed neque æqualiter inclinata; (adeoque nec æque-lata, utut æquales bases habentia.) Fig. 190.

Atque ob harum considerationum priorem, evenit, quod Curva Superfices Cylindri Scaleni non (ut Recti) æquetur facto ex Cylindri latere in perimetrum basis (hoc est, in aggregatum basium omnium Parallelogrammorum quæ repræsentent illæ rectæ) ducto: Sed minor eo sit. Quæ consideratio communis etiam est Cylindri solido; quod minus est, quam factum ex latere Cylindri scaleni in basis planum ducto, (hoc est, in aggregatum omnium basium Prismatum, quæ repræsentant rectæ, solidum juxta def. 4. complentes;) quoniam Prismata solidum complentia, non sunt (ut in Cylindro recto) Recta, sed Scalena. Sed, cum sint æqualiter inclinata, (eandem utique ad planum basis inclinationem habent, quam Axis Cylindri,) eâdem ratione minuuntur (propter inclinationem) omnia; nempe, in ea ratione quam habet Cylindri Altitudo ad Latus suum. Adeoque Cylindri Solidum æquale fit facto ex (non Latere, ut in Cylindro Recto, sed) Altitudine Cylindri in Basem ductâ.

Ob posteriorem verò considerationem, (quòd Rectæ in superficie Cylindri Scaleni non sint, ad basis Perimetrum, Æqualiter inclinatæ,) evenit, quod non (ut in Solido fiebat) una aliqua recta, quæ sit communis omnium Parallelogrammorum Altitudo, pro Latere substituenda sit, in Basis Perimetrum ducenda, quò habeatur Area; sed, pro aliis atque aliis Perimetri punctis, aliæ atque aliæ rectæ; propter variatam in singulis punctis inclinationem ad Basis Perimetrum, adeoque Parallelogrammorum Altitudinem.

Huic itaque quò subveniatur incommodo; Si exponatur consideranda (fig. 190.) Cylindri Scaleni bBSs superficies curva; neglectis basibus BAS, bas, (quæ sunt ad Cylindri latus bB obliquè positæ:) Sumatur planum aliud, quod sit ad Cylindri Latus (vel Axem) rectum, sectionem faciens $\beta\alpha\sigma$ Ellipsin (dummodo BAS sit Circulus;) ad quam itaque curvam $\beta\alpha\sigma$, rectæ omnes Bb, Aa, &c.

Fig. 190. &c. superficiem complentes, non minus Rectæ sunt, quam sunt in Cylindro Recto Latera ad perimetrum basis. Et, consequenter, si per singula curvæ $\beta \alpha \sigma$ puncta, æqualibus ab invicem in eâdem curvâ distantiis remota, transire intelligantur totidem æquales rectæ B β b, A α a, &c. superficiem complentes; repræsentabunt illæ (non minus quam quæ sunt in superficie Cylindri recti) totidem Parallelogramma Rectangula æque alta, & æque lata, quorum omnium Bases simul sumptæ complent ipsam $\beta \alpha \sigma$ curvam, & communis Altitudo est ipsum Cylindri Latus B β b; quæ itaque in curvam totam $\beta \alpha \sigma \beta$ ducta, exhibet integram Cylindri superficiem curvam; eademque in curvæ portionem quamlibet ut $\beta \alpha$ ducta, exhibet correspondentem superficiei portionem B A a b.

O. Hinc sequitur; Superficiem Cylindri Recti, ad superficiem Scaleni, ejusdem Lateris & super eandem Basin, ita esse, ut est Perimeter Basis, ad Perimetrum Sectionis quæ Lateri vel Axi sit ad angulos rectos; puta, ut B A S, ad $\beta \alpha \sigma$: Atque illius portionem, ad respectivam portionem hujus, ut est ea basis portio cui insistit, ad respectivam sectionis rectæ portionem; puta, ut B A ad $\beta \alpha$, sic quæ portioni B A insistit in Cylindro Recto, ad eam quæ eidem insistit in Scaleno superficiem, idem Cylindri Latus habentem.

P. Idemque obtinet, ob eandem causam, non tantum in Cylindris veris, qua basin habent Circularem; sed & Solidis quibusvis Columnaribus. Nempe, quæcunque sit B A S curva quæ basis sit Solidi Scaleni pro eâ substituenda erit $\beta \alpha \sigma$, quam exhibet sectionem Planum illud quod est Lateri, vel Axi, ad Angulos rectos. Quæ quidem Ellipsis erit, si B A S sit Circulus; si verò B A S Ellipsis sit, erit $\beta \alpha \sigma$ vel alia Ellipseos species, vel etiam Circulus. Et similiter, quæcunque fuerit curva B A S; pro eâ substituenda erit correspondens $\beta \alpha \sigma$, prout cujusque curvæ ratio postulaverit.

Q. Quæ autem, de Ungulis, aliisve figuris in Recti Cylindri seu Solidi Columnaris superficie, ad Basis Perimetrum B A S exigendis, dicta sunt: Eadem omnia, in Scalenis, ad Perimetrum Sectionis rectæ $\beta \alpha \sigma$ accommodanda erunt. Quippe Solidum illud, (sive Cylindrus sit, sive aliud quodvis Solidum Columnare,) quod ad Basin B A S Scalenum est, idem ad basin $\beta \alpha \sigma$ Rectum erit.

PROP.

PROP. XXIV.

Figuræ cujusvis in Superficie Sphæræ, Planorum quorumvis cum Sphærica superficie sectionibus, (hoc est circulorum quorumvis sive maximorum sive minorum arcubus) terminatæ; Magnitudo datur. A.F.

Nempe; Superficies sphæræ integra, æquatur quatuor circulis maximis. B.

Segmenti cujusvis, Plano abscissi, (aut etiam Zonæ cujusvis Parallelis Planis interjectæ,) superficies, eam rationem habet ad totam Sphæræ superficiem, quam habet intercepta Axis portio ad Axem totum. B.

Cuneus superficialis, seu portio superficiei curvæ duobus planis in Axe coeuntibus interjecta, sive totius Sphæricæ superficiei, sive Segmenti superficialis, sive Zonæ; superficiem habet in ea ratione ad integram illius sive Sphæræ, sive Segmenti, sive Zonæ superficiem, quam habet Angulus inclinationis planorum illorum (vel arcuum plana illa jungentium,) ad quatuor rectos. C.

Triangulum sphæricum, (arcubus circulorum maximorum terminatum,) eam rationem habet ad circulum in sphæra maximum; quam habet excessus aggregati omnium angulorum supra duos rectos, ad duos rectos. Seu (quod tantundem valet) æquatur facto ex Radio in Arcum circuli maximi, qui isti angulorum excessui subtendit, ducto. D.

Trilinea circulorum minorum arcubus terminata (vel partim his, partim arcubus maximorum,) à Triangulis Sphæricis modò dictis, differunt Bilineis notæ magnitudinis. E.

Adeoque

F. Adeoque, Figuræ cujusvis, in superficie sphærica, planorum sectionibus, vel circulorum quorumvis arcubus, terminata, (utpote quæ in expositarum figurarum aliquas semper resolvi possit;) Magnitudo datur.

A. Posset quidem hæc Propositio, non tantum de Magnitudine, sed & de Centro gravitatis, istiusmodi Figuræ, ex præcedente deduci: Cùm possit omnis istiusmodi in Sphæricâ superficie figura, in Trilinea Rectangula resolvi; quæ in Cylindri recti superficiales Ungulas expandi poterunt: Quarum quidem tum Magnitudines, tum Centra gravitatis, (per præcedentem,) haberi poterunt; atque inde ad Trilinea Sphærica transferri, ope prop. 14. hujus.

Verùm cum ita calculus futurus sit perplexior quàm ut illum jam aggredi libeat, (propter varias se mutuò decussantes Sphæræ diametros ad quas exigenda essent ea Trilinea Sphærica, eorúmque partes:) libet aliâ methodo Figurarum illarum Magnitudines exhibere.

B. Superficiei Sphæricæ *Segmentum*, (Plano abscissum;) vel etiam
Fig. 191. *Superficialis Zona* Sphærica, (duobus Planis Parallelis interjecta;) eam habet rationem ad totam Sphæræ Superficiem (hoc est, ad quatuor Circulos Maximos;) quam habet Axis portio, Plano seu Planis illis terminata, ad Axem totum. Puta, quanta pars est A V, vel V C, totius Axis A α; eadem pars est totius Superficiei Sphæricæ, Segmentum A B β, vel B β δ D Zona; & sic ubique. Per § H, I. prop. 13. hujus.

C. Curva Superficies *Cunei Sphærici*, aut etiam *Cunei Segmenti Sphærici*, *Zonæve*, arcubus duorum circulorum in Axe coeuntium interjecti; eam habet ad totam Sphæræ, vel totam illius Segmenti, aut Zonæ superficiem, quam habet Angulus inclinationis illorum Circulorum, ad quatuor Rectos. Quippe si intelligatur A B D α Semiperipheria, circa axem A α conversa, superficiem sphæricam describere: quam partem totius conversionis absolvit A B α, in situm A b α delata; eadem erit tum angulus B A b, quatuor rectorum; tum, integræ Peripheriæ sui circuli, arcus B b puncto B descriptus; suíque, arcus D d descriptus puncto D; & sic ubique: adeoque eadem pars erit, Bilineum A D α d A, totius Superficiei Sphæricæ; & A B b, segmenti B β A; & B b d D, Zonæ B β δ D: & sic ubique. Per § G. prop. 13. hujus.

Puta; Quam habet rationem Arcus B b, vel D d, ad suas respectivè Peri-

Peripherias integras Bβ, vel Dδ; aut angulus B A b vel D A d ad quatuor rectos: eam habet rationem *Sphærici Cunei Superficies* A B α b A, ad totius *Sphæræ* superficiem; *Cuneique Segmenti sphærici superficies* A B b A, vel α B b α, ad respectivi *Segmenti sphærici* superficiem A B β, vel α B β; *Cuneique Zonæ Sphæricæ superficies* B b d D, ad totius *Zonæ* superficiem B β δ D. Et sic ubique.

Exponatur jam, in superficie Sphæricâ, Triangulum Sphæricum A B D, circulorum Maximorum arcubus comprehensum. Qui quidem arcus continuati, intelligantur circulos integros absolvere. Hi Circuli cùm sint in Sphæra maximi; se mutuò bisecabunt bini quilibet. Et, propter æquales angulos tum qui sunt oppositi verticales, tum qui sunt in eodem Bilineo oppositi, (puta A $=$ α, & $\alpha = \alpha$, & sic ubique;) æqualia invicem erunt quæ sunt in contrariis Hemisphæriis Bilinea, (eorundem Circulorum contrariis Semicirculis interjecta;) puta $\alpha\alpha$, & (quod, in Schemate disruptum est & replicatum, sed in Sphærâ continuari intelligendum est,) A A; & similiter B B, & $\beta\beta$; item D D, & $\delta\delta$. Sed &, eâdem ratione, Opposita Triangula A B D, $\alpha\beta\delta$, (propter Latera lateribus, & Angulos angulis, respective sumptis, æqualia,) erunt invicem æqualia. (Quæ est etiam *Samuelis Fosteri* nostratis demonstratio, in Collegio *Greshamensi Londini* Astronomiæ non ita pridem Professoris.) D. Fig. 192.

Si autem, ex semisuperficie Sphærica T υ T υ T $= RP$, (hoc est, facto ex Radio in Peripheriam ducto) auferatur A B D triangulum; Residuum (RP — A B D) complebunt Triangula $\alpha\tau$ V (hoc est, $\alpha\alpha - \alpha\beta\delta$; hoc est, A A — A B D;) & B$\epsilon\tau$, (hoc est, B B — A B D;) & D E V, (hoc est, D D — A B D.) Hoc est, Bilinea A A + B B + D D, — 3 A B D, $= RP$ — A B D. Hoc est, (transponendo) A A + B B + D D — RP $=$ 2 A B D. Adeoque, quam habet rationem, excessus Bilineorum A A + B B + D D supra RP, ad RP Semi-superficiem sphæricam; hoc est, quam habet rationem, Excessus angulorum A + B + D supra duos rectos, ad duos rectos; seu Excessus arcuum (angulis illis competentium) supra semiperipheriam, ad semiperipheriam; eam habet 2 A B D duplum Trianguli, ad eandem RP Semi-superficiem sphæricam, seu duos circulos maximos; ipsúmque A B D Triangulum, ad $\frac{1}{2}RP$ circulum in sphæra maximum.

Hoc est, invertendo (posito a pro aggregato arcuum, in circulo maximo, angulis A, B, D, competentium;) ut Semiperipheria $\frac{1}{2}P$, ad $a - \frac{1}{2}P$; sic Circulus in Sphæra maximus $\frac{1}{2}R\mathcal{P}$, ad ($aR - \frac{1}{2}RP$) triangulum sphæricum A B D. Quod itaque æquatur facto ex

Radio *R*, in arcum $a - \frac{1}{2}P$, qui convenit Excessui angulorum A+B +D supra duos rectos.

E. Fig. 193. Esto demum Trilineum expositum ABD, cujus latera DLA, DKB, sint arcus circulorum minorum EDA, GDBH; (latusque BA, arcus circuli maximi.) Inveniatur circuli EDA, polus P; & circuli GDBH, polus A. Transeátque per A, D, circulus maximus ADα; & per D, B, maximus FDBφ; item per P, D, maximus PDπ.

Habetur itaque (per § B, C,) magnitudo tum integri Segmenti Superficialis PEDA, tum hujus Cunei seu portionis PDLA: Et (per § D.) Magnitudo Trianguli Sphærici PDMA (arcubus maximorum circulorum terminati:) Adeoque & (horum differentiæ) Bilinei DA magnitudo.

Similiter, (per § B, C,) habetur magnitudo tum integri segmenti AGDBH, tum hujus portionis AMDKB: Et (per § D.) Trianguli Sphærici AMDIB: Ergo & (horum differentia) magnitudo Bilinei DB.

(Et similiter faciendum esset, ad latus BA, si fuisset arcus circuli minoris: Cum verò sit latus illud, arcus Circuli maximi, id minime opus erit.)

Habetur autem, ut modò dictum est, (per § D.) Magnitudo Trianguli Sphærici (arcubus maximorum circulorum comprehensi) AMDIB: Unde si auferatur Bilineum jam inventum DA, atque addatur Bilineum DB; habetur magnitudo Trilinei expositi ABKDLA: cujus latera (saltem aliqua) sunt arcus minorum circulorum.

Atque, ad eandem formam, Triangulo Sphærico, additis ablatisve, ut res postulaverit, Bilineis uno vel pluribus; habebitur area Trilinei cujusvis utut minorum circulorum arcubus comprehensi.

F. Denique; Cum nulla possit exponi Figura, in superficie sphærica, Planorum sectionibus (hoc est, circulis sive maximis sive minoribus) terminata; quæ in hujusmodi jam traditas figuras non possit resolvi: Datur istiusmodi figuræ cujusvis magnitudo. Quod erat ostendendum.

PROP.

PROP. XXV.

Segmenta Sphæræ, utcunque Planis truncatæ; Magnitudinem datam habent.

HUjusmodi enim Sphæræ Segmenta quælibet, terminantur, partim portione residua Superficiei Sphæricæ, partim planis truncantibus.

Intelligatur autem (ut ad prop. 16. hujus) ea quæ restat superficiei sphæricæ portio, (cujus magnitudo data est, per prop. præced.) in particulas quantumlibet minutas distribui, totam complentes; quibus insistere intelligantur totidem pyramides exiguæ, communem verticem habentes Sphæræ Centrum; & communem altitudinem, Sphæræ Radium. Adeóque, Radii Triens, in curvam illam superficiem ductus, (utpote Basium illarum aggregatum,) exhibebit, Pyramidum sive Sectorum Sphæricorum illorum, portioni curvæ insistentium, Aggregatum.

Plana vero, quæ, unà cum hac curvâ superficie, totam complent, sunt etiam notæ magnitudinis: Utpote quæ sunt vel Figuræ Rectilineæ, vel saltem Circulorum portiones, quarum Magnitudo habetur, per prop. 15. hujus. Harúmque item (utpote positione datarum) dantur Distantiæ à Centro Sphæræ; Quarum quidem trientes, in sua respectivè Plana ducti, exhibent Pyramidum magnitudines, Planis illis insistentium, & communem verticem habentium Centrum Sphæræ.

Quæ quidem Pyramides, additæ vel subductæ (prout res tulerit) Aggregato illi Pyramidum superficiei curvæ insistentium, jam invento; exhibent Expositi Segmenti magnitudinem.

Datur igitur istiusmodi cujusvis segmenti sphæræ, planis utcunque truncatæ, Magnitudo. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

UT verò Propositionis hujus, & simul præcedentis, Praxis, Exemplo aliquo illustrata, facilior reddatur: Libet hîc subjungere, Problematis Solutionem, quod ante aliquot annos mihi solvendam

proposuit Vir ingeniosus, & rerum Mathematicarum peritus, D. *Joh. Collins*, (Augusti. 12° 1665.) tanquam rem maxime desideratam; & quotidiani usûs, in mensurandis vasis vinariis & cervisiariis, partim depletis.

Cujus ego Problematis Solutionem, ejúsque Demonstrationem, eodem statim die, summatim ei exhibui; (&, quantum scio, omnium primus absolvi) ad hunc sensum. Nempe,

"Redigendum esse expositum Dolii vel Sphæroideos truncati Fru-"stum, ad inscriptæ Sphæræ Frustum correspondens; ad quod, Fru-"stum illud Sphæroideos eam habebit rationem, quam habet Sphæroi-"deos Axis, ad Diametrum Sphæræ; propter Plana Sphæroideos "parallelis Sphæræ Planis correspondentibus æqualia, sed ab invicem "eâ ratione longius remota, quam habet Axis Sphæroideos ad Axem "Sphæræ.

"Illud autem Sphæræ Frustum, considerandum esse tanquam ex Py-"ramidibus conflatum, communem verticem habentibus Centrum "Sphæræ; basésque in Frusti Superficie continuas, ipsam complentes.

"Quorum quidem quæ Bases Planas habent, facilè exhiberi posse; "cum plana illa alia non sint quàm Circulorum portiones, notis me-"thodis exhibendæ; eárumque à Centro distantiæ (altitudinem deter-"minantes) facile exquirantur.

"Quod autem ad eas innumeras attinet, quarum exiguæ bases su-"perficiem curvam complent: cùm basium aggregatum sit ea ipsa "superficies curva; & communis omnium Altitudo, Radius sphæræ; "id unum superesse posse difficultatis, ut exhibeatur illa Superficies "curva.

"Id autem quicquid sic difficultatis, à me jam olim explicatum esse "in subjunctis ad Calcem mei *de Cycloide* Tractatûs, pag. 122. (sed quæ "inserenda fuerant pag. 23. § 68.) ubi docetur, *Figuram quamlibet,* "*in Superficie Sphæræ, Circulorum quorumvis (sive maximorum sive* "*minorum) arcubus terminatam, Quadrare.*

"Adeóque Rem totam, inter Desiderata, non esse censendam; ut "quam ego jam tum ante plures annos absolveram, & scripto edito "(anno 1659.) vulgaveram.

Quod ipsum paucis pòst diebus, latiùs aliquantò explicatum, ad illum etiam misi, hac fere quæ sequitur verborum formâ.

PROP. XXVI. Fig. 194.

Sit Dolium Σσpσ ΣP, (Sphæroideos PβPβ Frustum, parallelis circulis æqualibus Σσ, Σσ, abscissum,) situ Horizontali positum. Dataque sint; tum Circuli Medii Pp, Semidiameter CP; tum Extremorum Σσ, Semidiameter ∂Σ; Vasisque Longitudo ∂∂, (cujus Semissis C∂:) Summique Liquoris ΦKΦ, Altitudo, supra infráve C centrum, CK; quæ minor sit quam ∂Σ. Quæritur, Liquoris contenti quantitas; seu Segmenti Majoris ΦσPσΦ, Minorísve ΦΣPΣΦ, Magnitudo.

SPhæroidi Pβpβ, inscripta intelligatur Sphæra PBpB: quam secent Circuli Ss, Ss, ipsis Σσ, Σσ, æquales & paralleli; Planúmque ΦKΦ Horizontale, exhibens in Sphæra Circulum LFL, Ellipsi λΦλ in Sphæroide respondentem. Eritque Sphæræ Portio FspsF, expositæ Sphæroideos Portioni ΦσPσΦ correspondens.

Estque hæc Sphæræ Portio; idem atque Semisegmentum DspsD (quod Semi-dolio respondet, estque magnitudinis notis methodis investigabilis; & speciatim per prop. præced. vel prop. 16. hujus.) Additâ, Demptâve, (prout FKF supra infrave Centrum fuerit,) Segmenti Portione FFDD; planis FF, DD, FD, FD, interjectâ; quam portionem investigare, est potissima totius negotii difficultas.

(Quò autem multiplices Solidi sectiones, in plano utcunque exhibitæ, meliùs percipiantur: Rem eam pluribus figuris explicare visum est: Quarum fig. 194. exhibet Sphæram Sphæroidi inscriptam, simplicissima projectione. Fig. 195. exhibet Sphæram, figuræ præcedenti exemptam, atque aliter projectam, quò partes ejus detegantur: Et fig. 196. ejusdem Octantem (planis quadrantalibus PCc, PCB, cCB, toti exsectum,) quò minor sit linearum confusio. Item duos circulos Ss, fig. 194. hoc est SfdsdfS, fig. 195. seorsum exhibet

Fig. 194, 195, 196, 197, 198.

Fig. 194, 195, 196, 197, 198. hibet figura 197. Circulumque LFKFL fig. 194. hoc est, Lfkf Lfk f L fig. 195. seorsum exhibet figura 198.)

Constat autem ea Portio FFDD, (potissimum investiganda,) ex Quinque Solidis Pyramidalibus, Conicisve: Quorum communis Vertex, est C Centrum: Basésque, ipsæ Portionis Superficies FD, FD, FF, planæ; duæque Curvæ DFFD, DFFD, fig. 194. (seu potiùs dffd, dffd, fig. 195.) Planis illis, planoque DD, terminatæ: Altitudinésque, Superficierum illarum à Centro Distantiæ.

Quantæque sint illæ Superficies Curvæ DFKFD, fig. 194. seu potius dfkfd, fig. 195. (quæ sola superest difficultas; reliqua siquidem, notis methodis, facilè investigantur;) invenire docui, in subjunctis meo, *De Cycloide*, Tractatui, pag. 122. atque hic in prop. 24. hujus.

Nempe; Si intelligatur (fig. 195, 196.) fgf, arcus Circuli Maximi, ipsi fkf arcui Minoris Circuli conterminus; & compleatur Pfgf Triangulum Sphæricum: Hujus Trianguli Sphærici Pfgf magnitudo innotescit; utpote tum alibi tradita, tum hic ad § D. prop. 24. hujus. Atque innotescit Trilinei Pfkf magnitudo, ex cognito angulo fPf, seu ratione arcûs fkf ad peripheriam sui circuli: (per § B, C, prop. 24. hujus.) Adeóque & magnitudo Bilinei fkfgf, illorum differentia. Sed &, ex cognito Angulo gBd, seu Arcûs fd ratione ad Peripheriam sui circuli, similiter innotescit magnitudo Quadrilinei Sphærici dfgfd. Ergo & (dempto Bilineo) Quadrilinei dfkfd magnitudo.

Denique; Ex magnitudine Portionis Segmenti Sphærici sic inventâ; Habetur etiam Portionis Segmenti Sphæroideos correspondentis Magnitudo. Est utique hæc ad illam, ut Sphæroides ad inscriptam Sphæram; (sive ut Axium Major ad Minorem:) propter Plana Planis respectivè sumptis æqualia, & ad Axes in eâ ratione constitutos ordinatim-posita. Quæ est totius Problematis constructio.

Calculus huic Constructioni respondens.

1. Data Circuli, in Sphæroide Medii, Semidiameter; seu Radius inscriptæ Sphæræ; CP = CB = Cs = CS = Cf; dicatur *R*: Ejúsque Peripheriæ Quadrans, *Q*; quæ sit & Anguli Recti mensura.

2. Data Circulorum, in Sphæroideos frusto, Extremorum, (fig. 197. seorsum etiam exhibitorum) Semidiameter $\delta\Sigma$ = DS = Dd;

dicatur

dicatur $a R$. (Facto ſcilicet, ut C P, ad D S; ſic 1 ad a. Et ſic Fig. 194,
alibi.) Eſtque, Sinus Rectus arcûs B S = B f. 195,

3. Hujus Co-ſinus, ſeu Sinus Complementi; hoc eſt, Sinus Arcûs 196,
S P = f g; eſt H S = C D = K F = $\surd : R^2 - a^2 R^2 : = R \surd : 1 - a^2$. 197.
Qui dicatur (brevitatis gratia) αR.

4. Ut B B ad S S, ſeu C B ad H S; hoc eſt, ut R ad αR, ſeu 1 ad $\alpha = \surd : 1 - a^2$: Sic eſt integra Sphæræ Superficies, ſeu Quatuor Circuli maximi, $8 R Q$; ad ſuperficiem Zonæ S s s S, $= 8 \alpha R Q$.

5. Hæc Superficies, ducta in $\frac{1}{3} R$; exhibet magnitudinem Zonæ Solidæ, (intellige, Segmenti S D s s D S, exemptis duobus Conis, S C s, S C s,) S C s p s C S P $= \frac{8}{3} \alpha R^2 Q$.

6. Ut Quadratum Radii C P; ad Quadratum Radii D S; hoc eſt, ut R^2 ad $a^2 R^2$, ſeu ut 1 ad a^2: Sic eſt Circulus Maximus $2 R Q$, ad Circulum S D s $= 2 a^2 R Q$.

7. Circulus hic S D s, ductus in $\frac{1}{3}$ C D $= \frac{1}{3} \alpha R$; exhibet Magnitudinem Coni S C s D, $= \frac{2}{3} \alpha a^2 R^2 Q$.

8. Hujuſmodi Coni duo, una cum Zonâ Solidâ (§ 5. inventâ,) exhibent Segmentum Solidum S D s s D S, $= \frac{8}{3} \alpha R^2 Q + \frac{4}{3} \alpha a^2 R^2 Q$. Adeoque Semiſolidum D s s D, $= \frac{4}{3} \alpha R^2 Q + \frac{2}{3} \alpha a^2 R^2 Q$.

9. Data ſummi Liquoris F K F, ſupra infráve Centrum, Altitudo C K = D F, dicatur $b R$. Eſtque, Sinus Rectus arcûs B L.

10. Hujuſque Co-ſinus, ſeu Sinus Arcûs L P = f P; eſt K L = K k $= \surd : R^2 - b^2 R^2 : = R \surd : 1 - b^2$. Qui dicatur (brevitatis ergô) βR.

11. Ut K L $= \beta R$, ad R; ſeu ut $\surd : 1 - b^2$: ad 1: Sic eſt recta K F $= \alpha R$, ad $\frac{\alpha}{\beta} R = R \surd \frac{1 - a^2}{1 - b^2}$; ſinum arcus f k in ſuo circulo, ſive Anguli f K k = f P k = f P g; Qui (per Canonem Sinuum inveniendus) dicatur $c Q$.

12. Hujuſque Co-ſinus ſeu ſinus Arcûs f L in ſuo circulo, ſeu Anguli f K L = f P L; eſt $\surd : R^2 - \frac{\alpha^2}{\beta^2} R^2 : = R \surd \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta^2} = \frac{R}{\beta} \surd : \beta^2 - \alpha^2 : = \frac{R}{\beta} \surd : a^2 - b^2$.

13. Ut D S $= a R$, ad R; ſeu ut a ad 1: Sic D F $= b R$, ad $\frac{b}{a} R$, Sinum Arcus f d in ſuo Circulo, ſeu Anguli f D d = g B d. Qui (per Canonem Sinuum inveniendus) dicatur $d Q$. 14. Ut

Fig. 194, 195, 196. 14. Ut tota Peripheria, seu Quatuor Recti, $4\,Q$; ad Arcum seu Angulum $d\,Q$; sive ut 4 ad d: Sic est Zonæ totius SssS superficies, $8\,a\,R\,Q$; ad Quadrilineum Sphæricum dfgfd, $=2\,d\,a\,R\,Q$.

15. Ut $Pp=2\,R$, ad $PK=CP-CK=R-b\,R$; sive ut 2, ad $1-b$: Sic integra Sphæræ superficies, $8\,R\,Q$; ad segmenti PLKLP superficiem, $=4RQ-4bRQ$.

16. Ut tota Peripheria, seu quatuor Recti, $4\,Q$; ad Angulum $fPf=2\,fPg=2\,c\,Q$; sive ut 2 ad c: Sic Segmenti PLKLP superficies, $4\,R\,Q-4\,b\,R\,Q$; ad Trilineum Sphæricum PfkfP, $=2\,c\,R\,Q-2\,b\,c\,R\,Q$.

17. In Triangulo Sphærico Rectangulo fgP; Ut Co-sinus arcûs fg, seu arcus Bf Sinus $a\,R$; ad Co-sinum Anguli fPg, seu Anguli fPL Sinum, $\frac{R}{\beta}\sqrt{:a^2-b^2}$: Sive ut $a\beta$ ad $\sqrt{:a^2-b^2}$: Sic Radius, ad $\frac{\sqrt{:a^2-b^2:}}{a\beta}R$ Sinum Anguli Pfg. (Nempe per doctrinam Trigonometricam.) Qui (per Canonem Sinuum inveniendus) dicatur $e\,Q$.

18. Ut duo Anguli Recti, $2\,Q$; ad Trium Angulorum, Trianguli sphærici Pfgf, excessum supra Duos rectos, $2\,c\,Q+2\,e\,Q-2\,Q$: Hoc est, ut 1 ad $c+e-1$: Sic est Circulus in Sphærâ Maximus, $2\,R\,Q$; ad istius Trianguli Sphærici Pfgf Magnitudinem, $2\,c\,R\,Q+2\,e\,R\,Q-2\,R\,Q$.

19. Triangulum hoc, Pfgf, ex Trilineo Pfkf (invento § 16.) exemptum, relinquit Bilineum $fkfgf=2\,R\,Q-2\,e\,R\,Q-2\,b\,c\,R\,Q$.

20. Atque hoc Bilineum, ex Quadrilineo dfgfd (invento § 14.) exemptum, relinquit Quadrilineum dfkfd, $=2\,a\,d\,R\,Q+2bcRQ+2\,e\,R\,Q-2\,R\,Q$.

21. Atque hoc Quadrilineum, in $\frac{1}{3}R$ ductum; exhibet Sectorem Sphæricum Cdtkfd, $=\frac{2}{3}a\,d\,R^2Q+\frac{2}{3}b\,c\,R^2Q+\frac{2}{3}e\,R^2Q-\frac{2}{3}R^2Q$.

22. Ut $CP=R$, ad $Kk=KL=\beta\,R$; (fig. 195, 198.) sive ut 1 ad β: Sic Anguli fKk arcus $c\,Q$, ad longitudinem arcus fk, $=\beta\,c\,Q$: Et sic Anguli $fKF=fKL$ Sinus, $\frac{R}{\beta}\sqrt{:a^2-b^2}$: ad rectam fF, $=R\sqrt{:a^2-b^2}$.

23. Kk $= \beta R$, ducta in fk $= \beta c \mathcal{Q}$; exhibet Sectorem fKf $= \beta^2 c R \mathcal{Q} = c R \mathcal{Q} - b^2 c R \mathcal{Q}$. Atque hic ductus in $\frac{1}{3}$ CK $= \frac{1}{3} b R$, exhibet Coni portionem CfKf $= \frac{1}{3} bc R^2 \mathcal{Q} - \frac{1}{3} b^3 c R^2 \mathcal{Q}$. Fig. 194, 195, 196.

24. KF $= \alpha R$, ducta in fF $= R \sqrt{:a^2 - b^2}$: exhibet Triangulum KfFf $= \alpha R^2 \sqrt{:a^2 - b^2}$. Atque hoc ductum in $\frac{1}{3}$ CK $= \frac{1}{3} b R$, exhibet Pyramidem CKfFf $= \frac{1}{3} \alpha b R^3 \sqrt{:a^2 - b^2}$. Cui (propter CK = DF, KF = CD, adeoque $\frac{1}{3}$ CK × KF × Ff $= \frac{1}{3}$ CD × DF × Ff,) æqualis est Pyramis CDff.

25. Ut CP $= R$, ad DS $= a R$; seu ut 1 ad a: Sic Arcus Anguli fDd $= d \mathcal{Q}$, ad Arcum fd $= a d \mathcal{Q}$. Qui ductus in Dd $=$ DS $= a R$, exhibet binos Sectores, 2 fDd $= a^2 d R \mathcal{Q}$. Qui ducti in $\frac{1}{3}$ CD $= \frac{1}{3} \alpha R$, exhibent binas Coni Portiones, 2 CfDd, $= \frac{1}{3} \alpha a^2 d R^2 \mathcal{Q}$.

26. Additis igitur Binis Sectoribus (§ 21.) 2 Cdfkfd $= \frac{4}{3} \alpha d R^2 \mathcal{Q} + \frac{4}{3} bc R^2 \mathcal{Q} + \frac{4}{3} e R^2 \mathcal{Q} - \frac{4}{3} R^2 \mathcal{Q}$: Atque Binis Coni portionibus (§ 23.) 2 CfKf $= \frac{2}{3} bc R^2 \mathcal{Q} - \frac{2}{3} b^3 c R^2 \mathcal{Q}$; Binísque Pyramidibus (§ 24.) 2 CKff $= \frac{2}{3} \alpha b R^3 \sqrt{:a^2 - b^2}$: (quæ cum binis illis portionibus Coni, complent Solidum Conicum, basis quadrilineæ, CfFfkfFfk:) Binisque Pyramidibus (§ 24.) 2 CDff $= \frac{2}{3} \alpha b R^3 \sqrt{:a^2 - b^2}$; & bis binis Coni portionibus (§ 25.) 4 CfDd $= \frac{2}{3} \alpha a^2 d R^2 \mathcal{Q}$, (quæ cum binis Pyramidibus CDff, complent bina Solida Conica Cddff:) Habetur Segmenti Portio ddddffff, $= \frac{4}{3} \alpha d R^2 \mathcal{Q} + \frac{2}{3} \alpha a^2 d R^2 \mathcal{Q} + 2 bc R^2 \mathcal{Q} - \frac{2}{3} b^3 c R^2 \mathcal{Q} + \frac{4}{3} e R^2 \mathcal{Q} - \frac{4}{3} R^2 \mathcal{Q} + \frac{4}{3} \alpha b K^3 \sqrt{:a^2 - b^2}$.

27. Atque hoc Additum vel Subductum (prout Segmentum Majus, Minusve requiratur) Semisegmento (§ 8.) dsdCdsd $= \frac{4}{3} \alpha R^2 \mathcal{Q} + \frac{2}{3} \alpha a^2 R^2 \mathcal{Q}$: Exhibet Sphæræ Segmentum Majus, Minusve; FspsFK, vel FSPSFK; $= \frac{4}{3} \alpha R^2 \mathcal{Q} + \frac{2}{3} \alpha a^2 R^2 \mathcal{Q} \pm \frac{4}{3} \alpha d R^2 \mathcal{Q} \pm \frac{2}{3} \alpha a^2 d R^2 \mathcal{Q} \pm 2 bc R^2 \mathcal{Q} \mp \frac{2}{3} b^3 c R^2 \mathcal{Q} \pm \frac{4}{3} e R^2 \mathcal{Q} \mp \frac{4}{3} R^2 \mathcal{Q} \pm \frac{4}{3} \alpha b R^3 \sqrt{:a^2 - b^2}$.

28. Denique; Data Vasis Semi-longitudo, seu ratio Cδ, ad CD; hoc est, Ratio Cβ, ad CD; ponatur ut f ad 1. Eritque expositum Sphæroideos Segmentum Majus, Minusve; $\Phi \sigma p \sigma \Phi$, vel $\Phi \Sigma P \Sigma \Phi$; $= \frac{4}{3} f \alpha R^2 \mathcal{Q} + \frac{2}{3} f \alpha a^2 R^2 \mathcal{Q} \pm \frac{4}{3} f \alpha d R^2 \mathcal{Q} \pm \frac{2}{3} f \alpha a^2 d R^2 \mathcal{Q} \pm 2 f bc R^2 \mathcal{Q} \mp \frac{2}{3} f b^3 c R^2 \mathcal{Q} \pm \frac{4}{3} f e R^2 \mathcal{Q} \mp \frac{4}{3} f R^2 \mathcal{Q} \pm \frac{4}{3} f \alpha b R^3 \sqrt{:a^2 - b^2}$. Quod propositum erat inquirendum.

Fig. 194, 195, 196, 197, 198.

Calculi Synopsis.

§ 1. R; Data Semidiameter Major, seu Radius inscriptæ Sphæræ; CP.
§ 2. aR; Data Semidiameter Minor; D S.
§ 9. bR; Data Altitudo supra infrave Centrum; C K.
§ 28. fR; Semi-longitudo Conoideos; Cβ.
§ 3. $\alpha = \surd : 1 - a^2$.
§ 10. $\beta = \surd : 1 - b^2$.
§ 1. Q; Angulus Rectus; vel Quadrans Peripheriæ Circuli Maximi.

§ 11. cQ, § 13. dQ, § 17. eQ } Anguli, vel Arcus Circuli maximi, respondentes Sinibus rectis { $\frac{\alpha}{\beta} R$. $\frac{b}{a} R$. $\frac{\surd : a^2 - b^2 :}{\alpha\beta} R$.

$+ \frac{8}{3} R^2 Q$; Sphæra integra, B p B P.
$+ \frac{4}{3} R^2 Q$; Hemisphærium, B B P.

$+ \frac{4}{3} b R^2 Q$; Zona Solida BLCLB,
$+ \frac{2}{3} b \beta^2 R^2 Q$; Conus L C L K, } Segmentum B L L B.

$+ \frac{4}{3} a R^2 Q$; Zona Solida BSCSB,
$+ \frac{2}{3} a \alpha^2 R^2 Q$; Conus S C S H, } Segmentum B S S B.

§ 5. $+ \frac{4}{3} \alpha R^2 Q$, Semizona solida SCSP,
§ 7. $+ \frac{2}{3} \alpha a^2 R^2 Q$, duo Semiconi 2 D C S, } § 8. Semisegmentum SDDSP

§ 14. $+ \frac{4}{3} \alpha d R^2 Q$,
§ 19. $+ \frac{4}{3} e R^2 Q$,
§ 19. $- \frac{4}{3} R^2 Q$,
§ 19. $+ \frac{4}{3} bc R^2 Q$, } § 20. 21. duo Sectores 2FFCDD, seu potius 2 C f k f d d,

§ 23. $+ \frac{2}{3} bc R^2 Q$,
§ 23. $- \frac{2}{3} b^3 c R^2 Q$, } duæ portiones Coni, 2CKfkf,
§ 24. $+ \frac{2}{3} \alpha b R^3 \surd : a^2 - b^2 :$ duæ Pyramides, 2 C K f F f, } § 26. Pyram. FCF

§ 24. $+ \frac{2}{3} \alpha b R^3 \surd : a^2 - b^2 :$ duæ Pyramides, 2 CDfFf,
§ 25. $+ \frac{2}{3} \alpha a^2 d R^2 Q$, bis binæ Portiones Coni, 2 CDfd, } § 26. 2 Pyram. F C D

} § 26. Intersegmentum D FF D.

Semisegmentum $+$ vel $-$ Intersegmentum } § 27. F s p s F, major vel F S P S F, minor } Portio.

§ 28. Hæc ducta in f; sunt Homologæ partes Conoideos.

Exemplum

Exemplum Calculi.

Posito $R = 1$. Circulus Maximus, $2RQ = 3.1415926\frac{1}{2}$ Fig. 194, 195.
Erit $Q = 1.5707963\frac{1}{4}$ Superficies Sphæræ, $8RQ = 12.5663706$
$\frac{1}{3}Q = 0.5235987\frac{1}{4}$ Superf. Hemisphærii, $4RQ = 6.2831853$
Sphæra integra, B p B P, $\frac{8}{3}R^2Q$, $= 4.1887902$
Hemisphærium, B B P, $\frac{4}{3}R^2Q$, $= 2.0943951$

Casus I.

$a = 0.75$ $a^2 = 0.5625$ $\alpha^2 = 1 - a^2 = 0.4375$ $\alpha = 0.6614378\frac{1}{4}$
$b = 0.5$ $b^2 = 0.25$ $\beta^2 = 1 - b^2 = 0.75$ $\beta = 0.8660254+$
$a^2 - b^2 = \beta^2 - \alpha^2 = 0.3125$ $\sqrt{:a^2 - b^2:} = 0.5590169+$
$4 + 2a^2 = 5.125$ $4\alpha + 2a^2\alpha = 3.3898688\frac{1}{2}$

Segmentum SspCP, vel semisegmentum SDDSP,
$\frac{4+2a^2}{3}\alpha R^2Q$ $= 1.7749312-$
Segmentum integrum S s p s S P, (istius duplum,) $= 3.5498624-$
Segmentum S s B, vel 2 SDB, (= BBP — SDDSP,) $= 0.3194639+$
Semisegmentum S D B, (istius semissis,) $= 0.1597319\frac{1}{2}$
$4 + 2\alpha^2 = 4.875$ $4a + 2\alpha^2 a = 3.65625$
Segmentum B S S B, $\frac{4+2\alpha^2}{3} a R^2 Q$, $= 1.9144080+$
Segmentum S S P, (= B B P — B S S B,) $= 0.1799871-$
Segmentum D S S D, (= S D D S P — S S P
= B S S B — 2 S D B,) $= 1.5949441-$
$4 + 2\beta^2 = 5.5$ $4b + 2\beta^2 b = 2.75$
Segmentum B L L B, $\frac{4+2\beta^2}{3} b R^2 Q$, $= 1.4398966\frac{1}{2}$
Segmentum L L P, (= B B P — B L L B,) $= 0.6544984\frac{1}{2}$
Segmentum L S S L, (= B S S B — B L L B,) $= 0.4745113\frac{1}{2}$

$\frac{\alpha}{\beta}R = 0.7637626\frac{1}{6}$ Sin. An. gr. 49. 47′, 8225. $= \frac{0.5533005}{1.0000000}Q = cQ.$

$\frac{b}{a}R = 0.6666666\frac{2}{3}$ Sin. An. gr. 41. 48′, 6186. $= \frac{0.4645590}{1.0000000}Q = dQ.$

$a\beta = 0.6495190\frac{1}{2}$

$\frac{\sqrt{:a^2 - b^2:}}{a\beta} R = 0.8606628\frac{1}{3}$ Sin. Ang. gr. 59. 23′, 4658

$= \frac{0.6599010}{1.0000000}Q = eQ.$

Fig. 194. 195. $c = 0.5533005$ $d = 0.4645590$ $e = 0.6599010$

(Verùm hic, adeoque in iis quæ hinc dependent, ultima nota, fortaſſis & penultima, ſunt in ambiguo; eò quòd Canon Sinuum ad tantam ἀκρίβειαν vix patitur pervenire.)

$6b - 2b^3 = 2.75$ $6bc - 2b^3c = 1.5215764$ $4e = 2.6396040$

$$\left.\begin{array}{lr} + \frac{6 - 2b^2}{3} bc R^2 Q = & 0.7066955 \\ + \frac{4 + 2a^2}{3} ad R^2 Q = & 0.8245649 \\ + \frac{4}{3} e R^2 Q = & 1.3820935 \\ - \frac{4}{3} R^2 Q = & -2.0943951 \\ + \frac{4}{3} ab R^3 \sqrt{:a^2 - b^2} = & 0.2465033 \end{array}\right\}$$

= Interſegment. DFFD, = 1.1554621. ſaltem 1.15546 proxime.

Fruſti Sphærici Portio { Major, FspsF, (= SDDSP + DFFD) = 2.9303933
{ Minor, FSPSF, (= SDDSP − DFFD,) = 0.6194691

Abſciſſa 2 LFDB, (= BLLB − DFFD,) = 0.2844345½

LFDB = 0.1422173 −

2 SFL, (= LLP − FSPSF = 2 EDB − 2 LFDB,) = 0.0350293½

SFL = 0.0175147 −

Casus II.

$a = 0.8$ $a^2 = 0.64$ $\alpha^2 = 1 - a^2 = 0.36$ $\alpha = 0.6$

$b = 0.6$ $b^2 = 0.36$ $\beta^2 = 1 - b^2 = 0.64$ $\beta = 0.8$

$a^2 - b^2 = \beta^2 - \alpha^2 = 0.28$ $\sqrt{:a^2 - b^2:} = 0.5291502\tfrac{1}{2} +$

$4 + 2a^2 = 5.28$ $4\alpha + 2a^2\alpha = 3.168$

$$SDDSP = \frac{4 + 2a^2}{3} \alpha R^2 Q = 1.6587609 +$$

SspsSP (= 2 SDDSP) = 3.3175218 +

SsB = 2 SDB (= BBP − SDDSP) = 0.4356342 −

SDB = 0.2178171 −

$4 + 2\alpha^2 = 4.72$ $4a + 2\alpha^2 a = 3.776$

$$BSSB = \frac{4 + 2\alpha^2}{3} a R^2 Q = 1.9771090 +$$

SSP (= BBP − BSSB) = 0.1172861 +

DSSD (= SDDSP − SSP = BSSB − 2 SDB) = 1.5414748

$4 + 2\beta^2 = 5.28$ $4b + 2\beta^2 b = 3.168.$

$$BLLB = \frac{4 + 2\beta^2}{3} b R^2 Q = 1.6587609 +$$

LLP (= BBP − BLLB) = 0.4356342 −

LSSL (= BSSB − BLLB) = 0.3183481 −

$\frac{\alpha}{\beta}R = 0.75$ Sinus Ang.gr.48.35′,4229 $= \frac{0.5398931}{1.0000000} Q = c\,Q.$ Fig. 194,

$\frac{b}{a}R = 0.75$ Sinus Ang.gr.48.35′,4229 $= \frac{0.5398931}{1.0000000} Q = d\,Q.$ 195,

$a\beta = 0.64$ 196,

$\frac{\sqrt{:a^2 - b^2:}}{a\beta}R = 0.8267973$ — Sinus Ang. gr. 55. 46′, 2682 197,

$= \frac{0.6196793}{1.0000000} Q = e\,Q.$ 198.

$c = 0.5398931$ $d = 0.5398931$ $e = 0.6196793$

$6b - 2b^3 = 3.168$ $6bc - 2b^3c = 1.7103814$ $4e = 2.4787172$

$+\frac{6 - 2b^2}{3} bc R^2 Q = 0.8955536$

$+\frac{4 + 2a^2}{3} ad R^2 Q = 0.8955536$

$+\frac{4}{3} e R^2 Q = 1.2978533$

$-\frac{4}{3} R^2 Q = -2.0943951$

$+\frac{4}{3} \alpha b R^3 \sqrt{:a^2 - b^2:} = 0.2539921$

} = Interſegment. DFFD, = 1.2485575 . ſaltem 1.24856 proxime.

Fruſti Sphæ-rici, Portio { Major, FspsF, (= SDDSP + DFFD) = 2.9073184
{ Minor, FSPSF, (= SDDSP — DFFD,) = 0.4102034

2LFDB (= BLLB — DFFD) = 0.4102034

LFDB = 0.2051017

2SFL (= LLP — FSPSF = 2SDB — 2LFDB) = 0.0254308

SFL = 00.127154

Atque ad eandem formam procedendum erit in aliis caſibus quibuſcunque prout alii atque alii valores ponuntur datarum magnitudinum *a* & *b*.

Inventis autem (pro caſibus aſſignatis quibuſvis) Portionibus Fruſti Sphærici; habentur correſpondentes portiones Fruſti Sphæroideos, ductis ſingulis in *f*; quæcunque fuerit ea ratio, Axis Sphæroideos ad Diametrum Sphæræ; (ββ ad BB, vel Cβ ad CB = CP, vel Cδ = Kφ ad CD = KF = HS Co-ſinum dati DS, in Circulo Radii CP;) quam appellamus, *f* ad 1.

Fig. 199, 200.

PROP. XXVII.

A.B. Figura Spiralis (lineâ Spirali à principio orsâ, & rectâ conterminâ, terminata) est contermini Sectoris Triens: Toties repetitis omnibus, quoties iteratò describuntur.

C. Sumptisque angulis AMT, AMT, &c. arithmetice proportionalibus; si Figura Spiralis primo conveniens ponatur 1; eadem per duos continuata, erit 8; per tres, 27; per quatuor, 64; & sic deinceps, secundum numeros cubos continuè sequentes.

B. Totáque figura circulationis primæ, est contermini circuli primi Triens; &, duarum circulationum (repetito quod in secundâ iteratò describitur, quod ubique intelligendum est,) ejusdem Circuli primi Octo trientes; Trium Circulationum, ejusdem viginti septem Trientes, (seu totius Noncuplum;) Quatuor Circulationum, ejusdem Sexaginta quatuor Trientes, & sic deinceps.

Et, universaliter, (Posito *R* pro circuli primi Radio; *P*, pro ejusdem peripheria; angulique circulationis quousque libet continuatæ ratione ad quatuor rectos; vel correspondentis arcus circuli Primi, ad integram ejus Peripheriam; ut *a* ad *P*;) Figuræ Spirales sic descriptæ (repetitis toties omnibus quoties describuntur) Magnitudo est $\frac{a^3 R}{6P^2}$.

D. Adeóque, quæ continuis Circulationum angulis æqualibus conveniunt figuræ Spirales, sunt ut numerorum cuborum

rum

rum continuè sequentium 0, 1, 8, 27, 64, 125, &c. Differentiæ; 1, 7, 19, 37, 61, &c.

Et speciatim quod Circulatione Primâ describitur, est contermini Circuli primi Triens; quod secundâ, ejusdem Primi Circuli Septem trientes; quod Tertiâ, ejusdem Trientes Novendecim; quod Quartâ, ejusdem Trientes Triginta-septem; quod Quintâ, ejusdem Trientes Unus & sexaginta. Et sic deinceps.

Figuræ Spiralis (à Principio orsæ) quousque libet continuatæ, toties repetitis omnibus quoties iteratò describuntur: (posito s pro sinu recto anguli circulationis, ad Radium R; & x pro sinu complementi; ipsoque s, pro Semicirculis secundo, quarto, sexto, octavo, cæterisque in locis paribus, per contrarium signum semper exposito, utpote ad contrarias diametri partes posito:) Momentum respectu rectæ PMF, est E.

$$\frac{6aR^5 - 6sR^5 - 6avR^4 - a^3R^3 + 3a^2sR^3 + a^3vR^2}{3P^3};$$

Centrique gravitatis inde distantia,

$$\frac{12aR^4 - 12sR^4 - 12avR^3 - 2a^3R^2 + 6a^2sR^3 + 2a^3vR}{a^3P}:$$

Et quidem vel ad partes E, vel ad partes G, prout signum +, vel —, prævaluerit.

Ejusque Momentum respectu rectæ EMG, H.

$$\frac{6vR^5 + 3a^2R^4 - 6asR^4 - 3a^2vR^3 + a^3sR^2}{3P^3};$$

Centrique gravitatis inde distantia,

$$\frac{12vR^4 + 6a^2R^3 - 12asR^3 - 6a^2vR^2 + 2a^3sR}{a^3P}:$$

Et quidem vel ad partes P, vel ad partes F, prout signum +, vel —, prævaluerit.

Et speciatim, Circulationis Quadrantalis, Unius; Magnitudo, $\frac{1}{384}RP$; Respectu PMF, versus E, Momentum, D. F.

mentum, $\frac{-32R^6 + R^4P^2}{16P^3}$; Diſtantia Centri gravitatis, $\frac{-768R^5 + 24R^3P^2}{P^4}$: Reſpectu EMG,

I. verſus P, Momentum, $\frac{384R^6 - 96R^5P + R^3P^3}{192P^3}$; Diſtantia, $\frac{768R^5 - 192R^4P + 2R^2P^3}{P^4}$.

D. Duarum; Magnitudo, $\frac{8}{384}RP = \frac{1}{48}RP$: Reſpectu

F. PMF, verſus E, Momentum $\frac{-24R^5 + R^3P^2}{24P^2}$; Diſtantia, $\frac{-48R^4 + 2R^2P^2}{P^3}$: Reſpectu EMG,

I. verſus F, Momentum $\frac{-16R^6 + R^4P^2}{4P^3}$; Diſtantia, $\frac{-192R^5 + 12R^3P^2}{P^4}$.

D. Trium; Magnitudo, $\frac{27}{384}RP = \frac{9}{128}RP$: Reſpectu

F. PMF, verſus G, Momentum $\frac{-32R^6 + 9R^4P^2}{16P^3}$; Di-

I. ſtantia, $\frac{-256R^5 + 72R^3P^2}{9P^4}$: Reſpectu EMG, verſus F, Momentum $\frac{-128R^6 - 96R^5P + 9R^3P^3}{64P^3}$; Diſtantia, $\frac{-768R^5 - 576R^4P + 54R^2P^3}{P^4}$.

D. Quatuor; Magnitudo, $\frac{64}{384}RP = \frac{1}{6}RP$: Reſpectu PMF,

F. verſus G, Momentum, $\frac{-6R^5 + R^3P^2}{3P^2}$; Diſtantia,

I. $\frac{-12R^4 + 2R^2P^2}{P^3}$: Reſpectu EMG, verſus P, $\frac{R^4}{P}$; Diſtantia, $\frac{6R^3}{P}$

Quinque;

Quinque; $\frac{125}{384}RP$: Respectu P M F, versus E, D.F.

Momentum, $\frac{-32R^6+25R^4P^2}{16P^3}$; Distantia,

$\frac{-768R^5+600R^3P^2}{125P^4}$: Respectu EMG, versus P, I.

Momentum, $\frac{384R^6-480R^5P+125R^3P^3}{192P^3}$; Distantia,

$\frac{768R^5-960R^4P+250R^2P^3}{P^4}$.

Atque in reliquis similiter.

Adeoque; Secundæ, Magnitudo, $\frac{7}{384}RP$: Respectu PMF, D.F.

versus E, Momentum, $\frac{96R^6-48R^5P-3R^4P^2+2R^3P^3}{48P^3}$;

Distantia, $\frac{768R^5-384R^4P-24R^3P^2+16R^2P^3}{7P^4}$:

Respectu EMG, versus F, momentum, I.

$\frac{-384R^6-96R^5P+48R^4P^2+R^3P^3}{192P^3}$; Distantia,

$\frac{-768R^5-192R^4P+96R^3P^2+2R^2P^3}{7P^4}$.

Tertiæ; Magnitudo, $\frac{19}{384}RP$: Respectu PMF, versus G, D.F.

Momentum, $\frac{-96R^6-48R^5P+27R^4P^2+2R^3P^3}{48P^3}$;

Distantia, $\frac{-768R^5-384R^4P+216R^3P^2+16R^2P^3}{19P^4}$:

Respectu EMG, versus F, Momentum, I.

$\frac{128R^6-96R^5P-16R^4P^2+9R^3P^3}{64P^3}$; Distantia,

$\frac{768R^5-576R^4P-96R^3P^2+54R^2P^3}{19P^4}$.

Quartæ; Magnitudo, $\frac{37}{384}RP$: Respectu PMF, versus D.F.

G, Momentum, $\frac{96R^6 - 96R^5P - 27R^4P^2 + 16R^3P^3}{48P^3}$;

Distantia, $\frac{768R^5 - 768R^4P - 216R^3P^2 + 128R^2P^3}{37P^4}$;

I. Respectu EMG, versus P, Momentum, $\frac{-128R^6 - 96R^5P + 64R^4P^2 + 9R^3P^3}{64P^3}$; Distantia, $\frac{-768R^5 - 576R^4P + 384R^3P^2 + 54R^2P^3}{37P^4}$.

D.F. Quintæ; Magnitudo, $\frac{61}{384}RP$: Respectu PMF, versus E, Momentum, $\frac{-96R^6 - 96R^5P + 75R^4P^2 + 16R^3P^3}{48P^3}$;

Distantia, $\frac{-768R^5 - 768R^4P + 600R^3P^2 + 128R^2P^3}{61P^4}$:

I. Respectu EMG, versus P, Momentum, $\frac{384R^6 - 480R^5P - 192R^4P^2 + 125R^3P^3}{192P^3}$; Distantia, $\frac{768R^5 - 960R^4P - 384R^3P^2 + 250R^2P^3}{61P^4}$.

Et similiter in cæteris.

G.K. Quæque de *Figura Spirali* tradita sunt; eadem *Solido Scalari* facilè accommodantur.

A. Fig. 199, 200. SIt MTT Spiralis *Archimedea*; cujus natura hæc est: Dum recta quæpiam, ut MA, à situ suo MA (quod *Circulationis Principium* vocant) manente puncto M ut Centro (quod vocant *Principium Spiralis*) æquabiliter circumducta, describit circulum AOOA (quem vocant *Circulum primum*;) intelligitur Punctum aliquod T (quod voco *Punctum Lineans*) eodem tempore ab M ad A in circumductâ rectâ MA æquabiliter promotum, motu hoc composito Spiralem MTTA describere, (quem vocant *Spiralem Primæ circulationis*:) eisdémque motibus continuatis, dum eadem recta MA, tantundem ad B protracta, hoc est MAB, secundò circumducta, describit BOOB *Circulum secundum*; Punctum illud Lineans, similiter ab A ad B promota, describit ATTB

Spi-

Spiralem circulationis Secundæ: Et sic deinceps, ad tertiam, quartam, aut etiam plures circulationes, quousque libet. Fig. 199, 200.

Manifestum itaque est (ex constructione) rectas MT, respectivis angulis AMT, vel arcubus AO, (propter æquabilem utrobique motum) proportionales esse: Nempe, Quota pars est Arcus AO totius Peripheriæ; vel Angulus AMT, quatuor rectorum; ea pars est MT respectiva, totius MA: Vel etiam (sumptâ *Anguli* appellatione, laxiori sensu, pro Angulorum quotlibet Aggregato, quamquam duos rectos, aut etiam plures, vel æquet, vel superet; *Arcûsque* appellatione, pro Arcuum aggregato quovis, etiamsi superet integram Circuli Peripheriam; ut & *Sectoris* nomine, pro Sectorum quotlibet Aggregato, ut ut integrum Circulum vel etiam plures superet;) Quam habet rationem AMT Angulus (sic sumptus) ad quatuor rectos; vel correspondens arcus AO, ad peripheriam integram AOA; eam habet respectiva recta MT, ad MA. Et sic ubique.

Et, consequenter; si intelligatur Figuræ Spirali MTTM (curvâ MTT rectâque MT, sumpto ubivis T ultimo, comprehensa) aptari figura ex similibus Sectoribus conflata; (quorum commune Centrum sit M, principium Spiralis;) erunt eorum Radii Arithmeticè proportionales, (puta ut 0, 1, 2, 3, 4, &c. si figuram inscriptam consideremus; vel ut 1, 2, 3, 4, 5, &c. si circumscriptam; aut etiam ut $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$, &c. hoc est ut 1, 3, 5, 7, 9, &c. si his intermediam, partim inscriptam, partim circumscriptam; quæ omnia, in partibus infinitè exiguis, tantundem valent, ut ad prop. 1. hujus ostensum est:) Nempe, ut Series *Primanorum*. Adeoque Sectores ipsi (utpote in duplicatâ ratione Radiorum,) ut Series *Secundanorum*.

Et, consequenter, eorum Aggregatum, ad Aggregatum totidem maximo æqualium; hoc est (per def. 1. cap. 4.) MTM figura Spiralis, ad Sectorem conterminum PTM; ut 1 ad 3; (per prop. 1. hujus:) ubicunque sumatur T ultimum. Puta (posito ultimo T in V,) MTTVM $= \frac{1}{3}$ MVPM. Et sic ubique.

Et speciatim, Figura Spiralis Primæ Circulationis, æqualis Trienti Circuli Primi: Et Figura Spiralis Duarum Circulationum (bis computato quod bis describitur,) æqualis Trienti Circuli Secundi bis sumpti (ut qui Radio maximo bis circumducto bis describitur:) Figura Spiralis Trium Circulationum (à principio semper ordiendo,) toties computando quamlibet partem quoties iteratò describitur, (quippe quod primâ circulatione describitur, id in secundâ repetitur; totúmque B.

Fig. 199, 200. que hoc, in tertiâ; & sic deinceps;) æqualis Trienti Circuli Tertii ter sumpti (utpote qui à Radio maximo, ter circumducto, ter describitur:)

Et sic semper, ubicunque tandem terminetur (sive in absolutæ alicujus Circulationis termino, sive loco quovis intermedio:) Nempe, Figuram Spiralem, Trientem esse Sectoris contermini, toties repetitis omnibus quoties ea iteratò describuntur, sive à Radiis crescentibus intra Spiralem, sive à Radio maximo in contermino Sectore.

C. Sumptis igitur, ad idem M punctum, (à Principio Circulationis ordiendo,) angulis continuis quotlibet æqualibus, (cujuscunque magnitudinis,) ut P M 1, 1 M 2, 2 M 3, 3 M 4, &c. quæ (à Spiralis Principio orsæ) huc pertingunt Figuræ Spirales; (puta M 1 M, M 1 2 M, M 1 2 3 M, M 1 2 3 4 M, &c.) sunt ut 1, 8, 27, 64, &c. numeri cubi continuè sequentes; sive ut Series Tertianorum. Cum enim (per ipsam spiralis constructionem) Radii M 1, M 2, M 3, &c. sint arithmeticè proportionales, seu ut Series Primanorum; puta ut a, $2a$, $3a$, &c. adeoque Sectores similes ad hos Radios (utpote in Radiorum ratione duplicatâ,) ut a^2, $4a^2$, $9a^2$, &c. Series Secundanorum: Erunt (propter ipsos Sectorum angulos arithmetice proportionales, similiter crescentes ut a, $2a$, $3a$, &c.) Sectores M 1 P, M 2 P, M 3 P, &c. ut a^3, $8a^3$, $27a^3$, &c. (nempe in eâ ratione quæ componitur ex ratione Angulorum, & ex duplicatâ ratione Radiorum,) quæ est ut series Tertianorum. Adeoque & Conterminæ Figuræ Spirales, M 1 M, M 1 2 M, M 1 2 3 M, &c. (utpote Sectorum illorum Trientes, ut modò ostensum est,) ut $\frac{1}{3}a^3$, $\frac{8}{3}a^3$, $\frac{27}{3}a^3$, &c. series item Tertianorum; seu ut 1, 8, 27, &c. numeri cubi.

D. Et, consequenter; quæ his continuis angulis æqualibus conveniunt Figuræ Spiralis Portiones; puta M 1 M, 1 M 2, 2 M 3, 3 M 4, &c. ut 1, 7, 19, 37, &c. Cuborum 0, 1, 8, 27, 64, &c. differentiæ. (Quæ omnia in nostrâ *Arithmetica Infinitorum*, fusiùs exposuimus; præsertim à prop. 24. ad prop. 38.)

Et, speciatim, sumptis Angulis rectis P M E, E M F, F M G, G M A, A M H, H M I, I M K, K M B, B M L, &c. Positâ figura Spirali M T E M $= 1$, erunt M T E F M $= 8$, M T E F G M $= 27$, M T E F G A M $= 64$, &c. Cum itaque sit M T E F G A M triens circuli primi, (ut jam ostensum est;) hoc est, (posito Circuli Primi Radio M A $= R$, & peripheria A O A $= P$, adeoque ipso circulo primo A O A $= \frac{1}{2}RP$,) Figura Spiralis primæ Circulationis M T E F G A M $= \frac{1}{6}RP = \frac{64}{384}RP$: Erit quæ primo quadranti con-

convenit figura Spiralis $\frac{1}{384}RP$; quæ Duobus $\frac{8}{384}RP = \frac{1}{48}RP$; quæ Fig. 199,
Tribus, $\frac{27}{384}RP = \frac{9}{128}RP$; quæ Quatuor (hoc eſt Figura Spiralis 200.
Primæ Circulationis) $\frac{64}{384}RP = \frac{1}{6}RP$; quæ Quadrantibus Quinque (repetito quod erat in primo) $\frac{125}{384}RP$; quæ Sex quadrantibus (repetito quod erat in binis primoribus) $\frac{216}{384}RP = \frac{9}{16}RP$; quæ Septem quadrantibus (repetito quod erat in tribus primoribus) $\frac{343}{384}RP$; quæ quadrantibus Octo; hoc eſt, binis Circulationibus (repetito quod erat in primâ) $\frac{512}{384}RP = \frac{4}{3}RP$; quæ Novem quadrantibus (repetitis quæ fuerant prius deſcripta, & quidem toties quoties deſcripta fuerant,) $\frac{729}{384}RP = \frac{243}{128}RP$; & ſic deinceps quouſque opus erit. Nempe, univerſaliter, in ea ratione ad $\frac{1}{6}RP$, (trientem circuli primi,) qua eſt a^3 ad P^3, ſeu r^3 ad R^3. Puta $\frac{a^3 R}{6P^2}$, vel $\frac{r^3 P}{6R^2}$.

Adeoque, quæ Primo quadranti convenit, MTEM $= \frac{1}{384}RP$; quæ Secundo, EMF $= \frac{7}{384}RP$; quæ Tertio, FMG, $= \frac{19}{384}RP$; quæ Quarto, GMA $= \frac{37}{384}RP$; quæ Quinto, AMH $= \frac{61}{384}RP$; quæ Sexto, HMI $= \frac{91}{384}RP$; quæ Septimo, IMK $= \frac{127}{384}RP$; quæ Octavo, KMB $= \frac{169}{384}RP$; quæ Nono, BML $= \frac{217}{384}RP$; & ſic deinceps, quouſque libet, in ratione differentiarum numerorum Cuborum continue ſequentium.

His ita de Figurarum magnitudine conſtitutis; quò Centra gravitatis determinemus, eaſdem ad Duas Diametros, PMF, EMG, E.
ſe mutuò in M decuſſantes, exigemus; earum momenta harum reſpectu, adeoque Centrorum gravitatis ab his diſtantias, inquirendo. Et primò quidem reſpectu ipſius PMF.

Sunt autem (ut jam oſtenſum eſt) ſimilium Sectorum infinitè exiguorum (ex quibus conflari intelligitur Figura Spiralis) Radii, ut totidem a, Arcus vel Anguli arithmeticè proportionales; adeoque Sectores ipſi, ut totidem a^2, eorum Quadrata.

Sed & eorum Centra gravitatis R in Sectoris cujuſque medio Radio ſimiliter ſito, utpote quæ ipſius Beſſe (ſeu duobus trientibus) ab M diſtant (propter arcuum infinite-exiguorum quam ſupponimus cum chordis coincidentiam; ſaltem, rationem infinite-exiguam;) per prop. 14. hujus.

Et propterea illorum à PMF diſtantiæ RS, ſunt in ratione Sinuum rectorum, Arcuum ſeu Angulorum arithmetic: proportionalium, ad

Radios

Fig. 199, 200. Radios item (M R) arithmetice-proportionales; puta ut $a\,s$; hoc est in ratione quæ componitur ex s sinuum angulorum arithmetice proportionalium, & a radiorum similiter in proportione arithmeticâ crescentium.

(Nequis autem hæreat, eò quod non sit idem angulus P M R (cui convenit Sinus R S,) qui est Sectoris P M Y, (propter rectam MRT per medium Sectoris Z M Y incedentem:) Id nihili res est. Quippe; si ponantur anguli P M Y, ut 1, 2, 3, 4, &c. erunt anguli P M R, seu P M T, ut $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, &c. Quæ, in partibus innumeris, infinite exiguis, tantundem valet. Ut ad prop. 1. hujus, ostensum est.)

Erunt itaque eorum, respectu ipsius P M F, Momentorum ratio (utpote ex ratione magnitudinum a^2, & distantiarum $a\,s$, composita,) ut $a^3 s$; hoc est, ut a^3 series Tertianorum (seu cuborum quantitatum arithmetice proportionalium) in s respectivos Sinus rectos arcuum seu angulorum arithmeticè proportionalium. (Perinde autem est, Momentum quod spectat, sive ponantur Pondera a^2 in distantiis $a\,s$, sive Pondera a^3 in distantiis s; quippe utrobique Momenta erunt $a^3 s$.) Et quidem, pro duobus quadrantibus primoribus, ad (ipsius P M F) partes E, quam Ponderationem signo $+$ designabimus; pro duobus sequentibus, ad partes contrarias, hoc est ad G, (propter quantitates ipsas, ad contrarias rectæ P M F partes, positas,) quam Ponderationem Signo $-$ designabimus. Et similiter in quadrantibus sequentibus faciendum erit, prout ad illas vel istas partes ponantur: Nempe, pro quadrantibus Quinto & Sexto, ponendum signum $+$; pro Septimo & Octavo, signum $-$: & sic deinceps (alternatim) duobus intermissis.

Quod tantundem est atque si totidem $\beta\,\upsilon$ (ipsis s proportionales) complentes figuram Sinuum Rectorum $\alpha\,\tau\,\varkappa$ (fig. 170.) vel (quæ eandem aliquoties repetitam exhibet) M υ F υ A υ I (fig. 201.) quousque opus erit continuandam, (ad alteras atque alteras ipsius M F A I partes positam, prout ipsius figuræ Spiralis situs postulat;) onerentur respectivis a^3, in triplicatâ ratione suarum ab M distantiarum, arithmeticè-proportionalium; hoc est, serie Tertianorum.

Fig. 201. Sive (quod tantundem est, propter distantias M $\beta = a$,) ut Momentum (respectu ipsius M P fig. 201.) omnium $a^2 s$; hoc est, omnium $\beta\,\upsilon = s$, respectivis a^2 onustarum. (Signis $+\,-$ ritè consideratis.)

Hoc est, per prop. 10. hujus, ut *Aggregatum omnium* $a^2 s$, (usque ad a maximum) toties sumptum, (hoc est in a ductum;) demptis *Om-*

nibus Aggregatis ejuſmodi uſque ad reſpectivos a arithmetice proportionales. Fig. 201.

Eſt autem illud *Aggregatum Omn.* $a^2 s$, $= -a^2 R^2 + 2asR^2 + a^2 vR - 2vR^3$, per § O. prop. 19. Nempe, Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$ fig. 170. aciem habentis A α, momentum reſpectu A α; cui reſpondet, in noſtro caſu, Ungulæ M $\beta\upsilon$ fig. 201. aciem habentis P M, Momentum reſpectu P M.) Adeoque illud toties ſumptum, hoc eſt, in $a = M\beta$ ductum, eſt $-a^3 R^2 + 2a^2 sR^2 + a^3 vR - 2avR^3$.

Quod quò ritè intelligatur, conſiderandum eſt; per s, intelligendum eſſe ſinum rectum arcui $\alpha\beta$ fig. 170. hoc eſt M β fig. 201. convenientem; hoc eſt, ipſam $\beta\upsilon$ rectam; quæ interpretanda erit affirmativè vel negativè, prout citra vel ultra M F A jaceat: Sicut & in ipſo circulo Sinus Recti in contrariis ſemicirculis, contrariis ſignis affici intelligantur; utpote ad contrarias diametri partes poſiti: Item, per v intelligendum eſſe Sinum verſum arcui $\alpha\beta$ fig. 170. hoc eſt, M β fig. 201. convenientem. Si autem β ſumatur citra F; adeóque in primo Semicirculo; nihil eſt quò quis hæreat; (quippe hoc ſæpiùs oſtenſum eſt, in prop. 17, de figurâ Sinuum Rectorum $\alpha\tau\kappa$ fig. 170.) Si verò ultra F qui terminus eſt primi Semicirculi (cui convenit ſinus verſus $v = 2R$ & Sinus Rectus $s = 0$) ſumatur β; (quod tantundem eſt atque ſi in fig. 169. poſt abſolutum ſemicirculum A D α, continuandus eſſet arcus, ultra α, in Semicirculo oppoſito, ſurſum, verſus A, puta A D $\alpha\theta$,) Sinus Rectus contrario Signo afficiendus eſſet; & decreſceret Sinus verſus (ſubducto ex $2R$, quantum eſſet ſinus verſus continuati arcûs $\alpha\theta$, ab α inchoandus;) uſque dum, abſoluto ſecundo Semicirculo, ad A fig. 169. perventum fuerit, evaneſcente tum Sinu Recto, ſecunda vice, in $s = 0$, tum Sinu verſo in $2R - 2R = 0$. Sin porro procedatur, ultra circulum integrum, ad tertium Semicirculum; ibidem Sinus Rectus Affirmative interpretandus erit, & creſcet iterum Sinus Verſus; qui in Quarto iterum decreſcet, & Sinus Rectus negativè interpretandus: Et ſic porro, alternis vicibus. Quippe eadem recta A V fig. 169. ($=$ A $\alpha - \alpha$V $=$ A $\alpha - \alpha$A $+$ A V, &c.) eſt ſinus verſus, tum Arcûs A B, tum (reſidui ad Circulum integrum) A D $\alpha\theta$, aut etiam (ultra Circulum contiuati) A D $\alpha\theta$ A B: Item arcûs A B, ſinus V B $= s$ affirmativè interpretandus, arcúſque A B $\alpha\theta$, ſinus oppoſitus V $\theta = -s$ negativè interpretandus; iterúmque Arcûs A B $\alpha\theta$ A B, ſinus VB $= s$; & Arcûs A B $\alpha\theta$ A B $\alpha\theta$, ſinus V $\theta = -s$: Et ſic deinceps, ſi ad plures integros circuitus procedendum erit.

Porro; propter *Aggregatum Omn.* $a^2 s$, $= -a^2 R^2 + 2asR^2$

$+$

Fig. 201. $+a^2vR-2vR^3$, (ut modo oſtenſum eſt;) erunt *Omn. Aggregata* a^2s, $=$ *Omn.* $-a^2R^2+2asR^2+a^2vR-2vR^3$; ſumptis a arithmetice proportionalibus uſque ad a maximum, hoc eſt M β.

Sunt autem *Omn.* a^2, $=\frac{1}{3}a^3$, per prop. 1. hujus; Ergo, *Omn.* $-a^2R^2$, $=-\frac{1}{3}a^3R^2$.

Et *Omn.* as, $=-eR^2+avR$, per § Q. prop. 17. (eſt utique Trilinei $\alpha\beta v$ fig. 170. momentum reſpectu A α,) Ergo, *Omn.* $2asR^2$; $=-2eR^4+2avR^3$.

Et *Omn.* a^2v, $=-2eR^3+2avR^2+\frac{1}{3}a^3R-a^2sR$, per § L. prop. 19. (Nempe Ungulæ A b K fig. 170. aciem habentis A α, momentum reſpectu A α.) Ergo, *Omn.* a^2vR, $=-2eR^4+2avR^3+\frac{1}{3}a^3R^2-a^2sR^2$.

Et *Omn.* v, $=eR$, per § B. prop. 17. (Eſt utique Trilineum A b K fig. 170.) Ergo, *Omn.* $-2vR^3$, $=-2eR^4$.

Ergo, *Omn. Aggregat.* a^2s, $=$ *Omn.* $-a^2R^2+2asR^2+a^2vR-2vR^3$; $=-\frac{1}{3}a^3R^2-2eR^4+2avR^3-2eR^4+2avR^3+\frac{1}{3}a^3R^2-a^2sR^2-2eR^4=-6eR^4+4avR^3-a^2sR^2$.

Atque hoc demum ſubductum ex, *Aggregat.* a^2s, in a maximum, $=-a^3R^2+2a^2sR^2+a^3vR-2avR^3$; relinquit *Omn.* a^3s; $=6eR^4-6avR^3-a^3R^2+3a^2sR^2+a^3vR$.

Fig. 199, 200. Cum itaque ſingulorum Sectorum exiguorum Angulus ſit, verbi gratiâ, infiniteſima pars quatuor rectorum; cui reſpondeat, in Circulo primo, arcus $T=\frac{1}{\infty}P$; adeoque in ſuis P T peripheriis conterminis, $t=\frac{a}{P}T$; (poſito a pro arcu circuli primi qui reſpondeat angulo P M T;) &c, propterea eorum magnitudines ſint $\frac{1}{2}tr$ (ſumptis tum t tum r arithmetice proportionalibus; ſintque Centrorum gravitatis ab M diſtantiæ R M $=\frac{2}{3}r$; adeoque eorundem à P M F diſtantiæ (utpote ad R M, ut Sinus Rectus anguli P M R ad Radium, ſeu ut s ad R,) R S $=\frac{2sr}{3R}$; adeoque eorum reſpectu P M momenta $\frac{1}{2}tr\times\frac{2sr}{3R}=\frac{tr^2s}{3R}$, (ſumptis tum t, tum r, arithmeticè proportionalibus, ipſiſque s pro ſinubus rectis arcuum arithmetice proportionalium ad Radium R;) adeoque (ut prius etiam oſtenſum eſt) in ratione ipſorum a^3s: Si, pro *Omnibus* a^3s, $=6eR^4-6avR^3-a^3R^2+3a^2sR^2+a^3vR$, ſubſtituantur Totidem $\frac{tr^2s}{3R}$,

$=$

$= \frac{6etr^2R^3 - 6avtr^2R^2 - a^3tr^2R + 3a^2str^2R + a^3vtr^2}{3a^3}$; habetur figuræ Spiralis, quousque libet continuatæ, (cujus Radius ultimus MT $= r$,) momentum respectu rectæ PMF, (toties computatâ parte qualibet quoties iterato describitur,) & quidem vel ad partes E, vel ad partes G; prout signum + aut — prævaleat. Aut etiam, (propter $t = \frac{aT}{P}$,) Fig. 199, 200.

$$\frac{6er^2R^3 \; (= 6ar^2R^3 - 6sr^2R^3) - 6avr^2R^2 - a^3r^2R + 3a^2sr^2R + a^3vr^2}{3a^2P} T:$$

Vel, (propter eandem ubique rationem r ad a, quæ est R ad P; utpote in eâdem ratione semper crescentibus r & a, donec perveniatur illic ad R, hic ad P, in termino primi circuli;)

$$\frac{6aR^5 - 6sR^5 - 6avR^4 - a^3R^3 + 3a^2sR^3 + a^3vR^2}{3P^3} T:$$ Vel (neglecto T; quippe dum T ponitur pro $\frac{1}{\infty}P$, infinitesimâ parte ipsius P, & P pro earundem in P lineâ partium numero; tantundem erit PT, atque ipsa P linea;) $\frac{6aR^5 - 6sR^5 - 6avR^4 - a^3R^3 + 3a^2sR^3 + a^3vR^2}{3P^3}$.

Sunt autem, ut ex prædictis patet, singulorum Sectorum exiguorum magnitudines, $\frac{1}{2}tr$; hoc est, $\frac{arT}{2P}$; seu $\frac{a^2RT}{2P^2}$, (propter $r = \frac{a}{P}R$.) Adeoque omnium summa $\frac{a^3RT}{6P^2}$ vel $\frac{a^3R}{6P^2}$ (utpote ad maximum toties sumptum, ut 1 ad 3; per prop. 1. hujus.) Nempe in ea ratione ad $\frac{1}{6}RPT$ vel (neglecto T) ad $\frac{1}{6}RP$, (trientem circuli primi, seu figuram spiralem primæ circulationis,) ut a^3, ad P^3, seu ut r^3 ad R^3; hoc est, ut Cubus Radii terminalis MT, ad Cubum MA radii circuli primi.

Per hanc itaque Magnitudinem, si dividamus Momentum modo traditum; habebitur

$$\frac{12aR^4 - 12sR^4 - 12avR^3 - 2a^3R^2 + 6a^2sR^2 + 2a^3vR}{a^3P}$$

Centri gravitatis figuræ Spiralis (quousque libet continuatæ) MTT (toties computatis singulis partibus quoties iteratò describuntur) distantia à recta PMF; & quidem vel ad partes E vel ad partes G, (sive Momenta spectemus, sive distantiam Centri gravitatis,) prout signum + vel — prævaluerit.

Fig. 199, 200. Notandum interim (ne hæc perperam intelligantur) in ſemicirculationibus ſecundâ, quartâ, ſextâ, (reliquiſque in locis paribus,) pro Momentis his atque Diſtantiis æſtimandis, ſinum s negative interpretandum eſſe; utpote, in his ſemicirculis, ad contrarias Diametri partes poſitum: Adeoque ita exponendum atque ſi contrario ubique ſigno afficeretur. Quod & ante inſinuatum eſt.

F. Et quidem, pro integris Circulationibus abſolutis, (propter tum $s = 0$, tum $v = 0$, in fine cujuſque circulationis,) Magnitudines erunt, $\frac{a^3 R}{6P^2}$; Momenta reſpectu PMF (neglecto T, ob cauſam modò dictam,) $\frac{6aR^5 - a^3R^3}{3P^3}$; (toties repetitis omnibus quoties iteratò deſcribuntur;) diſtantiæ centrorum gravitatis à PMF verſus E, $\frac{12R^4 - 2a^2R^2}{a^2P}$; Hoc eſt, (propter ſignum $-$, prævalens; eſt utique, hoc caſu, a^2 ſemper plus quàm $6R^2$; non poteſt enim a in fine circulationis, minor eſſe quam P;) diſtantiæ à PMF verſus G, $\frac{-12R^4 + 2a^2R^2}{a^2P}$. In quibus omnibus, exponetur a, in fine Circulationis Primæ, per P; in fine ſecundæ, per $2P$; Tertiæ, per $3P$; & ſic deinceps.

Pro Circulationibus Dimidiis, quæ integram Circulationem non terminant; (puta, pro una, tribus, quinque, &c.) propter $s = 0$, & $v = 2R$; erunt magnitudines (ut prius) $\frac{a^3 R}{6P^2}$; Momenta reſpectu PMF $\frac{-6aR^5 + a^3R^3}{3P^3}$; diſtantiæ à PMF verſus E, $\frac{-12R^4 + 2a^2R^2}{a^2P}$. In quibus exponetur a, in fine Semicirculationis primæ, per $\frac{1}{2}P$; tertiæ, per $\frac{3}{2}P$; quintæ, per $\frac{5}{2}P$; & ſic deinceps. Adeoque ſignum $+$, in hoc caſu, ſemper prævalet: propter Quadratum, Semiperipheriæ majus quam ſex quadrata Radii.

Pro Circulationibus Quadrantalibus, quæ Semicirculationem non terminant, (puta, pro primâ, tertiâ, quintâ, &c.) propter tum $s = R$, pro primâ, quintâ, nonâ, &c. ſed $s = -R$, pro tertiâ, ſeptimâ, undecimâ, &c; tum $v = R$ in omnibus: Magnitudines erunt

erunt (ut prius) $\frac{a^3 R}{6P^2}$; Momenta respectu PMF, $\frac{-6R^6 + 3a^2R^4}{3P^3}$ Fig. 199, 200.
$= \frac{-2R^2 + a^2}{P^3}R^4$; Distantiæ à PMF, versus E, $\frac{-12R^5 + 6a^2R^3}{a^3P}$;
nempe pro primâ, quintâ, nonâ, &c. In quibus exponetur a, in fine Quadrantis primi, per $\frac{1}{4}P$; quinti, per $\frac{5}{4}P$; noni, per $\frac{9}{4}P$; & sic deinceps. Et signum $+$, prævalet: propter quadratum Arcûs Quadrantalis, majus quàm Duo quadrata Radii. Sed, pro tertiâ, septimâ, undecimâ, &c. (propter s contrario signo exponendum, seu $s = -R$;) Momenta erunt $\frac{+6R^6 - 3a^2R^4}{3P^3} = \frac{+2R^2 - a^2}{P^3}R^4$; Distantiæ, $\frac{+12R^5 - 6a^2R^3}{a^3P}$; adeoque (propter a, interpretandum per, $\frac{3}{4}P$, $\frac{7}{4}P$, $\frac{11}{4}P$, &c. signum $-$ prævalebit; erúntque tum Momenta, tum Distantiæ, versus G.

Sin libeat singulos quadrantes seorsum perpendere, (non, ut hactenus, inchoando à principio, omniaque toties repetendo quoties iteratò describuntur;) illud sic fiet.

De Primo quadrante, MTEM, jam ostensum est, Magnitudinem esse $\frac{a^3 R}{6P^2}$, hoc est (propter $a = \frac{1}{4}P$,) $\frac{1}{384}RP$; Momentum respectu PMF, $\frac{-2R^6 + a^2R^4}{P^3} = \frac{-32R^6 + R^4P^2}{16P^3}$; distantia centri gravitatis à PMF versus E, $\frac{-12R^5 + 6a^2R^3}{a^3P} = \frac{-768R^5 + 24R^3P^2}{P^4}$.

Magnitudo Primæ Semicirculationis, MTEFM, est $\frac{a^3 R}{6P^2}$; hoc est, (propter $a = \frac{1}{2}P$,) $\frac{1}{48}RP$: Momentum respectu PMF, $\frac{-6aR^5 + a^3R^3}{3P^3} = \frac{-24R^5 + R^3P^2}{24P^2}$; distantia versus E, $\frac{-48R + 2R^2P^2}{P^3}$.

Ex hujus itaque Momento, si subducatur Momentum primi quadrantis, $\frac{-32R^6 + RP^2}{16P^3}$; Habetur Quadrantis secundi MEFM, Mo-

 mentum

Fig. 199, 200. mentum respectu P M F, $\frac{96R^6 - 48R^5P - 3R^4P^2 + 2R^3P^3}{48P^3}$; Adeoque propter magnitudinem (§ D. traditam) $\frac{7}{384}RP$; Distantia centri gravitatis à P M F versus E, $\frac{768R^5 - 384R^4P - 24R^3P^2 + 16R^2P^3}{7P^4}$.

Magnitudo Trium quadrantalium circulationum, M T E F G M, $\frac{a^3R}{6P^2} = \frac{9}{128}RP$, (propter $a = \frac{3}{4}P$;) Momentum respectu PMF, $\frac{2R^6 - a^2R^4}{P^3} = \frac{32R^6 - 9R^4P^2}{16P^3}$; (adeoque versus G, propter prævalentiam signi —; hoc est, revera, $\frac{-32R^6 + 9R^4P^2}{16P^3}$ versus G.) Distantia Centri gravitatis à P M F versus E, $\frac{12R^5 - 6a^2R^3}{a^3P}$; hoc est (propter signum — prævalens,) versus G, $\frac{-12R^5 + 6a^2R^3}{a^3P} = \frac{-256R^5 + 72R^3P^2}{9P^4}$.

Ex hujus momento, si subducatur momentum primæ Semicirculationis $\frac{-24R^5 + R^3P^2}{24P^2}$; Habetur momentum Tertiæ quadrantalis M F G M, $\frac{96R^6 + 48R^5P - 27R^4P^2 - 2R^3P^3}{48P^3}$: Adeoq; propter magnitudinem (§ D. traditam) $\frac{19}{384}RP$; Distantia Centri gravitatis à P M F versus E, $\frac{768R^5 + 384R^4P - 216R^3P^2 - 16R^2P^3}{19P^4}$; hoc est, revera, versus G,

$$\frac{-768R^5 - 384R^4P + 216R^3P^2 + 16R^2P^3}{19P^4}.$$

Magnitudo integræ Circulationis primæ, M T E F G A M, $\frac{a^3R}{6P^2} = \frac{1}{6}RP$, (propter $a = P$;) Momentum respectu P M F $\frac{6aR^5 - a^3R^3}{3P^3} = \frac{6R^5 - R^3P^2}{3P^3}$: Distantia Centri gravitatis à P M F

versus

versus F, $\frac{12R^4 - 2a^2R^2}{a^2P} = \frac{12R^4 - 2R^2P^2}{P^3}$; hoc est (propter prævalentiam signi —,) versus G, $\frac{-12R^4 + 2R^2P^2}{P^3}$. Fig. 199, 200.

Ex hujus Momento; si subducatur Momentum Circulationis Dodrantalis $\frac{32R^6 - 9R^4P^2}{16P^3}$; Habetur Quadrantalis Quartæ M G A M, Momentum respectu PMF, $\frac{-96R^6 + 96R^5P + 27R^4P^2 - 16R^3P^3}{48P^3}$: & (propter magnitudinem $\frac{37}{384}RP$,) Distantia Centri gravitatis à PMF versus E, $\frac{-768R^5 + 768R^4P + 216R^3P^2 - 128R^2P^3}{37P^4}$; hoc est (revera) versus G, $\frac{768R^5 - 768R^4P - 216R^3P^2 + 128R^2P^3}{37P^4}$.

Magnitudo Quinque Quadrantalium M T E F G A H M, $\frac{a^3R}{6P^2} = \frac{125}{384}RP$, (propter $a = \frac{5}{4}P$;) Momentum respectu P M F, $\frac{-2R^6 + a^2R^4}{P^3} = \frac{-32R^6 + 25R^4P^2}{16P^3}$; Distantia Centri gravitatis à P M F, $\frac{-12R^5 + 6a^2R^3}{a^3P} = \frac{-768R^5 + 600R^3P^2}{125P^4}$, versus E.

Ex hujus Momento, si subducatur momentum Primæ Circulationis, $\frac{6R^5 - R^3P^2}{3P^2}$; Habetur Momentum Quadrantalis Quintæ, M A H M, $\frac{-96R^6 - 96R^5P + 75R^4P^2 + 16R^3P^3}{48P^3}$: Et (propter magnitudinem $\frac{61}{384}RP$;) Distantia Centri gravitatis à PMF, versus E, $\frac{-768R^5 - 768R^4P + 600R^3P^2 + 128R^2P^3}{61P^4}$.

Et sic deinceps, quousque libet.

Atque eâdem operâ determinavimus tum Magnitudinem, tum Momentum & Centri gravitatis ab erecto super rectam P M F plano distantiam, Solidi *Scalaris*, super Figuram Spiralem T T M obliquo situ ascendentem positi, eandem ubique habentis altitudinem (quamlibet) supra obliquè ascendentem figuram Spiralem; quæ quidem altitudo sit etiam cujusvis puncti in sequenti qualibet circulatione distantia G.

Fig. 199, 200. distantia à subjecto proxime præcedentis Circulationis puncto.

Quippe ad hoc nihil aliud requiritur, quam ut ι (quæ pro infinetesima parte Peripheriæ circuli primi habebatur, adeoque negligi poterat,) jam habeatur pro illâ quantalibet Altitudine; in Solidi tum Magnitudine tum Momento æstimando: Distantia verò Centri gravitatis a plano P M F, eadem hic erit quæ prius erat à P M F rectâ.

Si autem Solidum hoc utcunque Truncatum intelligatur; vel supernè, ne ad M apicem pertingat; vel infernè, putà quò basem planam Horizontalem habeat; vel alias quomodolibet: non erit difficile, præmissa ritè perpendentibus, amputati rationem habere; quódque inde oritur descriminis sive in Magnitudine, sive in Momento, & Centri gravitatis distantia.

Vel etiam si pro eâdem (quam hic ponimus) Altitudine, aut Circulationum intervallo, (unde continuo mutabitur acclivitas ascendentis plani,) eandem velimus retentam acclivitatem, (unde variabitur altitudo, quæ pro decrescentibus circulis continuò decrescet;) simili processu habebitur tum Solidi Magnitudo, tum Momentum, Centrique gravitatis à P M F plano distantia: Sed Calculo paulò adhuc intricatiori, propter novam adhuc cum cæteris componendam rationem, pro variatâ altitudine. Verùm omnia sigillatim prosequi mihi non est in animo, ne nimius sim. Ad figuram itaque spiralem redeo.

H. Ut autem ejusdem M T T M figuræ Spiralis Momentum (quod hactenus ad P M F rectam expendimus,) ad rectam E M G expendamus: considerandum est, Centrorum gravitatis Sectorum exiguorum distantias ab E M G, esse ipsos R X sinus Complementi earundem arcuum quorum Sinus recti sunt R S; (atque ad eosdem radios R M continue crescentes in proportione arithmetica;) puta ut ax; (positis x pro sinibus complementi, ipsis s respondentibus: hoc est, pro V C Sinibus Complementi arcuum A B, fig. 169. quorum Sinus recti sunt B V.)

Adeoque (propter magnitudines, ut supra dictum est, ut a^2,) Momenta respectu rectæ E M G, erunt ut a^3x ($=a^2 \times ax$:) Hoc est, ut a^3 series Tertianorum, in respectivos x arcuum arithmetice proportionalium *Co-sinus* seu sinus complementi: Hoc est in ipsas $\beta\upsilon$ rectas, complentes figuram $\delta\kappa\tau$ (fig. 170.) quousque opus erit continuandam; Hoc est in ipsas $\beta\upsilon$ complentes figuram $\mu\upsilon\varepsilon\upsilon\gamma\upsilon\nu$

Fig. 201. (fig. 201.) quousque opus est continuandam; inchoandam autem,

non

non (ut prius) ab M P, sed à $\mu\upsilon$. (Est utique eadem $\upsilon\beta$ recta, tum *Sinus* rectus arcûs, in rectam extensi, M β; tum *Co-sinus* arcûs, in rectam extensi, $\mu\ \beta$.) Fig. 201.

Nam, ut Sinus s, à minimo incipiunt continuè crescendo usque ad quadrantis finem, ubi decrescere incipiunt: Sic, vice versa, eorundem arcuum *Co-sinus* x, seu Sinus Complementi, à maximo incipiunt continuè decrescendo ad finem usque quadrantis; ubi crescere incipiunt, sed ad contrarias partes ipsius E M G rectæ.

Quæ enim spectant ad quadrantem Primum, Quartum, Quintum, Octavum, Nonum, &c. ponderant ad rectæ E M G fig. 199, 200. partes P; (quam ponderationem signo $+$ designo:) quæ autem pertinent ad quadrantem Secundum, Tertium, Sextum, Septimum, Decimum, &c. ponderant in partes contrarias, hoc est ad F; (quam ponderationem signo $-$ designo;) & sic deinceps, alternatim, duos intermittendo continuos quadrantes seu integrum Semicirculum.

Quem situm imitantur ipsius figuræ $\mu\upsilon\varepsilon\upsilon\gamma\upsilon\pi$, &c. (fig. 201.) portiones, ad alias atque alias rectæ $\mu\gamma$ partes positæ.

Quæ quidem eadem est figura atque C A b k (fig. 170.) quousque opus erit continuanda: Cujus portiones C A b k, vel C A d b k, fig. 170. (hoc est, $\mu\upsilon\upsilon\beta$, vel $\mu\upsilon\varepsilon\upsilon\beta$, fig. 201. ubicunque in sinuosâ curvâ, $\mu\upsilon$ inchoatâ, sumatur υ punctum,) consideravimus, ad § B. prop. 17. ostendimúsque istiusmodi figuræ magnitudinem esse $s\,R$, æqualem facto ex respectivi Arcûs $\mu\beta$ (seu Anguli A M T fig. 199, 200.) Sinu Recto, in Radium ducto; habitâ tamen (prout ad alias atque alias rectæ partes jaciunt figuræ portiones) debitâ signorum $+ -$ consideratione.

Quo itaque habeamus *Omnia* a^3x; Hoc est, Omnes x, (seu $\beta\upsilon$ rectæ figuram $\mu\upsilon\varepsilon\upsilon\gamma$, &c. complentes) respectivis a^3 (serie Tertianorum) onustæ: Intelligamus, juxta doctrinam prop. 10. hujus, (quam sæpiùs in auxilium advocavimus,) singula α, β, γ, &c. fig. 135. Fig. 135. æqualiter ob invicem remota, totidem esse respectivas x rectas; adeoque ipsam A E onustam, seu Omnia, $\alpha + \beta + \gamma$, &c. $=$ *Omn.* x, $= s\,R$, ut jam ostensum est, ex § B. prop. 17.

Horúmque omnium momenta respectu axis A; hoc est, *Omn.* $a\,x$; sunt ipsæ onustæ rectæ, A E $+$ B E $+$ C E, &c. hoc est, totidem A E, demptis omnibus A B $+$ A C, &c. Hoc est, (propter A E $= s\,R$,) totidem $s\,R$ ultimis (seu $a\,s\,R$,) demptis omnibus $s\,R$ antecedentibus, pro arcubus arithmeticè proportionalibus usque ad a ultimum.

Sunt

Fig. 135. Sunt autem (pro arcubus a arithmeticè proportionalibus) *Omn.* s, $= vR$, per § Q. prop. 17. (utpote ipsa $\alpha\beta\upsilon$ fig. 170.) Adeoque *Omn.* sR, $= vR^2$. Hoc itaque ex asR subducto, habetur $asR - vR^2 =$ *Omn.* ax.

Intelligantur deinde eadem α, β, γ, &c. fig. 135. tanquam totidem ax: adeoque onusta recta AE $=$ *Omn.* ax, $= asR - vR^2$. Horumque omnium momenta respectu ipsius A; hoc est *Omn.* a^2x; sunt ipsæ AE + BE + CE, &c. rectæ sic onustæ. Hoc est, totidem AE, ($= a^2sR - avR^2$,) demptis Omnibus AB + AC, &c. hoc est, omnibus $asR - vR^2$, pro arcubus a arithmeticè proportionalibus.

Sunt autem (pro arcubus a arithmeticè proportionalibus) *Omn.* as, $= -eR^2 + avR$, per § Q. prop. 17. (utpote momentum ipsius $\alpha\beta\upsilon$ fig. 170. respectu rectæ Aα;) adeoque *Omn.* asR, $= -eR^3 + avR^2$.

Item *Omn.* υ, $= eR$, per § B. prop. 17. (utpote ipsum AbK trilineum, fig. 170.) adeoque *Omn.* $-vR^2 = -eR^3 = -aR^3 + sR^3$.

Ergo, *Omn.* $asR - vR^2 := -2eR^3 + avR^2 = -2aR^3 + 2sR^3 + avR^2$.

Hoc itaque, ex $a^2sR - avR^2$, subducto; habetur $2aR^3 - 2sR^3 - 2avR^2 + a^2sR =$ *Omn.* a^2x.

Intelligantur denique eadem α, β, γ, &c. fig. 135. tanquam totidem a^2x: adeóque onusta recta AE, $=$ *Omn.* a^2x, $= 2aR^3 - 2sR^3 - 2avR^2 + a^2sR$. Horum itaque omnium momenta respectu axis A; hoc est, *Omn.* a^3x; sunt ipsæ AE + BE + CE, &c. sic onustæ: Hoc est, totidem AE, ($= 2a^2R^3 - 2asR^3 - 2a^2vR^2 + a^3sR$,) demptis AB + AC, &c. Hoc est, omnibus, $2aR^3 - 2sR^3 - 2avR^2 + a^2sR$, pro arcubus a arithmeticè proportionalibus.

Sunt autem (pro a arithmeticè proportionalibus) *Omn.* a, $= \frac{1}{2}a^2$, per prop. 1. hujus. Adeoque *Omn.* $2aR^3$, $= a^2R^3$.

Item, *Omn.* s, $= vR$, per § Q. prop. 17. adeoque *Omn.* $-2sR^3 = -2vR^4$.

Item, *Omn.* av, $= \frac{1}{2}a^2R - asR + vR^2$, per § H. prop. 17. (utpote momentum trilinei AbK. fig. 170. respectu Aα;) adeoque *Omn.* $-2avR^2$, $= -a^2R^3 + 2asR^3 - 2vR^4$.

Item, *Omn.* a^2s, $= -a^2R^2 + 2asR^2 + a^2vR - 2vR^3$, per § O. prop. 19. (nempe Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$ fig. 170. aciem habentis Aα, momentum respectu Aα;) Adeoque *Omn.* a^2sR, $= -a^2R^3 + 2asR^3 + a^2vR^2 - 2vR^4$.

Ergo,

Ergo, (horum aggregatum) *Omn.* $2aR^3 - 2sR^3 - 2avR^2 + a^2sR$, $= -a^2R^3 + 4asR^3 + a^2vR^2 - 6vR^4$. Fig. 135.

Hoc itaque subducto, ex $2a^2R^3 - 2asR^3 - 2a^2vR^2 + a^3sR$; habetur, $6vR^4 + 3a^2R^3 - 6asR^3 - 3a^2vR^2 + a^3sR$, $=$ *Omn.* a^3x.

Atque ad eandem formam (eadem quoties opus erit repetendo vestigia) procedendum esset, si porro *Omnia* a^4x, *Omnia* a^5x, (aut etiam ultra) inquirenda essent: Vel etiam, si loco ipsorum x, aliæ quælibet quantitates ponerentur. Quod hic obiter monitum esto.

Cum itaque (ut jam ante ostensum est § E.) singulorum Sectorum exiguorum Magnitudines, sint $\frac{1}{2}tr = \frac{arT}{2P} = \frac{a^2RT}{2P^2}$; distantiæque ab EMG, $RX = \frac{2rx}{3R} = \frac{2ax}{3P}$, (posito x pro Co-sinu anguli vel arcûs a, ad Radium R;) adeoque momenta respectu EMG, $\frac{a^2RT}{2P^2} \times \frac{2ax}{3P} = \frac{a^3xRT}{3P^3}$; vel (neglecto T, ob causam aliquoties dictam,) $\frac{a^3xR}{3P^3}$: Erit (propter *Omn.* a^3x, $= 6vR^4 + 3a^2R^3 - 6asR^3 - 3a^2vR^2 + a^3sR$,) Momentum Figuræ Spiralis MTTTM, respectu rectæ EMG, *Omn.* $\frac{a^3xR}{3P^3}$, $=$ Fig. 199, 200.

$$\frac{6vR^5 + 3a^2R^4 - 6asR^4 - 3a^2vR^3 + a^3sR^2}{3P^3}.$$

Adeoque, (propter magnitudinem, jam ante traditam, $\frac{a^3R}{6P^2}$,) Dist. Cent. grav. ab EMG rectâ, $\frac{12vR^4 + 6a^2R^3 - 12asR^3 - 6a^2vR^2 + 2a^3sR}{a^3P}$. Et quidem vel ad partes P, vel ad partes F, (sive momentum seu ponderationem spectemus, sive distantiam Centri gravitatis,) prout vel signum $+$, vel signum $-$, prævaluerit.

Et quidem, pro integris quotlibet circulationibus absolutis Momenta erunt $\frac{a^2R^4}{P^3}$ (cæteris evanescentibus, propter tum $s = 0$, tum $v = 0$;) adeoque (propter magnitudines $\frac{a^3R}{6P^2}$,) Distantiæ Centri gravi- L.

Fig. 199, 200. gravitatis, ab EMG, versus P, $\frac{6R^3}{aP}$. Ubi exponendus est a in fine Circulationis primæ, per P; secundæ, per $2P$; tertiæ, per $3P$; &c.

Pro dimidiatis Circulationibus, quæ integras non terminant, (unâ, tribus, quinque, &c.) propter $s = 0$, & $v = 2R$; Momenta sunt, $\frac{12R^6 - 3a^2R^4}{3P^3} = \frac{4R^6 - a^2R^4}{P^3}$; & (propter Magnitudines, ut prius, $\frac{a^3R}{6P^2}$,) Distantiæ Centri gravitatis ab EMG, versus P, $\frac{24R^5 - 6a^2R^3}{a^3P}$; Hoc est revera (propter prævalentiam signi —,) versus F, $\frac{-24R^5 + 6a^2R^3}{a^3P}$: Exponendus utique est a in fine Semicirculationis Primæ, per $\frac{1}{2}P$; Tertiæ, per $\frac{3}{2}P$; Quintæ, per $\frac{5}{2}P$; & sic deinceps: adeoque a^2 in omnibus plus erit quam $4R^2$; est enim, $\frac{1}{2}P$ plus quam $2R$.

Pro circulationibus quadrantalibus (quæ Semicirculationes non terminant) unâ, tribus, quinque, &c. propter tum $s = R$ in primâ, quintâ, nonâ, &c. et $s = -R$, in tertiâ, septimâ, undecimâ, &c. tum $v = R$, in singulis: Momenta sunt $\frac{6R^6 - 6aR^5 + a^3R^3}{3P^3}$; & (propter magnitudines, ut prius,) Distantiæ Centri gravitatis ab EMP, versus P, $\frac{12R^5 - 12aR^4 + 2a^3R^2}{a^3P}$; nempe pro primâ, quintâ, nonâ, &c. sed, pro tertiâ, septimâ, undecimâ, &c. (propter s contrario signo exponendum,) Momenta $\frac{6R^6 + 6aR^5 - a^3R^3}{3P^3}$; Distantiæ, versus P, $\frac{12R^5 + 12aR^4 - 2a^3R^2}{a^3P}$; hoc est, (propter prævalentiam signi —,) versus F, $\frac{-12R^5 - 12aR^4 + 2a^3R^2}{a^3P}$. Exponendus autem est a, in primâ, tertiâ, quintâ, &c. per $\frac{1}{4}P$, $\frac{3}{4}P$, $\frac{5}{4}P$, &c.

Si libeat singulos Circulationum Quadrantes seorsum perpendere, id facile fiet.

Quadrantis Primi MTEM, momentum respectu EMG, jam ostensum est $\frac{6R^6 - 6aR^5 + a^3R^3}{3P^3} = \frac{384R^6 - 96R^5P + R^3P^3}{192P^3}$ (propter

ter $a = \frac{1}{4} P$:) Distantia Centri gravitatis ab EMG versus P, Fig. 199, 200.
$\frac{12 R^5 - 12 a R^4 + 2 a^3 R^2}{a^3 P} = \frac{768 R^5 - 192 R^4 P + 2 R^2 P^3}{P^4}$.

Semicirculationis Primæ, MTEFM; Momentum $\frac{4 R^6 - a^2 R^4}{P^3}$ $= \frac{16 R^6 - R^4 P^2}{4 P^3}$ (propter $a = \frac{1}{2} P$;) Distantia ab EMG versus P, $\frac{24 R^5 - 6 a^2 R^3}{a^3 P} = \frac{192 R^5 - 12 R^3 P^2}{P^4}$: Hoc est, revera, versus F, $\frac{-192 R^5 + 12 R^3 P^2}{P^4}$.

Ex hujus Momento, si subducatur Momentum primi quadrantis; habetur Secundi quadrantis MEFM, Momentum respectu EMG, $\frac{384 R^6 + 96 R^5 P - 48 R^4 P^2 - R^3 P^3}{192 P^3}$: Et (propter magnitudinem $\frac{7}{384} R P$;) Distantia Centri gravitatis ab EMG versus P, $\frac{768 R^5 + 192 R^4 P - 96 R^3 P^2 - 2 R^2 P^3}{7 P^4}$: Hoc est, versus F, $\frac{-768 R^5 - 192 R^4 P + 96 R^3 P^2 + 2 R^2 P^3}{7 P^4}$.

Circulationis Dodrantalis, seu Trium quadrantum, MTEFGM; Momentum respectu EMG, est $\frac{6 R^6 + 6 a R^5 - a^3 R^3}{3 P^3} =$ $\frac{384 R^6 + 288 R^5 P - 27 R^3 P^3}{192 P^3} = \frac{128 R^6 + 96 R^5 P - 9 R^3 P^3}{64 P^3}$ (propter $a = \frac{3}{4} P$;) Distantia Centri gravitatis ab EMG versus P, $\frac{12 R^5 + 12 a R^4 - 2 a^3 R^2}{a^3 P} = \frac{768 R^5 + 576 R^4 P - 54 R^2 P^3}{P^4}$; Hoc est, versus F, $\frac{-768 R^5 - 576 R^4 P + 54 R^2 P^3}{P^4}$.

Ex hujus itaque Momento, si subducatur Momentum Semicirculationis Primæ; habetur Tertiæ quadrantalis MFGM, Momentum respectu EMG, $\frac{-384 R^6 + 288 R^5 P + 48 R^4 P^2 - 27 R^3 P^3}{192 P^3}$ $= \frac{-128 R^6 + 96 R^5 P + 16 R^4 P^2 - 9 R^3 P^3}{64 P^3}$: Et (propter magnitudinem $\frac{19}{384} R P$,) Distantia Centri gravitatis ab EMG, versus P,

Fig. 199, 200. $\frac{-768R^5 + 576R^4P + 96R^3P^2 - 54R^2P^3}{19P^4}$; Hoc eſt, revera, verſus F, $\frac{768R^5 - 576R^4P - 96R^3P^2 + 54R^2P^3}{19P^4}$.

Integræ Circulationis Primæ, MTEFGAM; Momentum reſpectu EMG eſt $\frac{a^2R^4}{P^3} = \frac{R^4}{P}$ (propter $a = P$:) Diſtantia Centri gravitatis ab EMG, verſus P, $\frac{6R^3}{P^2}$.

Ex hujus itaque Momento, ſi ſubducatur Momentum Circulationis Dodrantalis; habetur Quadrantalis Quartæ Momentum $\frac{-384R^6 - 288R^5P + 192R^4P^2 + 27R^3P^3}{192P^3} = \frac{-128R^6 - 96R^5P + 64R^4P^2 + 9R^3P^3}{64P^3}$: Et (propter magnitudinem $\frac{37}{384}RP$,) Diſtantia Centri gravitatis ab EMG, verſus P, $\frac{-768R^5 - 576R^4P + 384R^3P^2 + 54R^2P^3}{37P^4}$.

Quadrantalium Quinque, MTEFGAH, (repetito quod erat in prima,) Momentum reſpectu EMG, eſt $\frac{6R^6 - 6aR^5 + a^3R^3}{3P^3} = \frac{384R^6 - 480R^5P + 125R^3P^3}{192P^3}$: Diſtantia Centri gravitatis ab EMG, verſus P, $\frac{12R^5 - 12aR^4 + 2a^3R^2}{a^3P} = \frac{768R^5 - 960R^4P + 250R^2P^3}{P^4}$.

Ex hujus itaque Momento, ſi ſubducatur Momentum integræ Circulationis Primæ; habetur Momentum Quadrantalis Quintæ, reſpectu EMG, $\frac{384R^6 - 480R^5P - 192R^4P^2 + 125R^3P^3}{192P^3}$: Et (propter magnitudinem $\frac{61}{384}RP$,) Diſtantia Centri gravitatis ab EMG, verſus P, $\frac{768R^5 - 960R^4P - 384R^3P + 250R^2P^3}{61P^4}$.

Et ſic deinceps quouſque libet.

K. Atque eâdem operâ determinavimus, in Solido *Scalari*, (ſuper figuram Spiralem TTM obliquo ſitu aſcendentem, altitudinem eandem

eandem quamlibet habente super obliquè ascendentem figuram spiralem,) magnitudinem, momentum, atque distantiam Centri gravitatis ab erecto super EMG plano. Quippe eadem omnia hic locum habent respectu erecti in EMG plani; quæ respectu plani in PMF erecti supra diximus, § G. Ut non sit opus eadem repetere.

PROP. XXVIII.

Quæ in Propositione præcedente, de Spirali *Archimedeâ*, tradita sunt; eadem omnia Spiralibus aliis facilè accommodantur, in quibus Radii MT, MT, continuè crescant, non quidem (ut in illa) in ipsorum AMT, AMT, angulorum ratione, sed & in ipsorum ratione Duplicatâ, Triplicatâ, Quadruplicatâ, aliásve utcunque multiplicatâ: aut etiam in Subtriplicatâ, hujusce utcunque multiplicatâ. A.Q. Fig.199, 200.

Sed &, Magnitudinem quod spectat, iis etiam in quibus crescant MT, MT, radii, in eorundem AMT, AMT, ratione Subduplicatâ, Subquadruplicatâ, aliásve utcunque Submultiplicatâ; vel etiam in ratione subduplicatæ triplicatâ, quintuplicatâ, &c. aut subquadruplicatæ, quintuplicatâ, septuplicatâ, &c. aliásve ex multiplicatis & submultiplicatis compositâ; aut etiam alias per numeros surdos designanda. A.

Quod ad Momenta verò, & Centra gravitatis, quæ dicta sunt, non ita facilè ad has accommodantur ubi ratio submultiplicata est, seu ex submultiplicatâ composita quæ multiplicatæ non æquepolleat, vel saltem subtriplicatæ, aut hujus multiplicatæ. Q.

Suntque hæ Spirales omnes ex Parabolarum vel Parabo- C.

loidium correſpondentium convolutione factæ; poſſuntque in Parabolas illas ſeu Paraboloidea evolvi.

C.D. Illa quidem Spiralis *Archimedea*, ex *Apollonianâ* Parabola: Eâ nempe, quæ Baſem habeat æqualem Spiralis radio terminali; Axémque æqualem ſemiſſi arcus Sectoris contermini.

E. Cujus quidem Parabolæ ſemiſſi, æquatur illa Figura Spiralis. Unde conſtat, omnino poſſibilem eſſe Figuram Rectilineam, Circulo æqualem; ejuſve Sectori cuilibet.

F. Ex datâ verò Altitudine iſtius Parabolæ, quæ Datæ Spirali reſpondeat; datur circuli Quadratura.

G. Rectaque Parabolam tangens, eandem cum Ordinata angulum facit, quem facit cum Spiralis correſpondente Radio recta Spiralem tangens.

H. Unde alia colligitur circuli quadratura *Archimedea* (Qualis

K. & ab aliis Spiralibus colligi poterit.)

I. Et, Curvam Parabolæ, æqualem eſſe Spiralis Curvæ.

L.M. Aliæ verò; ex iis Paraboloidibus in quibus Ordinatim-ap-

N.P. plicatæ ſint ſeries Indicem habens $\frac{1}{S+1}$; poſito ſeriei rectarum MT Indice S; Baſiſque Paraboloidis, æqualis ipſi MT terminali; ejuſque altitudo, ad longitudinem arcûs Sectoris contermini, ut 1 ad $S+1$.

K. Poſſúntque pari modo ex aliis item Figuris (putà Hyperbolicis, Ellipticis, aliíſve mille modis variatis,) alia Spiralium genera Convolutione fieri; atque in eas unde conſtruuntur evolvi. Quarum quidem Figurarum Spiralium menſuræ, ex illarum figurarum menſuris dependent, quarum Convolutione fiunt.

K. Sunt utique Figuræ Spirales, non modò quæ ex Convolutis Parabolis, ſed & quæ ex aliis figuris Convolutis oriuntur; Figurarum illarum, ex quarum Convolutione fiunt, Dimidiæ,

Et

Et quidem non modò Curva Spiralis *Archimedea*, eſt æqualis Curvæ Parabolicæ *Apollonianæ* correſpondenti; ſed & aliæ Spirales quælibet, æquales illis reſpective ſive curvis ſive rectis quarum Convolutione fiunt. K.

Adeoque cognitâ Figuræ Spiralis Magnitudine, vel Curvæ Spiralis longitudine; cognoſcitur ſimiliter vel magnitudo iſtius figuræ cujus Convolutione fit, vel longitudo lineæ: Et vice verſa. K.

Et quidem Spiralis illa cujus rectæ MT, creſcunt in angulorum AMT ratione duplicatâ, non modò rationem habet cognitam ad Sectorem conterminum; ſed ipſius Curvæ Rectam æqualem aſſignare licet, eámque in data ratione ſecare. O.

Quod ipſum aliis item Spiralibus innumeris contingit.

Sed & Figura Spiralis (ex Paraboloide convoluta) aſſignari poteſt, quæ ad Sectorem conterminum rationem quamvis datam habeat; ſaltem Minoris ad Majus, numeris explicabilem: Et Paraboloides ſimiliter, eidem correſpondens: Ut & cuivis Paraboloidi reſpondens Spiralis. B. N.

Poteſtque hæc Spiralium doctrina, ad alia multa Spiralium genera ampliari. R.

SI Spiralis Radii MT, MT, creſcant, non quidem in ratione Angulorum AMT, AMT, (ut in Spirali *Archimedea*,) ſed in eorundem ratione duplicata, puta ut a^2: Erunt Sectores ſimiles (figuram Spiralem componentes) ut a^4 (utpote in duplicata ratione arcuum ſuorum:) Adeoque, eorundem aggregatum ad aggregatum totidem maximo æqualium; hoc eſt, Figura Spiralis, ad Sectorem conterminum; ut 1 ad 5 ($= 4 + 1$,) per prop. 1. hujus. A. Fig. 199, 200.

Si Radii MT, MT, ſint in angulorum AMT, ſeu PMT, ratione triplicata; hoc eſt, ut a^3; adeoque Sectores ſimiles, ut a^6; erunt ſimul omnes ad totidem maximo æquales; hoc eſt, Figura Spiralis ad conterminum Sectorem; ut 1 ad 7. per eandem 1 hujus.

Et, univerſaliter, ſi Radii MT, creſcant in Angulorum PMT, ratione Simplâ, Duplicatâ, Triplicatâ, Quadruplicatâ, &c. Figura

Fig.199, 200. Spiralis, ad Sectorem conterminum, erit ut 1, ad 3, 5, 7, 9, &c. (Non, ut 1 ad 3, 4, 5, 6, &c. quod per incuriam ſcriptum erat in *Arithm. Infin.* Schol. Prop. 45.) propter Sectores Similes in Radiorum ratione duplicatâ.

Et ſimiliter; ſi creſcant Radii in Angulorum ratione Subduplicatâ, Subtriplicatâ, Subquadruplicatâ, &c. adeoque Sectores in ratione Simpla, Duplicata Subtriplicatæ, Subduplicatâ, &c. Figura Spiralis ad Sectorum conterminum erit, ut 1 ad $1+1$, $\frac{2}{3}+1$, $\frac{1}{2}+1$, &c. hoc eſt, ut 1 ad 2, $\frac{5}{3}$, $\frac{3}{2}$, &c. vel 1 ad 2; 3 ad 5; 4 ad 6, &c.

Si creſcant Radii in Angulorum ratione Duplicatâ ſubtriplicatæ, Triplicatâ ſubquadruplicatæ, &c. adeoque Sectores, in ratione Quadruplicatâ ſubtriplicatæ, Triplicatâ ſubduplicatæ, &c. (utpote in duplicatâ ratione radiorum;) erit Figura Spiralis ad conterminum Sectorem, ut 1 ad $\frac{4}{3}+1$, $\frac{3}{2}+1$, &c. (nempe ut 1 ad ſeriei indicem unitate actum, per prop. 1. hujus;) hoc eſt, ut 3 ad 7, 2 ad 5, &c.

Quod ipſum ſimiliter valeret, ſi intelligerentur Radii creſcentes ſecundum Seriem cujus Index ſit numerus ſurdus, puta $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, &c. adeoque Index ſeriei Sectorum, $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}$, &c. quippe Figura Spiralis eſſet ad Sectorem conterminum, ut 1 ad $2\sqrt{2}+1$, $2\sqrt{3}+1$, &c.

Illud utique ubique obtinet; ſi Radii ſint ut Series cujus Index ſit S; Sectorum Series Indicem habebit $2S$; adeoque ſumma Sectorum omnium ad maximum toties ſumptum; hoc eſt, Figura Spiralis ad Sectorem conterminum; ut, 1 ad $2S+1$: per prop. 1. hujus.

B. Et conſequenter, Facilè aſſignabitur Spiralis ſic conſtructa, ut Figura Spiralis, ad Sectorem conterminum, datam habeat (minoris ad majus) rationem. Eſto enim ratio data, ut 1 ad D. Quoniam eſt (ut jam oſtendimus) Figura Spiralis ad Sectorem conterminum ut 1 ad $2S+1$; atque imperatum eſt ut ſit, ut 1 ad D; erunt 1 ad $2S+1$, & 1 ad D, eadem ratio; adeoque $D = 2S+1$, hoc eſt $D-1 = 2S$, & $\frac{D-1}{2} = S$. Si itaque Radii MT, ponantur ut Series Indicem habens $\frac{D-1}{2}$; erit figura Spiralis ad conterminum Sectorem, ut 1 ad D, in ratione data. Cum enim Series Radiorum Indicem habeat $\frac{D-1}{2}$; Series Sectorum habebit Indicem

(iſtius

(istius duplum) $D-1$; adeoque Sectorum crescentium aggregatum, ad totidem maximo æqualium; hoc est, Figura Spiralis ad Sectorem conterminum; erit ut 1 ad D; nempe ad Seriei indicem $D-1$, unitate auctum. (per prop. 1. hujus.) quod erat imperatum. Fig. 199, 200.

Puta; Si ratio data; sit 1 ad 2; adeoque (posito $D=2$,) $\frac{D-1}{2}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$. Erunt MT, Series *Subsecundanorum*: hoc est, in subduplicatâ ratione angulorum PMT.

Si ratio data, sit 1 ad 5; adeoque (posito $D=5$) $\frac{D-1}{2}=2$. Erunt MT, Series *Secundanorum*; seu, in duplicata ratione angulorum PMT.

Si ratio data, sit 1 ad 3; adeoque $\frac{D-1}{2}=1$. Erunt MT, series *Primanorum*, seu in ipsa angulorum PMT ratione. Quæ est Spiralis *Archimedea*.

Si ratio data, sit 2 ad 3; seu 1 ad $\frac{3}{2}$; adeoque $\frac{D-1}{2}=\frac{1}{4}$. Erunt MT, Series *Subquartanorum*; seu in angulorum ratione Subquadruplicata.

Si data ratio, sit 1 ad 4; adeoque $\frac{D-1}{2}=\frac{3}{2}$. Erunt MT, Series *Radicum Quadraticarum Tertianorum*: seu in angulorum ratione Subduplicata-triplicatæ. Et similiter alibi, quæcunque fuerit ratio data.

Dico autem, In Ratione *Minoris ad Majus*: Quia supponitur Spiralis (à Principio orsa) radios habere MT, ab o continuè crescentes; totaque, circumscripto Sectore contermino Minor.

Si verò proponeretur Ratio æqualitatis, 1 ad 1; adeoque $\frac{D-1}{2}=\frac{0}{2}=0$: Essent MT Series æqualium (cujus index o;) &, pro figura Spirali, prodiret Circuli Sector, (ex Convoluto Parallelogrammo confectus,) cum ipso Sectore (quem conterminum supponimus) coincidens.

Sin proponeretur *Majoritatis* ratio, puta 2 ad 1; seu 1 ad $\frac{1}{2}$: adeoque $\frac{D-1}{2}=-\frac{1}{4}$: Essent MT ex eis Seriebus una quas *Reciprocas* definivimus, (def. 2. hujus.) puta *Reciproca Subquartanorum*,

Fig.199, 200. cujus Index $-\frac{1}{4}$. Adeoque non inciperent MT, ab o, crescendo; sed ab Infinito ($\frac{1}{0} = \infty$) decrescendo: Essetque conterminus Sector, non quidem Cicumscriptus sed Inscriptus.

Quæ quidem Figuræ, utut pro Spiralium generibus haberi possint, & aliarum Spiralium leges non refugiant (debitè accommodatas:) nos tamen eas potissimum hic spectamus quæ contermino Sectore includuntur. Quamquam si libeat Spiralium nomen ad illas etiam ampliare; erunt utcunque ad reliquas Spirales similiter redigendæ, (nostrísque subjiciendæ legibus;) atque Figuræ quas *Reciprocas* dicimus, ad Paraboloïdium familiam.

C. Quod autem Spiralis *Archimedea*, aliud non sit quam Convoluta Parabola *Apolloniana*; sic evidentissimè demonstratur.

Fig.200, 202. Sumptis ad Spiraliem Fig. 200. MT, MT; hoc est MP, MP, quotlibet; ut 1, 3, 5, 7, &c. arithmeticè proportionalibus: totidémque ad Parabolam rectam Fig. 202. illis respectivè æqualibus MP, MP; hoc est, mT, mT: atque his proportionalibus utrobique ZY, ZY hoc est Mμ, μμ, &c. Sumptoque ubivis figuræ Spiralis termino, puta MF, cui æqualis ponatur μF basis Parabolæ: hujusque altitudo FΠ seu MB æqualis semissi Peripheriæ sectoris contermini radio MF fig. 200. descripti: Erunt ipsæ Mμ, μμ, seu ZY, ZY, rectæ, fig. 202. ipsis ZY, ZY, arcubus, fig. 200. sigillatim æquales.

Quippe, si intelligantur numero infiniti arcus ZY arithmetice proportionales (ut 1, 3, 5, &c.) erunt hi omnes simul sumpti, æquales semissi totidem maximo æqualium; hoc est, semissi arcûs contermini, radio MF descripti; per prop, 1. hujus. Cui quidem semissi cùm ponatur æqualis altitudo Parabolæ FΠ, seu MB, hoc est, aggregatum omnium μμ seu ZY fig. 202. Sintque tum totidem numero, tum proportionales, ipsis ZY arcubus fig. 202. Erunt singulæ singulis, respective sumptis, æquales.

Cum itaque sint etiam sigillatim MP seu mT fig. 200. ipsis MP, seu MT, fig. 202. æpuales: Si intelligantur omnia m, μ, puncta, in unum M colligi; (toto Parabolæ axe in verticis Punctum contracto;) manentibus rectarum μZ, mT, μY, longitudinibus; rectisque ZTY, in arcum flexis: Rectangula ZμμY, in Sectores contracta, ipsis ZMY sectoribus, respective sumptis, congruent; propter tum radiorum, tum arcuum æqualitatem.

Sed Sectores illi ZMY, si numero infiniti intelligantur idem sunt atque Figura Spiralis (per def. 1. cap. 4.) ipsaque similiter Rectangula ZμμY, idem atque Planum Parabolæ: Si itaque *Parabola* sic

Con-

Convoluta intelligatur, ut ea omnia ex quibus conflari intelligatur Rectangula, in totidem Sectores contrahantur; fit Figura Spiralis. Fig. 200, 202.

Et quidem ea fit Spiralis (ut ex demonstratis constat) cujus terminalis recta ut M F, sit æqualis ipsi B F basi Parabolæ; angulusque circulationis tantus, ut contermini Sectoris arcus, duplus sit altitudinis Parabolæ: Hoc est, quæ eam habet rationem ad unam Circulationem integram, quam habet Parabolæ altitudo dupla, ad peripheriam integram ejusdem base descriptam: Vel etiam, (si intelligatur axis B M supra Parabolæ verticem continuati, usque dum in C puncto occurrat rectæ C F parabolam in F contingenti; unde, propter Parabolæ naturam, dupla futura est C B ipsius B M;) eam, quam habet B C (axis continuatus ad occursum rectæ Parabolam in basis puncto contingentis,) ad integram peripheriam quæ Parabolæ base ut Radio describatur. D.

Constat autem, ex hac constructione, (propter singulos Sectores Z M Y, singulorum respective Rectangulorum Z μ μ Y, dimidios;) Figuram Spiralem M T T F M, figuræ Parabolicæ M F B, dimidiam esse; & partes partium, respective sumptarum, dimidias. Quod similiter probabitur, de quovis alio Spiralium genere, quæ ex quacunque fit figurâ sic convolutâ. E.

Constat item (quod ex veteribus dubitarunt nonnulli, nedum ex recentioribus,) Figuram Rectilineam Circulo æqualem esse posse; hujusve Sectori cuilibet: adeoque, rectam Peripheriæ. Cum enim certa sit ratio figuræ spiralis M T T F, tum ad Sectorem conterminum, (nempe, ut 1 ad 3;) tum ad M F B parabolam, ex cujus convolutione fit, (nempe, ut 1 ad 2;) tum denique hujus parabolæ ad circumscriptum rectangulum M B F Π, (nempe, ut 2 ad 3;) erit contermini Sectoris Radio M F descripti (puta Semicirculi) ad M B F Π rectangulum certa ratio; (erit utique æqualis; propter $\frac{3}{1} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = 1$.) Cum itaque nullus sit circulus, cujus trienti non æquetur Figura Spiralis; nullaque figura Spiralis cujus duplo non æquetur Parabola; nullaque Parabola, cujus sesquialtero non æqueтur Rectangulum Rectilineum: Nullus erit Circulus, cui non æquatur Rectangulum Rectilineum.

Constat etiam; si dari possit Altitudo Parabolæ M F B (seu hujus ad Basin ratio) quæ respondeat Spirali M T T F M (cujus circulationis angulus datam rationem habeat ad quatuor rectos;) datum iri rationem Radii, Diametrive, ad Peripheriam Circuli. F.

Sed & eadem F C quæ Parabolam tangit retento eodem cum B F angulo, C F B; eandem etiam curvam tanget, postquam in Spiralem G.

Fig.200, 202. convoluta fuerit Parabola. Nam, quâ ratione probabitur omnes in Parabola rectas m T ordinatim-applicatas, (tum quæ sunt supra B F, tum quæ sunt infra,) solâ B F exceptâ, ad C F contingentem non pertingere: eâdem ostendetur neque ad eam pertingere easdem convolutas in situm M T in Spirali. Quippe si (verbi gratia) ad M F fig. 200. ita constituta sit F C, ut ad illam non pertingeret rectæ M T punctum T, etiamsi extensa Z T Y curva in rectam sisteretur ad ipsam M F perpendicularis (positâ, etiam T M, seu T m, in situ parallelo ad F M, seu F B,) quod fit in Parabolâ: multò minus ad eandem F C pertinget idem T punctum in Z T Y inde recurvatâ; concurrente rectâ T m seu T M cum rectâ F M, in eodem M puncto; quod fit in Spirali.

Unde sequitur; eundem esse, ad tangentem, angulum M F C in Spirali, atque (qui huic correspondet) B F C in Parabolâ.

H. Et consequenter; si intelligatur F (verbi gratia) in fine circulationis primæ, rectaque (ad M F perpendicularis) M C, Tangenti F C occurrens in C; erit ipsa M C fig. 200. (principio Spiralis, & contingente, intercepta,) ipsi B C fig. 202. (Parabolæ axe ad occursum tangentis continuato,) æqualis; (propter angulos ad F utrobique æquales, adeoque similia triangula rectangula;) hoc est, (per modo demonstrata,) integræ Peripheriæ radio M F descriptæ, seu Peripheriæ circuli primi: (ponitur enim F, in termino primæ circulationis; adeoque circulationis angulus, quatuor rectis æqualis.) Id quod ab *Archimede* fusius ostenditur, in libro de Spiralibus; estque ipsius Circuli quadratura, inde deducta; quò præcipuè collimâsse videtur in illa de Spiralibus doctrinâ.

Sin ubivis alibi (quam in fine circulationis primæ) intelligatur illud F punctum; puta in fine semicirculationis primæ, vel primi quadrantis, vel ubivis alias: idem consequi licebit. Quippe tum M C sic ducta (rectæ M F perpendicularis, & F C tangenti occurrens in C,) erit eadem pars (puta, vel semissis, vel quadrans, vel pars alia prout res tulerit,) integræ peripheriæ radio illo M F descriptæ, quæ est, circulationis integræ, exposita circulatio.

I. Sed & inde etiam sequitur; Curvam Spiralem M T T F fig. 200. curvæ Parabolicæ, correspondenti M F fig. 202. æqualem esse. Quippe si intelligantur utrobique sumi partes analogæ infinitè exiguæ; in quibus itaque tangentium F C respectivarum particulæ, pro ipsis F T curvis habeantur per def. 1. cap. 4. (utpote à quibus differunt ratione datâ quâvis minore;) ut & Y T curva, similiter, pro Y T recta, eidem æquali: adeoque minuta Trilinea T Y F, utrobique,

pro

pro Triangulis rectangulis; & quidem (propter æquales utrobique respectivos angulos ad F) invicem similibus; quæ itaque & latera habebunt proportionalia: Erunt, propter Y F rectas utrobique æquales, etiam F T (respectivè sumptæ) itidem æquales. Cúmque hoc ubique contingat; erunt omnes F T curvam Spiralem constituentes, æquales omnibus F T constituentibus curvam Parabolicam; hoc est, M T T F curva spiralis, æqualis correspondenti M F curvæ Parabolicæ. Quod demonstrandum erat. Idemque aliàs demonstravimus, in Tractatu, *De Curvarum* Εὐθύνσει, Tractatui de Cycloide subjuncto. Fig. 200, 202.

Quod etiam in aliis Spiralium generibus non minùs valet. Si intelligatur enim eadem M F B fig. 202. non jam ut *Apolloniana* Parabola, sed ut Paraboloides, Hyperbola, aliave ad libitum figura, in minuta Rectangula, ut Z μ μ Y, resoluta: quæ (punctis omnibus m, μ, in unum M collectis,) in totidem Sectores, (Rectangulorum dimidios,) redigantur: qui quidem vel similes inter se erunt, si eadem ponatur ubique ratio rectarum Z Y ad m T; vel, si secus, dissimiles; (eam utique rationem habebit sectoris cujusvis angulus, ad quatuor rectos; quam habet Z Y ad integram Peripheriam radio m T describendam:) alia atque alia fient Spiralium genera. K.

Neque refert, utrum M F fig. 202. sit curva, an Recta; sed nec, utrum ad unum M verticis punctum terminetur, an secus. Quippe si integrum Rectangulum M B F Π sic convolveretur, (toto M B latere in unicum M punctum collecto, latereque Π F in arcum curvato,) Spiralis hinc oriunda, Circulus esset; vel Sector Circuli, qui eam habeat ad integrum circulum rationem quam F Π recta ad peripheriam radio B F vel M Π descriptam.) Et quidem, si Trilineum M F B, ubivis truncatum rectâ m T, intelligeretur sic convolvi; hoc saltem inde sequeretur discriminis, quod non jam ab puncto ut M, ordiretur Spiralis fig. 200. sed, à rectâ aliquâ, ut M T.

Hoc interim omnibus commune erit; Nempe, Figuram Convolutione factum, ut M T T F fig. 200. dimidiam esse ejusdem evolutæ, ut M F B fig. 202. propter singulos Z M Y sectores, singulorum Z μ μ Y rectangulorum respective sumptorum, dimidios.

Item; Tangentem F C, fig. 202. retento angulo C F B, tangentem etiam fore figuræ convolutæ M T T F M fig. 202. Quippe, & hic non minùs obtinebit præcedens demonstratio, quâ ostendebatur hoc contingere in Spirali *Archimedea*. Si enim rectæ m T, punctum T in Z T Y rectâ, fig. 202. ad T C tangentem non pertingat; multò minùs ad eandem pertinget in eadem Z T Y recurvatâ,

fig.

Fig.200. 202. fig. 200. Quod ipsum obtinet etiam vice versâ: Si enim convoluta curva F T fig. 200. explicanda intelligatur in correspondentem F T fig. 202, quanquam T propius accederet ad T C tangentem, non tamen eò pertingeret: Nisi saltem explicanda esset in lineam rectam, (quod in Circulo fit; cujus explicata curva, eadem futura est cum parallelogrammi pridem convoluti latere;) quippe, hoc casu, explicata linea cum tangente coincidet; quæ enim supponatur recta rectam contingere, alia non erit quàm ipsa recta; quippe, nisi coincidat, secabit. Si vero adhuc ulterius explicanda intelligatur figura, ut non modo ad ipsam F C pertingat T, sed transeat; adeoque F T recurva fiat, in contrarias partes flexa: etiam adhuc eandem F C, sed ad contrarias partes, tanget. Cùm enim flexionis angulus, qui idem est atque augulus contactus magnitudinem vel nullam habeat, vel infinitè exiguam, (sive sit rectæ & curvæ contactus, sive duarum curvarum externè vel internè tangentium,) quod ad prop. 15. cap. 2. ostensum est; eadem quæ prius fuerat manebit recta contingens F C, utcunque flectatur (modò nè frangatur, ut angulum faceat, rectilineo æquipollentem,) F T curva, in puncto F.

Sed &, quâ ratione hinc infertur, (ob cognitum in parabola punctum C in quo cum axe producto Tangens occurrat,) *Archimedea* Circuli quadratura per Tangentem Spiralis: idem etiam simili ratione colligetur, ex aliis innumeris Spiralium generibus, ex convolutis figuris oriundis, in quibus idem C punctum pariter cognoscitur. Cum enim B M B fig. 202. altitudo figuræ convolvendæ, æqualis sit omnibus Z Y arcubus fig. 200. simul sumptis: si quocunque modo colligi poterit quam habeant illi omnes ad contermini Sectoris arcum, quemque hic habeat ad integram peripheriam; conficietur negotium. Quippe cognitâ M C fig. 200. (cujuscunque Spiralis,) cognoscitur etiam (eidem æqualis) B C fig. 202. adeoque, quam habeat ea rationem ad cognitam M B fig. 202. hoc est, ad omnes Z Y fig. 200. adeoque & (cùm horum ad arcum Sectoris contermini ratio nota ponatur,) ad arcum Sectoris contermini, & propterea (cum hujus ratio ad integram peripheriam nota ponatur) ad circuli peripheriam radio M F fig. 200. vel B F fig. 202. descriptam.

Item M F figuræ convolvendæ fig. 202. æqualem Curvæ figuræ convolutæ M T T F fig. 200. Quippe Demonstratio priùs adhibita in comparatis invicem *Apollonianâ* Parabolâ, & Spirali *Archimedeâ*; in aliis non minùs obtinet. Nempe, in partibus infinitè exiguis, habenda esse utrobique T Y F trilinea, pro Triangulis rectangulis, & quidem (propter æquales utrobique angulos ad F) invicem similibus;

adeoque

adeoque, propter æquales utrobique Y F, æquales item erunt F T; atque hoc semper. Æqualis itaque tota M F curva fig. 202. toti M T T F fig. 200. Fig. 200, 202.

Et propterea; ex cognitâ vel figuræ Spiralis magnitudine, vel Curvæ Spiralis longitudine; similitur cognoscitur vel Magnitudo figuræ quæ cujus convolutione fit, vel longitudo lineæ. Et vice versâ.

Ut autem, ex convolutâ Parabolâ, fit Spiralis *Archimedea*; sic, ex Paraboloidibus convolutis, fiunt Spirales aliæ; quarum radii M T crescunt in ratione angulorum A M T duplicatâ, triplicatâ aliâsve multiplicatâ; vel subduplicatâ, subtriplicatâ, aliâsve submultiplicatâ; aut etiam ex his utcunque compositâ. L.

Quod eodem modo ostendi potest quo in Parabolâ id ostensum est; sumptis Paraboloidibus idoneis, in quibus rectæ M B, M π, sic dividantur ut M μ, μ μ, &c. hoc est Z Y, Z Y, &c. sint ipsis M P, M P, &c. proportionales, (quò sectores Z M Y fig. 200. ex rectangulis Z μ μ Y fig. 202. convolutis facti, similes sint,) Paraboloidisque curva per ipsas Z Y, Z Y, rectas transeat. (Quod aliis aliisque modis, pro variis Paraboloidum generibus, faciendum erit.) Hoc enim facto, ostendetur, ut priùs in Parabolâ, singula Rectangula, in respectivos Sectores, ipsorum dimidios, convolutum iri: reliquaque quæ hinc sequuntur.

Cùm verò alius occurrat modus expeditior, aliunde sumptis principiis, idem præstandi; (neque lectori, credo, displicebit varietas;) rem sic aggrediemur; ea methodo quâ ad *Arithm. Infin. prop.* 36. &c. usus sum.

In Spirali *Archimedeâ*, M T T F, fig. 199. sumptis Sectoribus similibus; adeoque tum radiis M T, M T, &c. hoc est, M P, M P, &c. tum angulis P M T, P M T, &c. arithmeticè proportionalibus; ut 1, 2, 3, 4, &c. Erunt arcus P T, P T, (utpote in ratione quæ ex radiorum M P, & angulorum M P T, rationibus componitur,) ut 1, 4, 9, 16, &c. series Secundanorum; (nempe uno gradu altior quàm est series Radiorum M P, propter angulos M P T, in ratione seriei Primanorum, seu arithmetice-proportionalium:) adeoque, si in rectas expandi intelligantur, erunt ut totidem ordinatim-applicatæ in complemento Parabolæ, (axem habente M P; altitudinem, ipsi P F, non ut prius hujus dimidio, æqualem,) utpote in ratione duplicatâ axium M P, M P: (quales sunt P T, P T, complentes Semiparabolæ complementum M T F π fig. 202. sumptis B F, F π, fig. 202. æqualibus ipsis M F, F O P, fig. 199.) & propterea, Fig. 199, 202.

simul

ſimul omnes, (hoc eſt M T P, ſpiralis complementum ad conterminum ſectorem,) æquantur Trienti Rectanguli Parabolæ circumſcripti; hoc eſt, $\frac{1}{3}$ M P × P F, ſeu $\frac{1}{3}$ M Π × Π F, (per 1. vel 6. hujus.) Eſtque Conterminus Sector M P F M, (utpote ex arcubus arithmetice proportionalibus conflatus,) = $\frac{1}{2}$ M P × P F, (per 1. hujus.) Ergo, figura Spiralis (utpote Sectoris reſiduum,) = $\frac{1}{6}$ M P × P F, (propter $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$;) hoc eſt, (propter $\frac{1}{6} . \frac{1}{2} :: 1 . 3$,) ad Sectorem conterminum, ut 1, ad 3.

Fig. 199, 200, 202. Nequis autem hæſitet, cur parabolæ M F B fig. 202. altitudinem, jam ponam, ipſius arcus contermini P F fig. 199. longitudini æqualem; quam prius fueram arcûs P F fig. 200. dimidiam: ratio in promptu eſt. Cùm enim retinentibus ſuam ſingulis longitudinem rectis Z Y, utut in axem curvatis; dum, in rectis M B, contrahuntur μμ in unicum m punctum; adeoque Parabolæ magnitudo decreſcat: neceſſe eſt ut, in Π F, rectæ ξυ (ipſis Z Y æquales) protrahantur putà in Ξ Υ, (quibus reſpondeant, in Sectore Spirali contermino, arcus O O;) adeóque Complementi magnitudo creſcat. Et propterea, dum complementum conſideramus, (juxta hanc hypotheſin,) facienda erit Π F (complementi Semiparabolæ ſeu Semiparaboloidis baſis) ipſi P O F ſemper æqualis, (quicunque fuerit Parabolæ ſeu Paraboloidis gradus,) utpote quæ ex omnibus Ξ Υ, (hoc eſt, omnibus O O,) componitur. Dum verò Parabolam vel Paraboloidem figuram M F B (juxta priorem hypotheſin) conſideramus; facienda eſt M B parabolæ ſeu paraboloidis altitudo, (non quidem omnibus O O, hoc eſt ipſi P O F,) ſed omnibus Z Y ſimul ſumptis æqualis: hoc eſt, in Spirali *Archimedeâ*, (propter ipſas M T, adeoque Z Y, fig. 200. arithmeticè proportionales,) æqualis ſemiſſi arcûs P O F: Sed, ſi eſſent ipſæ M T, adeoque Z Y, ut illarum Quadrata (ſeu in duplicatâ ratione angulorum P M T,) hoc eſt, ut ſeries Secundanorum; eſſet M B = $\frac{1}{3}$ P O F: Si ut Series Tertianorum; eſſet M B = $\frac{1}{4}$ P O F: Et ſic in aliis gradibus, prout cujuſque ratio poſtulaverit; per prop. 1. hujus. (Quod in *Arithmetica Infinitorum*, prop. 5. & ſequentibus, fuſiùs oſtendimus.) Atque hinc eſt, quod dum, in complemento conſiderando, reputamus omnes O O, hoc eſt Ξ Υ, invicem æquales: in Parabolâ, ſeu Paraboloide, reputamus ipſas μμ, ſeu Z Y rectas; hoc eſt, in Spirali, arcus R Y; continue creſcentes, in ratione ipſarum m T, ſeu M T, rectarum. Quæcunque enim fuerit ipſarum Z Y differentia; dummodo idem ſit angulus Z m Y ſeu Z M Y, eademque Radii M O ſeu m O longitudo; eadem ubique erit ipſius Ξ Υ ſeu O O longitudo. Tantundem utique ſunt Triangula Z m Y, Ξ m Υ,

atque

atque Sectores ZMY, OMO, respectivè sumpti; per 12 hujus. Quæ aliquantò fusiùs explicanda putabam, quò clariùs percipiantur omnia.

Eodem planè modo; si intelligatur Spiralis MTTF fig. 203. ita construi, ut, sumptis angulis PMT, PMT, arithmetice proportionalibus, (ut prius;) radii MT, MT, seu Mp, Mp, sint in eorum ratione Duplicatâ; seu, ut series Secundanorum: manifestum est, Arcus pT, pT, seriem esse Tertianorum (uno gradu altiorem quam est Series radiorum Mp, Mp,) utpote quorum rationes componuntur ea rationibus radiorum Mp (quæ est Series Secundanorum,) & angulorum PMT (quæ est series Primanorum) respectivè sumptorum. Puta, ut rectæ pT, pT, fig. 204. diametro MP ordinatim-applicatæ, in paraboloidis, complemento MPF. Cujus quidem diametri Mp, Mp, sunt ut Secundana, sive Quadrata arithmeticè-proportionalium; ordinatim-applicatæ pT, pT, ut Tertiana, seu arithmetice-proportionalium Cubi: Adeoque in Diametrorum ratione Subduplicatæ-Triplicata. Quæ itaque, si æqualibus intervallis sumerentur (non, uti nunc sunt, propter Mp, Mp, in ratione secundanorum;) hoc est, ut ordinatim-applicatæ ad diametros Mp arithmetice-proportionales; series essent Indicem habens $\frac{3}{2}$. Quarum itaque ratio, ad maximam toties sumptam; hoc est, ratio complementi MTFP ad Parallelogrammum circumscriptum MBFP; est, ut 1 ad $\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$; seu ut 2 ad 5. Est autem Sector PMF fig. 203. ad idem Parallelogrammum, ut 1 ad 2: (æquatur enim Sector, uti notum est, semissi rectanguli quod illius Radio & Arcu comprehenditur.) Cum itaque (propter singulos arcus pT, singulis rectis pT respective sumptis æquales; & eandem utrobique altitudinem MP;) Complementum Spiralis MTFP fig. 203. æquale sit Complemento Paraboloideos MTFP fig. 204. erit Complementum illud Spiralis MTFP, ad Sectorem conterminum PMF; ut $\frac{2}{5}$ ad $\frac{1}{2}$; seu 4 ad 5: Et consequenter (quod reliquum est) Figura Spiralis MTFM, ad eundem Sectorem, ut 1 ad 5. (Quod etiam priùs ostensum erat ad § A.) Arcusque Tf fig. 203. complentes figuram Spiralem MTF; tantundem sunt atque rectæ Tf fig. 204. complentes Bilineum MTFM. (Uti etiam ipsa Tf, fig. 202. tantundem sunt atque Tf arcus fig. 199. complentes figuram Spiralem MTPM; seu, qui arcubus PT desunt ad complendum Sectorem conterminum.) Cum enim rectæ pf complentes Triangulum MFP fig. 204. tantundem sint atque pf arcus complentes Sectorem MFP fig. 203. (utpote utrobique arithmetice pro-

M. Fig. 203, 204.

 portionales,

Fig.203, 204. portionales, & maxima maximæ æqualis, eademque utrobique altitudo;) sintque rectæ p T tantundem atque p T arcus: sequitur, Rectas residuas T f, tantundem esse atque residuos arcus F f.

N. Sed & simul innotescit, ex cujus Paraboloideos convolutione, oriatur exposita Spiralis, cujus radii M T sint in duplicatâ ratione angulorum P M T. Nempe Paraboloideos Semicubicalis, (quippe talis est M T F curva fig. 204. ut ex constructione patet;) hoc est, cujus ordinatim-applicatæ T p in complemento, sint in diametrorum M p ratione Subduplicatæ-Triplicata; & propterea in Paraboloide, ordinatim-applicatæ T d, hoc est, p M, in diametrorum M d, hoc est p T, ratione Duplicata Subtriplicatæ.

Cujus quidem Paraboloideos Basis B F, æqualis esse debet ipsi M F terminali in Spirali: Altitudo verò, non ipsi M B fig. 204. hoc est, arcui P F fig. 203. seu aggregato omnium O O (quales in fig. 199, 200. conspiciuntur;) sed in eâ ad ipsam M B fig. 204. ratione, quæ est (figuræ naturâ ritè perpensâ) omnium Z Y, ad omnes O O, seu Ξ Υ, (quales in fig. 199, 202. conspiciuntur:) Hoc est, in præsenti casu (propter ipsas M T, adeoque Z Y, seriem Secundanorum,) ut 1 ad 3. Adeoque, si Paraboloidis Semicubicalis, cujus basis sit B F, altitudo $\frac{1}{3}$ M B, fig. 204. omnia rectangula (qualia Z μ μ Y fig. 202.) in totidem triangula (ut Z m Y) seu Sectores Z M Y (prout in fig. 200.) convolvi intelligantur: fiet figura Spiralis M T F M fig. 203. æqualis istius Paraboloideos semissi. Quæ eodem modo demonstrantur, quo eadem de Parabolâ & Spirali *Archimedeâ* ostenduntur, § C, D, E.

Idemque ex calculo patet. Cum enim Index seu Exponens seriei Complementi M F P fig. 204. sit (ut supra ostensum est) $\frac{2}{3}$; adeoque ipsius Paraboloideos M F B, $\frac{3}{2}$; erit hujus ad circumscriptum Parallelogrammum M P F B, (per prop. 1. hujus) ut 1, ad $1\frac{2}{3}$; seu 3 ad 5: Adeoque si (cæteris manentibus) sumatur altitudo subtripla, (quod faciendum esse ostendimus,) fiet ratio, ut 1 ad 5: Et consequenter, (quæ hujus est dimidia,) figura Spiralis M T F M fig. 203. ad idem Parallelogrammum M P F B fig. 204, ut 1 ad 10; hoc est, ad P M F fig. 203. Sectorem conterminum, (Parallelogrammi dimidium,) ut 1 ad 5. Quod fieri debere, supra ostensum est.

O. Similiter etiam ostendetur, (ut ad § I, K.) Curvam istius paraboloideos sic constructi, æqualem esse curvæ Spiralis M T F fig. 203. Verùm hujus Paraboloideos Curvæ, æqualem rectam jam olim exhibuit *Neilius* noster, (Anno 1657. omnium primus,) &, post illum alii; (quod in Tractatu *De Curvarum* Ἐυθύνσει, pag. 91. &

& seqq. ostendimus.) Ergo, ipsi M T F Spirali, æqualis recta exhibebitur. Supposita circuli quadratura, quæ hic necessaria erit pro designanda Paraboloideos altitudine, quæ (ut ex prædictis patet) expositæ Spirali conveniat: utpote cujus altitudo, æqualis esse debet trienti arcus P F. Fig. 203, 204.

Quodque de rectâ hujus Spiralis curvæ æquali ostensum est; similiter & aliis Spiralibus accommodabitur, quæ ex ejusmodi paraboloidibus aliisve figuris convolutis fiunt, quarum curvis æquales rectæ assignari possunt. De quibus fusius egimus in Tractatu *De Curvarum* Εὐθύνσει, præsertim pag. 111. & seqq.

Ad eandem formam procedendum erit, in aliis Spiralibus, quarum Radii M T, sint in angulorum P M T ratione multiplicatâ, submultiplicatâ, vel ex his utcunque compositâ. Sunto enim verbi gratiâ, (ut unâ vice omnes absolvam,) ipsæ M T, seu M P, fig. 203. series Exponentem seu Indicem habens S: erunt itaque arcus P C (utpote in ratione ex Radiorum & Angulorum rationibus compositâ) series uno gradu altior; adeoque Indicem habens $S+1$. Idemque Index, per S divisus, erit correspondentis MTFP Complementi Paraboloideos (fig. 204.) Hujus Paraboloidis (cujus itaque Index erit $\frac{S}{S+1}$;) Basis ponenda erit æqualis ipsi M F spiralis Terminali rectæ. Altitudo verò, quæ ad arcum Sectoris contermini P F eam habet rationem quam Seriei ratio postulat; nempe quam habent omnes Z Y, seu M T, ad totidem maximo æquales; hoc est (propter seriei Indicem S,) ut 1 ad $S+1$ (per prop. 1. hujus.) Quæ quidem Parabola seu Paraboloides est Figuræ Spiralis dupla; Curvaque illius, hujus curvæ æqualis; Tangensque illius cum Parabolæ seu Paraboloidis Ordinatim-applicatâ in puncto contactus, eundem angulum facit quem facit Tangens Spiralis cum hujus radio respectivo. P.

Si verò, vice versâ, quæratur quæ nam Figura Spiralis expositæ Paraboloidi conveniat; putà cujus Exponens sit $\frac{1}{p}$. Erit $\frac{1}{p} = \frac{S}{S+1}$ (ut ex dictis patet;) ergo $p = \frac{S+1}{S}$, & $pS = S+1$, & $pS - S = 1$, & $S = \frac{1}{p-1}$, qui Index erit Seriei radiorum MT in Spirali quæsita; cujus recta terminalis M F futura est Paraboloidis basi æqualis; angulusque circulationis talis ut Sectoris Arcus conterminus eam habeat rationem ad expositæ Parabolæ vel Paraboloidis altitudinem, quam habet $S+1$ ad 1. Quod ex modò demonstratis facile colligitur.

 Supereft

Q. Fig. 200. Supereſt, ut Centra gravitatis exquiramus. Quod eodem modo fiet atque in Propoſitione præcedente factum eſt. Poſito enim, ut illic, P pro peripheriâ primi circuli; cujus pars infiniteſima ſit T; radius R; ſimiliúmque ſectorum radii, utcunque creſcentes, n; quibus reſpondeant in eadem ratione t: Erunt ſimiles Sectores quilibet $\frac{1}{2}nt$, ſeu $\frac{n^2T}{2R}$; eorúmque ab M diſtantia Centrorum gravitatis reſpectivè, $MR = \frac{2}{3}n$; adeoque à PMF, eorundem diſtantia $RS = \frac{2ns}{3R}$; ab EMG, diſtantia $RX = \frac{2nx}{3R}$: (nempe, in eâ ratione ad RM, qua eſt Sinus Rectus illic, hic Co-ſinus ſeu ſinus complementi, anguli PMR, ad Radium:) Et propterea, ſingulorum reſpectivè momenta reſpectu rectæ PMF, $\frac{n^2T}{2R} \times \frac{2ns}{3R} = \frac{n^3sT}{3R^2}$; reſpectu rectæ EMG, $\frac{n^2T}{2R} \times \frac{2nx}{3R} = \frac{n^3xT}{3R^2}$: Vel, (neglecto T, ob cauſas ad § E. prop. præced. traditas,) illic, $\frac{n^3s}{3R^2}$; hic, $\frac{n^3x}{3R^2}$. Atque hoc quidem univerſaliter, quacunque ratione creſcant radii MT, quos n dicimus uſque ad eorum maximum N, qui ſit MT terminalis.

Et propterea; Si creſcant MT, ſeu n, in ratione angulorum PMT arithmetice proportionalium, quos a dicimus; erit $n = \frac{a}{P}R$, (hoc eſt, in eadem ratione ad R radium circuli primi, qua eſt a ad P; hoc eſt, angulus expoſitus PMT, ad quatuor rectos; ſeu iſtius anguli Arcus in Circuli primi peripheria, ad peripheriam integram;) Adeoque $\frac{n^2T}{2R} = \frac{a^2RT}{2P^2}$; & $\frac{n^3sT}{3R^2} = \frac{a^3sRT}{3P^3}$; & $\frac{n^3xT}{3R^2} = \frac{a^3xRT}{3P^3}$. Qui eſt caſus, Spiralis *Archimedeæ*, capite præcedente expoſitus.

Si verò creſcant MT ſeu n, in angulorum a ratione duplicatâ, triplicatâ, aliáſve multiplicata; erit $n = \frac{a^2}{P^2}R$, vel $n = \frac{a^3}{P^3}R$, & ſic porro prout rationis multiplicatæ gradus poſtulaverit. Adeoque $\frac{n^2T}{2R}$ =

$= \frac{a^4RT}{2P^4}$, & $\frac{n^3sT}{3R^2} = \frac{a^6sRT}{3P^6}$, & $\frac{n^3xT}{3R^2} = \frac{a^6xRT}{3P^6}$; Vel $\frac{n^2T}{2R}$ Fig. 200.
$= \frac{a^6RT}{2P^6}$, & $\frac{n^3sT}{3R^2} = \frac{a^9sRT}{3P^9}$, & $\frac{n^3xT}{3R^2} = \frac{a^9xRT}{3P^9}$; & sic porro, prout res postulaverit.

Si crescant MT seu n, in angulorum a ratione subduplicatâ, subtriplicatâ, aliásve submultiplicatâ; erit $n = R\sqrt{\frac{a}{P}}$, vel $n = R\sqrt[3]{\frac{a}{P}}$, atque sic porro. Adeoque $\frac{n^2T}{2R} = \frac{aRT}{2P}$, & $\frac{n^3sT}{3R^2} = \frac{1}{3}sRT\sqrt{\frac{a^3}{P^3}} = \frac{asRT}{3P}\sqrt{\frac{a}{P}}$, & $\frac{n^3xT}{3R^2} = \frac{axRT}{3P}\sqrt{\frac{a}{P}} = \frac{1}{3}xRT\sqrt{\frac{a^3}{P^3}}$; Vel $\frac{n^2T}{2R} = \frac{1}{2}RT\sqrt[3]{\frac{a^2}{P^2}}$, & $\frac{n^3sT}{3R^2} = \frac{asRT}{3P}$, & $\frac{n^3xT}{3R^2} = \frac{axRT}{3P}$: Atque sic porro, ut casus postulaverit.

Si crescant denique MT seu n, in angulorum a ratione aliquâ quæ composita sit ex multiplicatâ & submultiplicatâ; puta, subduplicata triplicatæ, seu ut $\sqrt{a^3}$: Erit $n = R\sqrt{\frac{a^3}{P^3}} = aR\sqrt{\frac{a}{P}}$; adeoque $\frac{n^2T}{2R} = \frac{a^3}{2P^3}RT$, & $\frac{n^3sT}{3R^2} = \frac{1}{3}sRT\sqrt{\frac{a^9}{P^9}} = \frac{a^4sRT}{3P^4}\sqrt{\frac{a}{P}}$, & $\frac{n^3xT}{3R^2} = \frac{a^4xRT}{3P^4}\sqrt{\frac{a}{P}}$: Et similiter alibi, prout cujusque compositionis gradus postulaverit, mutatis mutandis.

Ut igitur habeatur summa Omnium $\frac{n^2T}{2R}$; hoc est, ipsa figura Spiralis, quocunque demum multiplicatæ seu submultiplicatæ seu ex his compositæ rationis gradu crescant MT seu n: id saltem requiritur ut habeatur summa *omnium* a^2, vel *omn.* a^4, vel *omn.* a^6, vel *omn.* a, vel *omn.* $\sqrt[3]{a^2}$, vel *omn.* a^3, aliave istiusmodi summa prout res postulaverit: (Quod universaliter obtinebitur per prop. 1. hujus.) Quippe hæc summa (per analogam ipsius P potestatem divisa) ducta in $\frac{1}{2}RT$, vel (neglecto tandem T, ob causas § E. prop. præced. traditas,) in $\frac{1}{2}R$; exhibet Spiralis figuræ magnitudinem. Quam & ante habuimus § A.

Ut autem habeatur summa omnium $\frac{n^3sT}{3R^2}$, vel omnium $\frac{n^3xT}{3R^2}$; hoc est, istius figuræ spiralis momentum respectu PMF, vel EMG; adeoque

Fig. 200. adeoque (momento per magnitudinem diviſo) Diſtantia Centri gravitatis ab illis rectis: Id requiritur, ut habeatur ſumma omnium a^3s, a^3x; vel omnium a^6s, a^6x; vel omnium a^9s, a^9x; vel omnium $s\sqrt{a^3}$, $x\sqrt{a^3}$; vel omnium $s\sqrt[3]{a^3}$, $x\sqrt[3]{a^3}$, (hoc eſt, omnium as, ax;) vel omnium $s\sqrt{a^9}$, $x\sqrt{a^9}$, (hoc eſt, omnium $a^4s\sqrt{a}$, $a^4x\sqrt{a}$;) aliave iſtiuſmodi ſumma prout expoſitus caſus poſtulaverit. Quippe hæc ſumma (per analogam ipſius P poteſtatem diviſa) ducta in $\frac{1}{3}RT$, vel (neglecto T) in $\frac{1}{3}R$; exhibebit totius momentum reſpectu rectarum PMF, EMG; atque ad has aut illas partes, prout ſignum + vel — prævaluerit; ut ad prop. præced. oſtenſum eſt. Unde etiam (ut dictum eſt) colligitur Centri gravitatis ab illis rectis diſtantia.

Quo pacto autem habebitur ſumma omnium as, ax; vel omnium a^2s, a^2x; vel omnium a^3s, a^3x; (ope prop. 10. hujus,) oſtenſum eſt ad § E.H.prop. præced. Quod etiam (ut ibidem monitum eſt § H.) ad alias ejuſdem a poteſtates (indicem habentes numerum integrum) continuabitur; puta, ad a^4s, a^4x; a^5s, a^5x; a^6s, a^6x; &c.

Quod itaque ſufficiet caſibus eis omnibus, ubi ponuntur MT ſeu n creſcentes vel in ratione angulorum a, vel in horum ratione duplicatâ, triplicatâ, aliáſve multiplicatâ. Ut patet.

Vel etiam, in ipſorum a ratione ſubtriplicatâ, aut ſubtriplicatæ multiplicatâ. Quippe ſi ſit $n = R\sqrt[3]{\frac{a}{P}}$, vel $n = R\sqrt[3]{\frac{a^2}{P^2}}$, &c. in horum Cubis, tolletur Radicalitatis nota; nempe $n^3 = \frac{a}{P}R^3$, vel $n^3 = \frac{a^2}{P^2}R^3$; & ſic in cæteris: Adeoque $\frac{n^3sT}{3R^2} = \frac{asRT}{3P}$, $\frac{n^3xT}{3R^2} = \frac{axRT}{3P}$; vel $\frac{n^3sT}{3R^2} = \frac{a^2sRT}{3P^2}$, $\frac{n^3xT}{3R^2} = \frac{a^2xRT}{3P^2}$; & ſic in cæteris. Quæ itaque omnia, ope ejuſdem prop. 10. exhiberi poterunt; uti oſtenſum eſt.

Verùm ſi ponantur MT, ſeu n, creſcentes in angulorum a ratione ſubduplicatâ, ſubquadruplicatâ, aliâve ſubmultiplicatâ, aut ex his utcunque compoſitâ, (quæ non æquipolleat vel ipſi angulorum a rationi, vel hujus alicui multiplicatæ, vel ſaltem ſubtriplicatæ, aut hujus multiplicatæ;) res non ita feliciter ſuccedit. Quoniam hic, ne quidem in Cubis eliminabitur Radicalitatis nota: Adeoque nec ſatis applicari poterit methodus illa, § E. H. prop. præced. expoſita; ex prop. 10. hujus petita.

Quæ

Quæ autem, ad § Q. universaliter tradita sunt; Nempe, quacunque ratione crescant M T seu n radii; Sectorum similium magnitudines esse, $\frac{n^2T}{2R}$; eorumque momenta respectu P M F, & E M G, esse $\frac{n^3sT}{3R^2}$, & $\frac{n^3xT}{3R^2}$: Non modò in his Spiralibus locum habent, ubi radii n sint in angulorum a ratione multiplicatâ, vel submultiplicatâ, vel ex his compositâ; sed quæcunque fuerit utcunque perplexa seu implicata ratio. Quæcunque enim fuerit, siquo modo haberi possit summa omnium $\frac{n^2T}{2R}$, habebitur spiralis magnitudo: &, si haberi possit summa omn. $\frac{n^3sT}{3R^2}$, & omn. $\frac{n^3xT}{3R^2}$; habebitur istius Momentum respectu P M F, & E M G: & quidem si utraque habeantur; habebitur (momento per magnitudinem diviso) Distantia Centri gravitatis ab illis rectis. R. Fig. 200.

Exempli gratia; si ponantur radii n, crescentes in ratione Ordinatim-applicatarum in Hyperbolâ; puta ut $\sqrt{:\frac{1}{2}aP+\frac{1}{2}a^2:}$ adeoque $n=\frac{\sqrt{:\frac{1}{2}aP+\frac{1}{2}a^2:}}{P}R$: Erunt horum Quadrata, $n^2=\frac{aP+a^2}{2P^2}R^2$; adeoque $\frac{n^2T}{2R}=\frac{aP+a^2}{4P^2}RT$. Cum itaque (per prop. 1. hujus) haberi possit tum summa omnium a, tum omnium a^2; habebitur etiam, omnium $\frac{aP+a^2}{4P^2}RT$; quæ est ipsa figuræ spiralis magnitudo. Et quidem, si porro haberi possit, summa omnium n^3 seu omnium $\frac{aP+a^2}{2P^3}R^3\sqrt{:\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a^2:}$ atque etiam summa omnium $\frac{n^3sT}{3R^2}$, & omnium $\frac{n^3xT}{3R^2}$; hoc est, omnium $\frac{aP+a^2}{6P^3}sTR\sqrt{:\frac{1}{2}aP+\frac{1}{2}a^2:}$ & omnium $\frac{aP+a^2}{6P^3}xTR\sqrt{:\frac{1}{2}aP+\frac{1}{2}a^2:}$ Hoc est, istius Figuræ Spiralis momenta respectu rectarum P M F, E M G: Momenta hæc, per magnitudinem illam divisa, exhiberent Centri gravitatis distantias ab illis rectis.

Cumque hæc in aliis Spiralium generibus, mille modis variatis, pariter obtineant: amplus hic pateret excurrendi campus, si liberet exspatiari.

Et

Et quidem nonnulla alia Spiralium genera, in Tractatu meo, *De Curvarum* Ἐυθύνσει exponuntur; quæ, cum multis aliis possent in hunc locum transferri. Sed, ne nimius sim, Lectoris illud industriæ (si opus fuerit) permittendum erit.

SCHOLIUM.

MOnendum hic duxi, (quod & supra, § A. insinuatum est,) in Scholio Prop. 45. *Arithm. Infin.* in assignandâ ratione quam habet Figura Spiralis ad Sectorem conterminum, prout crescunt MT radii, in angulorum AMT ratione simplâ, duplicatâ, triplicatâ, quadruplicatâ, &c. Cum (juxta demonstationis tenorem) dicendum erat, *ut* 1 *ad* 3, 5, 7, 9, *&c.* nescio quâ incuriâ scriptum habetur, *ut* 1 *ad* 3, 4, 5, 6, *&c.* Quod cùm non animadverterit V. Cl. *Stephanus de Angelis*, merum esse sive Calami sive Calculi lapsum, (non ex demonstrationis vitio ortum;) suspicatus est doctrinam illam de Spiralibus infirmam esse. Cum interim si satis animadvertisset demonstrationis vim (quæ hinc potissimum dependet, quod similes Sectores sint in Radiorum ratione duplicata; adeoque ubi Radiorum series indices habent 1, 2, 3, 4, &c. series sectorum habebunt indices 2, 4, 6, 8, &c. adeoque omnium summa, ad maximum toties sumptum; hoc est, figura Spiralis, ad Sectorem conterminum; ut 1 ad 3, 5, 7, 9, &c.) vidisset, tum demonstrationi vim inesse; tum, emendato mendo numerali, omnia probè constare. Adeoque quam ille prolixâ refutatione (in suo *de Spiralibus* tractatu) doctrinam subversum it: multò faciliùs, tribus verbis emendâsset; dicendo, [*pro* 3, 4, 5, 6, *substituendum (juxta demonstrationis tenorem)* 3, 5, 7, 9:] quo facto, non erit quod reprehendat. Sed & simul videbit, totam illam quam ille justo volumine *De Spiralibus* doctrinam habet; eodem Scholio summatim tradi: Et quidem (utut hoc ille non statim perspexerit) universaliùs quam ab ipso tradita est. Cum enim dixeram, doctrinam illam de Parabolis & Paraboloidibus, tum ante traditam, *tum deinceps tradendam*, spiralibus accommodari posse, in quibus crescant MT rectæ, in angulorum PMT ratione *duplicatâ, triplicatâ, quadruplicatâ, &c.* illud *& cætera* extendendum erat non modò ad alias rationes (strictè loquendo) *multiplicatas*, sed & *submultiplicatas*, vel ex multiplicatis & submultiplicatis utcunque *compositas*, vel etiam *numero surdo* exponendas. Quippe illud summatim insinuatum vellem; (quod de Paraboloidibus, magis particulatim, vel ante traditum, vel

mox

mox tradendum erat ;) Quemcunque habeat Indicem Series Rectarum M T, (integrum, fractum, surdúmve ;) hujus *Duplum*, indicem esse Seriei similium Sectorum radiis illis descriptorum : Summamque horum, ad maximum toties sumptum, (hoc est, figuram Spiralem ad Sectorem conterminum,) esse, ut 1 ad indicem illum *(duplum)* unitate auctum.* Cujus quidem doctrinæ universalis, nonnisi pars est, tota illa quam habet ille de Spiralibus. Quæ tamen non ideo dicta sunt, ut, ab eo traditis, derogatum eam : sed ut ostendam, quàm sit corollariorum ferax generalis illa methodus ; cùm Scholium illud Unicum (nec adeo longum) quò particulatim exponatur, materiam subministrare possit justo Volumini.

PROP. XXIX.

Quæ de Spatio Cycloidali (prop. 15.) tradita sunt non pauca, possunt & Spatio Cissoidali accommodari.

Cissoidis lineæ meminit Pappus lib. 3. prop. 5. (pro duabus mediis proportionalibus inveniendis excogitatæ ;) Cujus hæc natura. Fig.205.
Sit A D α Semicirculus ; cujus Centrum, C ; Diameter, A α ; cui ad angulos rectos insistat C H D : Ductâ ubivis Chordâ A B, quam secet C D in H ; si in ea sumatur, rectæ B H, æqualis H b ; quæ per omnia b puncta incedit curva A b D, *Cissoides* dicitur. Eademque etiam ultra D punctum eodem ritu continuata (alternato tantum punctorum B b situ, quæ in D coincidunt,) ea est quam hîc volumus. Cui Asymptota est $\alpha\,\tau$ recta, circulum in α contingens.

Spatium Cissoidale, dicimus, quod curvæ A b b, rectisque A α, $\alpha\,\tau$, interjacet : interminabile quidem ex parte b τ ; magnitudinis tamen finitæ.

Spatium hoc consideravimus in Tractatu Epistolari, Tractatui de *Cycloide* subjuncto. Ejusque tum magnitudinem, tum momentum respectu rectarum A T, $\alpha\,\tau$; Centrique gravitatis (si quod foret) ab iis distantiam ; Solidique ejusdem conversione sive circa A T sive circa $\alpha\,\tau$, facti magnitudinem, determinavimus.

Est utique illud A b b $\tau\,\alpha$ spatium interminabile, semicirculi A D α triplum. Et Axis Æquilibrii (adeoque, siquod esset, Centrum gra-

 vitatis)

Fig. 205. vitatis) distat à $\tau\alpha$, Sextante Diametri $A\alpha$; adeoque, à TA, ejusdem Diametri quinque Sextantibus; eisdem TA, $\tau\alpha$, tangentibus parallelus. Centrum autem gravitatis, intelligendum est, in axe illo, ab $A\alpha$ removeri ad infinitam distantiam; adeoque nusquam erit.

Solidúmque ejusdem circa $\tau\alpha$ conversione factum, est æquale Solido ex simili conversione Semicirculi $AD\alpha$, circa eandem $\tau\alpha$: adeoque Semicylindro cujus basis sit idem Semicirculus, & altitudo æqualis peripheriæ puncto C circumducto descriptæ. Solidumque ejusdem circa TA conversione factum, est Solidi prioris quintuplum. Solidum verò quod intelligatur ejusdem circa $A\alpha$ conversione describi; magnitudinis infinitæ.

Ungularum verò eidem insistentium, aciem habentium $\tau\alpha$, vel TA; ad similes Ungulas Semicirculo insistentes, easdem acies habentes; eadem est ratio quæ Solidorum istius conversione factorum, ad Solida simili conversione Semicirculi facta.

Ungularum vero; Planum Æquilibrii (in quo & Centrum gravitatis siquod esset,) quæ aciem habent $\tau\alpha$, ab eâ distat, $\frac{1}{8}$ rectæ $A\alpha$; quæque aciem habent TA, ab ea distant, $\frac{7}{8}$ ejusdem rectæ $A\alpha$. Semisolidorum verò, aliorúmve imperfecta conversione factorum, distantia Axis Æquilibrii ab axe conversionis $\tau\alpha$ vel TA, ad illam in Ungulis distantiam; (ut sæpius ante ostensum est,) ut est ad conversionis arcum Chorda sua.

Quæ omnia cùm ibidem demonstrata sint, non opus est ut eadem hic repetam.

Ut autem de Spatio Cycloidali ostensum est, (prop. 15. hujus,) non modo totum $Ab\tau\alpha$ (fig. 166.) totius $AD\alpha$ Semicirculi triplum esse; sed & partes partium respectivè sumptarum; putà $b\beta\tau$, $b\beta\beta b$, $b\beta\alpha A$, triplus partium $\alpha B\alpha$, $B\alpha B$, $B\alpha A$; & sic ubique: Ita in Spatio Cissoidali fig. 205. non modo totum $bbA\alpha\tau$ (spatium interminabile) triplum totius Semicirculi $AD\alpha$, (adeoque Semicycloidi $A\tau\alpha$ fig. 166. æquale:) sed & portiones $b\alpha A$, $b\alpha b$, $b\alpha\tau$, fig. 205. triplas respectivarum Semicirculi portionum $\alpha B\alpha$, $B\alpha B$, $B\alpha A$; & sic ubique; (adeoque ipsis Semicycloidis portionibus, $b\beta\tau$, $b\beta\beta b$, $b\beta\alpha A$, &c. fig. 166. respectivè sumptis, æquales.) Quod Vir Cl. *Christianus Hugenius* me primus monuit.

Verùm hæc, ne mimius sim, mihi nunc non est in animo ulteriùs prosequi; nedum quæ ad partium Centra gravitatis spectant, quæque hinc dependent.

Id interim monendum duxi, Posse quidem eandem curvam alio adhuc modo construi. Fig. 205.

Cum enim (ut ibidem ex Pappo demonstratum est,) ductâ diametro BCβ, junctâque tum Aβ, tum βb, quæ rectam Aα secet in V; sit (propter tum Bb bisectam in H, tum Bβ in C,) βVb, ipsi CH parallela; adeoque anguli ad V recti: erunt Vα, Vβ, VA, Vb, continue proportionales; hoc est (positis, AV $= v$, V$\alpha = h$, V$\beta = s$, ut antehac sæpiùs;) continue proportionales, h, s, v, $\frac{v^2}{s} =$ bV. (Quod perinde valet, sive sumatur b, in AbD curvâ intra Semicirculum; sive in eàdem extra Semicirculum continuatâ.) Adeoque, sumpto ubivis in A$\beta\alpha$ semiperipheriâ puncto β; sumptâque ad Vβ, VA, (seu s, v, sinum rectum & versum Arcûs A$\beta = a$,) tertiâ proportionali $\frac{v^2}{s}$; erit hoc æqualis ipsi bV ordinatim-applicatæ ad Diametri Aα punctum V. Quæque per omnia b puncta transit Abb, est ipsa Cissoidalis curva. Sumptisque AV $= v$, arithmetice proportionalibus; erunt omnes $\frac{v^2}{s}$, totidem bV spatium Cissoidale complentes. Cujus quidem portio Abα, cum tripla sit segmenti αBα, hoc est segmenti, AbA; erit (per § G. prop. 15.) $\frac{3}{2}eR$, seu $\frac{3}{2}aR - \frac{3}{2}sR$.

PROP. XXX.

A. B. In Conchoide, quæ ad Axem Ordinatim-applicatas recta
Fig.306. componitur ex *Sinu-recto & Tangente* ejuſdem Anguli: Et quidem ejuſdem Circuli in Primariâ, (ubi P C & C A æquantur,) ſed diverſorum in aliis.

C. Adeoque conſtat Semi-Conchoidale Planum C A O O H, ex Quadrante Genitore C A R, & figurâ Tangentium R B A O O; ad eundem radium æſtimatarum in Conchoide *Primaria*, (ubi C A, P C, æquantur;) ſed, in *Secundariâ*, ad alium; (nempe P C:) Majorem quidem in *Protractâ*, (ubi excentricitas P C major eſt quam A C altitudo,) in *Contractâ* verò (ubi P C minor eſt quam C A) minorem.

D. Atque, in Conchoidibus diverſis invicem Comparatis; Genitores Quadrantes (eorumque ſegmenta reſpectiva) ſunt in duplicatâ ratione Altitudinum C A. Reliquaque ſpatia R B A O O, (eorumque reſpectiva ſegmenta, ut A B O, vel O B B O,) ſi Altitudines C A æquales ſint; ſunt in ratione Excentricitatum: ſi Excentricitates P C ſint æquales; in ratione Altitudinum C A: ſi neutræ; in eâ quæ ex Altitudinum & Excentricitatum rationibus componitur; ſeu in ratione rectangulorum C P A.

A.E. Conchoidis Planum (Curvæ & Regulæ interjectum) interminabile eſt, & magnitudinis infinitæ.

F. Ejuſdem verò Momentum, reſpectu rectæ C H quæ Regula dici ſolet, finitum eſt: Unguláque eidem inſiſtens, aciem habens Regulam C H; Solidúmque Plani circa Re-

Regulam illam conversione facti; sunt quidem Interminata, sed Magnitudinis finitæ, & notæ. Quod & de partibus, ut A B O, perinde valet. Fig. 205.

Plani Semi-conchoidis Centrum gravitatis nullum est, (seu, quod eodem recidit, non nisi in infinitâ ab Axe distantiâ:) Sed neque Ungulæ, nec Solidi conversione facti. G. H.

Idemque obtinet de segmentis O V C H, rectæ C H H adjacentibus; atque de Ungulis Solidisque eò spectantibus: Sed non item de Segmentis remotis A V O, seu A B O; aut Ungulis Solidisve eò spectantibus. Sed neque de Ungulis Solidisque quæ Conchoidem totam spectant (utrinque ab A C porrectam) quæ Centrum gravitatis habent in ipsa A C recta. G.H.I.

IN expositâ quavis rectâ A P, dicatur P polus, A vertex, punctúmque quodvis intermedium C Centrum, rectáque infinita C H H (ad expositam A P perpendicularis) Regula: Atque intelligatur A P recta (ad partes P quantum opus est continuata) circa Polum P manentem sic converti, ut C punctum in recta C H perpetuò maneat; punctóque sui extremo A, curvam designet A O O: Hanc curvam veteres *Conchoidem* dixerunt. A.

Manifestum autem est, (propter rectam P O, regulam C H secantem in H,) punctum O ad C H regulam nunquam perventurum: Sed & (propter H O perpetuò æqualem ipsi C A, & sectionis angulum continuè acutiorem;) eò tandem perventum iri ut puncti O ab ipsâ C H distantia futura sit datâ quâvis minor: Adeóque rectam C H H ad curvam A O O Asymptotam esse; spatiúmque, interminabile. Quæ demonstranda erant.

Centro C, radio C A, describatur circuli quadrans C A R (quem *Genitorem* appello) regulæ C H H occurrens in R; sitque ordinatim-applicata quælibet in Quadrante V B, in Conchoide V O, (quadranti occurrens in B;) jungantur C B, P O. B.

Manifestum est, (propter æquales C A, C B, H O,) parallelas esse C B, H O, hoc est, C B, P O: adeóque angulos A C B, A P O, æquales esse.

Est autem V B, Sinus Rectus Anguli A C B ad radium A C; & C H, hoc est B O, ejusdem anguli A P O seu A C B, Tangens ad Radium P C; (quam *Excentricitatem* appello:) Hoc est, ad eundem

Fig. 206. dem radium, ubi P C, C A, æquantur; ad diversos, ubi non æquantur. Illas ego Conchoides *Primarias* appello; has, *Secundarias*; & quidem vel *Contractas* vel *Protractas*, prout Excentricitas P C minor est vel major quàm Genitoris radius C A, quam *Altitudinem* appello. Puta, in fig. 207. A O O est *Primaria*; Secundariæ vero, A o o *Contracta*, & A ω ω *Protracta*.

Adeoque; ut, in Cycloide, fig. 166. ordinatim-applicata quælibet b B V, componitur ex Sinu recto B V in circulo genitore; & ex B b, quæ respectivo arcui æquatur; nempe ipsi B A in Cycloide *primariâ* (cujus basis τ α τ æquatur perimetro Circuli genitoris,) vel in *Secundariis*, (sive *protractæ* sint, sive *contractæ*,) simili arcui alterius circuli; cujus nempe perimeter æqualis est expositæ Cycloidis basi; (ut ad prop. 20. hujus ostensum est:) sic, in Conchoide fig. 206. ordinatim-applicata V B O, componitur ex sinu recto V B (ad radium C R inscripti Quadrantis C A R) & ex B O, hoc est C H, tangente correspondentis anguli; & quidem ad eundem radium, in Conchoide *primaria* (ubi P C, C A, æquantur;) sed in *Secundariis*, sive protractis sive contractis, (in quibus P C, C A, non æquantur,) ad diversum; nempe, ad radium P C. Quod itidem erat demonstrandum. (Et quidem num illud ante me quispiam animadverterit, nescio.)

C. Componitur itaque Semiconchoidale Spatium interminatum C A O O H, ex C A R Quadrante Genitore, & R B A O O, figurâ Tangentium (distortâ) unius quadrantis, Radio P C convenientium, sinibus versis arithmeticè-proportionalibus respondentium: sed, quæ altitudinem habeat A C. Pariter atque componitur Semicycloidale spatium A τ α fig. 166. ex Semicirculo Genitore A D α, & A D α τ figurâ Arcuum distortâ (sinibus versis arithmeticè-proportionalibus respondentium,) ad eundem cum circulo genitore Radium, in Primariâ; ad alium, in Secundariis; sed quæ Altitudinem habeat eandem cum Genitore circulo.

D. Hinc sequitur; In Conchoidibus diversis, ejusdem altitudinis, (intellige, quarum eadem sit radii C A longitudo, seu magnitudo eadem quadrantis Genitoris C A R,) sed quæ inæquales habeant Excentricitates P C; Conchoidale spatium (quod extra Circuli quadrantem est) R B A O O, (quam Tangentium figuram esse, jam ostendimus) vel etiam ejusdem assignatum quodvis segmentum (ordinatim-applicatâ abscissum) A B O, vel duabus ordinatim-applicatis interjectum O B B O; in eâ ratione majora esse vel minora, quâ majores sunt vel minores suæ respectivæ Excentricitates P C. Nam quâ

ratione

ratione crescit vel decrescit radius P C, eâdem ratione crescunt vel decrescant Tangentes omnes (respectivè sumptæ) C H, hoc est, omnes B O, spatium complentes R A O, vel B A O, vel O B B O. Adeoque (propter easdem utrobique respectivas altitudines) in eadem ratione augetur vel minuitur spatium quod complent illæ rectæ. Putà, (fig. 207.) Spatium A B O in *Primariâ*; ad A B o, in secundariâ *Contractâ*; & A B ω, in *Protractâ*; eam rationem habet (propter eandem altitudinem) quam habet Excentricitas P C, ad p C, & π C. Et sic ubique. Fig.207.

Si verò, eâdem manente Excentricitate P C, mutetur Altitudo C A; erunt respectiva spatia A B O, &c. altitudinibus illis proportionalia. (Nempe, propter easdem latitudines respectivas)

Adeoque, si mutentur utræque; erunt respectiva Spatia, in eâ ratione quæ componitur ex rationibus Altitudinum C A, & Excentricitatum P C: hoc est, in ratione rectanguli P C A in unâ, ad rectangulum P C A in alterâ. Quod (credo) primus indicabam ego, in *Commercio Epistolico*, Epist. 39, 40.

Quadrantes autem Genitores, si altitudines (hoc est, radios,) æquales habeant, æquales esse; sin inæquales, in Radiorum suorum ratione duplicatâ esse; notius est quàm ut demonstratu opus sit.

Quod autem Conchoidale spatium interminatum, sit etiam magnitudinis Infinitæ; sic colligitur. E.

Seponamus aliquantisper Quadrantem genitorem; & adjunctam figuram Tangentium consideremus: Eámque (exempto Quadrante genitore) restituamus in situm proprium, ut in fig. 208. ubi rectæ B O, figuram Tangentium complentes, (sinibus rectis A V arithmeticè-proportionalibus respondentes,) ad axem C A ordinatim-applicantur. Fig.208.

Esto autem, fig. 209. Quadrans C A R seorsum exemptus: sumptóque, ubivis in C A radio, puncto V; erit V C (ejusdem à centro distantia) sinus complementi, istius anguli cujus A V est sinus versus, & V B sinus rectus, & A T Tangens, est autem (propter similia triangula) ut C V ad V B, sic C A ad A T; Hoc est, (positis $VC = x$, $VB = s$, $CA = R$,) ut x ad s, sic R ad $\frac{s}{x} R = AT = BO$. Fig.209.

Si itaque sumi intelligantur, ut (in fig. 208.) C V seu x, arithmeticè-proportionales, vel, his æquales, V u, triangulum C A u complentes: Sumptis ubique, ut x ad s sic R ad *quartam*; erunt Fig.208.

illæ

Fig. 208. illæ quartæ, series totidem AT, hoc eſt, totidem BO, complentium RBAO figuram tangentium.

Sed (neglectis aliquandiu tertiis R) perpendamus quid futurum ſit, ſi, pro R, ſubſtituerentur totidem s: Adeoque ſumerentur ubique, ut x ad s ſic s ad *quartam*. Erunt utique illæ *quartæ*, totidem $\frac{s^2}{x}$: Hoc eſt, (propter, in fig. 209. VBq = CBq — CVq = CAq — CVq, ſeu $s^2 = R^2 - x^2$,) totidem $\frac{R^2 - x^2}{x}$; ſeu totidem $\frac{R^2}{x} - x$.

Sunt autem (propter x arithmeticè proportionales, ab ipſo C puncto, ſeu o, ordientes; & R^2 eandem ubique quantitatem;) *Omnes* $\frac{R^2}{x}$, ſeries *Reciproca primanorum*, (per def. 2. hujus.) Indicem habens — 1. Adeoque ad totidem ultimo æqualium, hoc eſt ad R^2, in ratione infinitâ, (per prop. 1. vel 7. hujus;) & propterea, magnitudinis infinitæ.

Sed, *Omnes* x, ſunt ſeries Primanorum; adeoque finitæ magnitudinis: Nempe $\frac{1}{2}R^2$ ſeu $\frac{1}{2}AR$, (per prop. 1. vel 7. hujus:) tantundem ſcilicet atque CAu Triangulum, quod complent rectæ Vu ipſis x æquales.

Et propterea, *Omnes* $\frac{R^2}{x} - x$, magnitudinis adhuc infinitæ. Nam finitæ magnitudinis ab infinitâ detractio, relinquit adhuc infinitam.

Verùm, quam jam conſideramus, Figura Tangentium etiam adhuc major eſt: Quippe tangentes ſingulæ, ſunt (non quidem totidem $\frac{s^2}{x}$ ſeu $\frac{R^2 - x^2}{x}$, ſed) totidem $\frac{sR}{x}$: Adeoque, (propter R, ubique majorem quam s,) Series *Omnium* $\frac{sR}{x}$, ſeu Figura Tangentium, major erit quàm *Omnium* $\frac{s^2}{x}$; adeoque multò magis erit magnitudinis infinitæ. Adeoque multò adhuc magis, Spatium Conchoidale, ſeu Semiconchoidale CAOOH, (ex quadrante generatore, & hac figurâ Tangentium, compoſita,) magnitudinis erit infinitæ. Quod demonſtrandum ſuſcepimus.

Fig. 206. Verum quidem eſt, in Conchoidibus *Secundariis*, ipſas BO, non eſſe tangentes ad radium CA, ſed ad radium PC. Hoc tamen infinitati figuræ non derogat quippiam. Si enim PC major ſit quam CA, fi-

figura R B A O O in eadem ratione augetur, (ut § D. ostensum est,) non minuitur; adeoque non minus erit infinita. Sin P C minor sit quàm C A, minuitur quidem figura R B A O O; sed non nisi in eâ ratione minuitur, quâ P C minor est; Hoc est, in ratione finitâ: Quod autem infinito non nisi in ratione finitâ minus est, etiamnum est infinitum; adeoque plani infinitudo non destruitur. Saltem, nisi intelligatur ipsa P C penitus evanescere (ut P C quàm C A sit infinities minor) coincidentibus P C punctis; quo casu Conchoidale spatium degenerabit in C A R quadrantem. Fig. 206.

Quod autem Planum hoc, utut magnitudinis infinitæ, Momentum respectu Regulæ suæ C H H finitum habeat; adeóque Ungulas quæ aciem habeant Regulam illam, Solidáque circa illam conversione facta, magnitudinis esse finitæ; (quod nos, ni fallor, primi docuimus, in subjunctis Tractatui de Cycloide;) sic ostendimus. F.

Quodnam habeat momentum Quadrans genitor C A R, respectu rectæ C R, ostensum est prop. 15. § Q. nempe $\frac{1}{3} R^3$, (semissem scilicet istius quam habet Semicirculus respectu diametri suæ:) Atque tantundem est Semiquadrantalis Ungula eidem insistens, aciem habens C R: Solidúmque ipsius conversione circa C R factum (utpote ad ungulam illam ut P ad R,) $\frac{1}{3} R^2 P$; nempe Hemisphærium.

Plani reliquum, R B A O O, ex Tangentibus constat, seu totidem B O; Hoc est, in Conchoide primariâ (ubi P C = C A = R,) totidem $\frac{s R}{x}$ seu $\frac{s}{x} R$; in Secundariis (posito P C = ϱ) totidem $\frac{s \varrho}{x}$ seu $\frac{s}{x} \varrho$: (Nempe in eâ ratione vel longiores vel breviores quàm tangentes ad radium C A = R, quâ P C = ϱ longior est vel brevior quam C A.) Quæ si ducantur singulæ in suas ab C H distantias C V = x, fiunt totidem $s R$ vel $s \varrho$. Sunt autem *omnes* s, idem atque circuli quadrans C A R quem complent; puta $\frac{1}{8} R P$, (per § D. prop. 15.) Adeoque *Omnes* $s R$, seu *Omnes* $s \varrho$, idem atque quadrans ille in distantia R vel ϱ suspensus; hoc est, $\frac{1}{8} R^2 P$, vel $\frac{1}{8} \varrho R P$: Cui itaque æquatur Momentum *Omnium* B O, seu plani R B A O O, in suo loco suspensi, respectu rectæ C H.

Et similiter ostendetur, Ungulam quadrantalem eidem insistentem cujus acies C H; hoc est *Omn.* $\frac{s R}{x} \times x$, seu *Omn.* $\frac{s \varrho}{x} \times x$, tantundem esse atque *Omn.* $s R$, seu *Omn.* $s \varrho$. Hoc est, circuli quadrantem C A R in altitudinem R, seu ϱ, = C P ductum; seu Cylindrum

 qua-

Fig.206. quadrantalem, cujus Basis C A R quadrans, & Altitudo ipsi C P æqualis: Nempe, $\frac{1}{8}R^2P$ vel $\frac{1}{8}\varrho RP$. Solidúmque conversione plani R B A O O circa C H factum (utpote ad Ungulam illam, ut *P* ad *R*,) tantundem atque Cylindrum quadrantalem super eadem Base C A R, altitudinem habentem æqualem Peripheriæ radio C P descriptæ: Hoc est, $\frac{1}{8}RP^2$, seu $\frac{1}{8}\varrho P^2$.

Idémque, eadem ratione, in partibus ostendetur. Nempe, Momentum segmenti A B O respectu C H H, idem atque segmenti A V B in distantia *R*, vel ϱ, $=$ C P suspensi. Ungulámque quadrantalem eidem A B O insistentem, aciem habentem C H H; tantundem esse atque Cylindrum cujus basis sit A V B & altitudo C P. Solidúmque ejusdem A B O conversione circa C H H factum, tantundem atque Cylindrum cujus basis sit idem A V B segmentum & altitudo æqualis Peripheriæ radio C P descriptæ. Perinde enim procedit demonstratio de partibus respectivè sumptis, atque de totis.

G. Plani verò totius C A O O H, aut etiam totius figuræ Tangentium R B A O O, Centrum gravitatis nullum est. Cùm enim Momentum (ut jam ostensum est) sit Finitum, & Magnitudo Infinita; si illud per hanc dividi intelligeretur, prodiret Centri gravitatis ab C H H distantia infinitè-exigua: Neque tamen in ipsâ C H esse, commodè dici posset; quippe tum totum pondus ad unas partes rectæ C H H (quam esse tamen axem Æquilibrii oporteret) poneretur. Item, cùm Spatium jam ostendatur infinitum esse; in quacunque ab A C distantiâ finitâ poni intelligeretur Centrum gravitatis; esset, citra illud, pondus finitum & in distantiâ finitâ; sed ultra Centrum illud, pondus infinitum in distantiâ item infinitâ: quod cum naturâ Centri gravitatis non consistit. Nullum igitur erit Plani totius Centrum gravitatis, vel (quod eodem recidit) nonnisi in infinitâ distantiâ ab A C.

Idemque similiter ostenderetur de totius portione O V C H, vel O B R, quæ rectæ C H H adjaceat. Quippe quicquid id sit quod ultra V B O abscinditur, finitum erit, (utpote undecunque terminatum;) reliquúmque quod ipsi C H H adjacet, manebit adhuc magnitudinis infinitæ.

Segmentum verò quodcunque remotius A V O, vel A B O; cum & Momentum finitum habeat, & Magnitudinem finitam atque undecunque terminatam; habebit etiam Centrum gravitatis.

H. In Ungula Semiquadrantali, aciem habente C H, quæ singulis B O rectis insistunt Parallelogramma rectangula (ungulam complentia)

plentia) sunt (propter longitudinem $\frac{sR}{x}$ seu $\frac{s\varrho}{x}$, in respectivas altitudines, distantiis x æquales, ductas) totidem sR seu $s\varrho$: Quæ tantundem sunt atque totidem rectangula respectivis V B $= s$ insistentia, communem altitudinem habentia R, seu ϱ, $=$ P C. Súntque in eisdem à C H H distantiis. Adeóque eadem habent, respectu ipsius C H H momenta; tum sigillatim respectivè sumpta, tum simul omnia. Hoc est, idem est Momentum Ungulæ R B A O O (ejúsve segmentorum, ordinatim applicatis abscissorum, A B O, O B R,) atque Cylindri C A R (hujusve segmentorum respectivè sumptorum, A V B, B V CR,) respectu ejusdem rectæ C H H. Fig. 206.

Distat autem quadrantis C A R (adeoque Cylindri hinc insistentis, per § E. prop. 5. hujus,) Centrum gravitatis à C H H, $\frac{8R^2}{3P}$, (per § Q. prop. 15.) quæ in quadrantis magnitudinem $\frac{1}{8}RP$ ducta, exhibet quadrantis Momentum respectu C H H, $\frac{1}{3}R^3$; adeoque (propter altitudinem R vel ϱ,) Cylindri momentum $\frac{1}{3}R^4$ vel $\frac{1}{3}\varrho R^3$. Idemque propterea momentum erit Ungulæ R B A O O respectu ejusdem C H H. Atque hoc Momentum, per Ungulæ magnitudinem $\frac{1}{8}R^2P$ seu $\frac{1}{8}\varrho RP$, divisum; exhibet distantiam Centri gravitatis (siquod sit) vel saltem Axis Æquilibrii à C H H (intellige à perpendiculari plano super recta C H H erecto,) $\frac{8R^2}{3P}$. (Tantundem utique quantum inde distat per § Q. prop. 15. Centrum gravitatis quadrantis C A R à C H R, seu Semicirculi ab eâ cui adjacet diametro.) Et propterea, Solidi Semiconversione circa C H H facti, Centri gravitatis inde distantia, (utpote ad illam Ungulæ, ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$, seu $4R$ ad P, per § E. F. prop. 14. hujus,) $\frac{32R^3}{3P^2}$.

Similiter de Ungulæ segmentis, putà quæ ipsis A B O, O B R, insistunt; procedendum erit. Sunt utique illa æqualia respectivis Cylindri segmentis, quæ ipsis A V B, B V C R, insistunt; atque in eisdem à C H H distantiis; adeoque & æqualia habent momenta: quæ quanta sint, ex prop. 15. hujus, facilè est colligere. Eadémque momenta, per respectivas magnitudines divisa, exhibebunt Centrorum gravitatis (siqua sint) à C H H distantias respectivas. Atque inde colligetur (per § E. F. prop. 14. hujus) Semisolidorum (aliorúmve imperfectâ conversione circa C H H factorum) Centri gravitatis (siquod est) inde distantia.

Et, propterea; cùm etiam Ungularum (aut Solidorum correspondentium) quæ C A R (ejúsve portiones) spectant, tum magnitudines, tum Centra gravitatis determinata sint, prop. 15. 16. hujus: Ungularum similiter quæ Conchoidale spatium C A O O H (ejusque partes) spectant, Momenta & Magnitudines (per prop. ult. cap. præced.) non minùs determinantur, quàm quæ Figuram Tangentium C A O O (ejúsque partes) spectant.

I. Si verò, eorundem parallelogrammorum ipsis B O (fig. 208.) in-
Fig.208. sistentium; hoc est, totidem sR vel $s\varrho$, (ut supra ostensum est;) respectu rectæ A C vel A R (cui, exempto quadrante, ibidem adjacent) momentum consideretur: Cùm sua Centra gravitatis in mediâ longitudine sita sint (per prop. 2. hujus,) erunt eorum ab A B R distantiæ respectivæ, $\frac{sR}{2x}$, seu $\frac{s\varrho}{2x}$, (nempe longitudinum suprà inventarum semisses:) quæ in respectivas magnitudines sR vel $s\varrho$ ductæ, exhibent eorum respectu rectæ A B R momenta $\frac{s^2R^2}{2x}$, seu $\frac{s^2\varrho^2}{2x}$: Hoc est, (propter $s^2 = R^2 - x^2$,) $\frac{R^2 - x^2}{2x}R^2$, seu $\frac{R^2 - x^2}{2x}\varrho^2$: Hoc est, $\frac{R^4}{2x} - \frac{1}{2}xR^2$, seu $\frac{\varrho^2R^2}{2x} - \frac{1}{2}x\varrho^2$.

Est autem, series omnium $\frac{R^4}{2x}$, seu $\frac{\varrho^2R^2}{2x}$, Reciproca primanorum; cujus itaque magnitudo infinita erit, (per prop. 1. vel 7. hujus:) Sed omnium $\frac{1}{2}xR^2$ seu $\frac{1}{2}x\varrho^2$, series primanorum, adeoque magnitudinis finitæ, (per prop. 1. vel. 6. hujus:) Hujus itaque ex illâ subductio, non impedit quin adhuc maneat, omnium $\frac{R^4}{2x} - \frac{1}{2}xR^2$ seu $\frac{\varrho^2R^2}{2x} - \frac{1}{2}x\varrho^2$ series, hoc est, Ungulæ R B A O O (aciem habentis C H H) momentum respectu rectæ A B R, magnitudinis infinitæ. Adeóque Momentum illud infinitum, per Ungulæ Magnitudinem (quam finitam esse jam ostensum est, § F.) divisum; distantiam Centri gravitatis ab A B R exhibebit infinitam: Et multò magis fig. 206. (interposito quadrante C A R) distantiam Centri gravitatis ejusdem Ungulæ R B A O O (distortæ) distantiam à recta A V C infinitam: Et magis adhuc, totius C A O O H Ungulæ Conchoidalis, Centri gravitatis ab eadem A V C distantiam infinitam. Quod

itaque

itaque nusquam est; seu (quod eodem recidit) non nisi in infinitâ distantiâ ab A C.

Idémque similiter ostendetur, de Ungulâ segmenti C V O O H, ipsi C H H adjacentis: Atque etiam de solidis conversione (perfectâ vel imperfectâ) sive totius C A O O H sive segmenti C V O O H factis: Nempe, distantiam Centri gravitatis ab A C infinitam esse.

Ungula verò segmenti remoti A V O, (utpote undique terminata, adeoque magnitudinis finitæ, & in distantiâ finitâ,) Momentum habet finitum, & Centrum gravitatis. Et similiter, solidum conversione factum.

Item, quæ Conchoidem totam (utrinque in infinitum porrectam) spectant, (aut etiam ejusdem segmentum, ordinatim-applicatâ abscissum, & utrinque ab A C æqualiter porrectum) Ungulæ, Solidáque conversione facta, (propter duos semisses, utrinque ad A C positos, invicem æquiponderantes,) Centra gravitatis habebunt; in ipsâ quidem A C rectâ (seu Plano huic perpendiculariter insistenti;) atque in eâ à C distantiâ quam ad § H. modò determinavimus.

PROP.

Fig. 210. *PROP.* XXXI.

A. Spatium Hyperbolicum exterius, (Curvæ & Aſymptotis interjectum,) ex Primanorum reciprocis conflatur: inſcripta Parallelogramma habens invicem æqualia.

B. Eſtque ſuapte naturâ utrinque interminabile.

C. Eſtque magnitudinis infinitæ, ſive ex utraque ſive ex alterâ tantum parte interminatum maneat: Sin utrinque truncatum ſeu terminatum cenſeatur, magnitudinis finitæ.

D.E. Portio hujus, ex altera tantum parte truncata, & rectâ terminata quæ alteri Aſymptotarum parallela ſit, (ut ASHhσ,) utut magnitudinis ſit infinitæ, momentum tamen habet reſpectu iſtius Aſymptotæ (Aσ) finitum: Ungulámque, cujus acies ſit Aſymptota illa, exhibet magnitudinis finitæ, & noto Parallelepipedo æqualem: Solidúmque converſione circa Aſymptotam illam factum, magnitudinis finitæ & notæ.

F. Quæque huic Portioni ſive toti (ut ASHhσ,) ſive ejuſdem parti duabus rectis Aſymptotæ illi parallelis interjectæ, (ut SCIH) inſiſtit Ungula, aciem habens Aſymptotam illam; habet Æquilibrii Planum (adeoque & Axem Æquilibrii, & ſiquod ſit Centrum gravitatis) in perpendiculari Plano quod præcisè medium ſit inter parallelas rectas portionem hanc, ejuſve partem expoſitam, terminantes; atque in illo per aciem plano quod Ungulæ altitudinem biſecat. Centrum autem gravitatis quod hujuſmodi Ungulam, ipſi Aſymptotæ (quæ acies ipſius eſt) contiguam, reſpicit; nullum eſt, vel (quod eòdem recidit) nonniſi in infinitâ diſtantiâ ab alterâ Aſymptotarum.

Portionis

Portionis hujuſmodi utrinque truncatæ (duabus Aſymptotæ parallelis interjectæ (ut S O V H, S C I H,) magnitudo, (vero proxima,) calculo aſſignari poteſt quantumlibet accuratè. C.

Adeoque & Portionis interioris; ut H V X, H I x, vel H V D, H I d. H.

Et utriuſque momentum tum reſpectu Aſymptotæ A σ, tum reſpectu Axis vel Diametri A X, A x; Centríque gravitatis inde diſtantia. Adeoque ipſum gravitatis Centrum. Idque in Hyperbolis tum Erectis, tum Scalenis. I. K.

Habetur etiam Hyperbolici Conoideos (vel Pyramideos) tum magnitudo, (nempe ad Cylindrum ſeu Priſma, ejuſdem baſis & altitudinis, ut $3T + 2D$, ad $6T + 6D$;) tum Centrum gravitatis; utpote quod in ipſo Solidi Axe ita conſtitutum eſt, ut pars ad verticem ſit ad totum, ut $4T + 3D$ ad $6T + 4D$. L.

Hinc etiam habetur (quæ cum Hyperbolæ quadraturâ conjuncta eſt) Curvæ Parabolicæ Rectificatio; ſeu Recta huic curvæ æqualis. M.

Item, Superficiei Curvæ Conoideos Parabolici Expanſio; ſeu Plana huic Curvæ æqualis. N.

Aliaque multa, quæ Curvas alias tum Lineas tum Superficies ſpectant, ad Rectas & Planas reducendas, (earumque Centra gravitatis,) ſubjungi poſſent. O.

Sit H h h Hyperbola, cujus Aſymptotæ A S, A σ, (angulum ad A utcunque facientes,) Axis A X, vertex V: Alterique ex Aſymptotis, puta A σ, parallela S H, aliæque quotlibet s h (æqualibus intervallis diſſitæ) ſpatium curvæ & aſymptotis interjectum complentes; quibus ex adverſo reſpondeant totidem s t complentes A S T triangulum, adeoque ipſis A s proportionales. A. Fig. 210, 211.

Oſtendimus jam olim (ad prop. 88, 91, 92, 94, 95, 103, *Arithmeticæ Infinitorum*) Figuram (niſi *Spatium* appellare malis) curvæ & aſymptotis interjectam, ex *Primanorum Reciprocis* conflatam eſſe; adeoque natura ſua utrinque interminabilem eſſe, (tum ad partes h σ,

tum

Fig.210, 211. tum ad partes H S;) & magnitudinis infinitæ, ſive utrinque ſive ex alterâ tantum parte interminata cenſeatur; ſed, utrinque truncatam, adeóque undique terminatam, magnitudinis eſſe finitæ.

Nempe; propter inſcripta Parallelogramma A S H σ, A s h σ, &c. omnia inter ſe æqualia, (quæ nota eſt Hyperbolæ proprietas, per prop. 12. lib. 2. *Apollonii*,) erunt ubique rectæ S H, s h, ipſis A S, A s, (adeoque ipſis S T, s t,) reciprocè proportionales; hoc eſt, reciprocæ Primanorum (ſeu arithmeticè proportionalium;) ex talibus itaque Figura ſeu Spatium illud conflatur. Quod erat primo demonſtrandum.

B. Cum itaque ita ſumi poſſit s punctum, ut recta A s ad A S, ſeu s t ad S T, ſit in ratione quantumvis exiguâ, (donec tandem in ipſum A punctum degeneret,) erit propterea (quæ illi reſpondeat) s h ad S H in ratione quantumvis magnâ, (donec tandem quæ ipſi A puncto reſpondere intelligatur evadat infinita:) Unde ſequitur, reſpectiva puncta h, σ, nonniſi poſt infinitam diſtantiam (hoc eſt, nunquam,) coitura: (Utut intervallo tandem diſtent quod dato minus ſit, quantillum ſcilicet eſt A s.) Adeoque Spatium illud eſſe, ad partes h σ, interminabile: rectámque A σ aſymptotam eſſe.

Similiter; Cum ita ſumi poſſit (in A S continuatâ) punctum s, ut ſit A s ad A S, ſeu s t ad S T, in ratione quantumvis magnâ (nec unquam eò perveniri poſſit ut non poſſit major ſumi,) erit propterea quæ ipſi reſpondeat reciprocè proportionalis sh, ad SH, in ratione quantumvis exiguâ, (nec eo tamen pervenietur ut non poſſit ſumi minor.) Unde ſequitur; neque unquam coitura eſſe puncta H, S, (utut, ad diſtantiam datâ quâvis minorem, continuè accedant:) Adeoque Spatium idem, ad partes etiam H S, interminabile eſſe: rectámque A S ſimiliter eſſe Aſymptotam. Quæ itidem erant demonſtranda.

C. Intelligatur autem Spatium illud ex alterâ parte truncatum (putà ad partes H S,) rectâ H S (ipſi A σ parallelâ) terminatum, interminatum verò ad partes h σ: Erit (propter ſeriei ex primanorum reciprocis Indicem — 1, per def. 2. hujus,) Spatium illud A S H h σ, ad inſcriptum Parallelogrammum A S H σ, ut 1 ad — 1 + 1, (per prop. 1. vel 7. hujus;) hoc eſt, ut 1 ad 0: adeoque magnitudinis Infinitæ. Quod item erat demonſtrandum.

Atque ſimiliter oſtendetur, Spatium idem, rectâ h σ terminatum, & interminatum ad partes H S, magnitudinis eſſe infinitæ. Adeoque, à fortiori, ſi utrinque fuerit interminatum. Quæ itidem probanda erant.

Si

Si verò utrinque truncatum, adeoque & terminatum, fuerit; putà, rectis HS, hσ; vel HS, sσ; (vel aliàs utcunque:) Manifestum est, figuram illam sic truncatam, (utpote undique terminatam,) puta SHhσA, vel SHhs, magnitudinis esse finitæ. Quod etiam erat propositum. Fig. 210, 211.

Intelligatur itaque Basi SH, parallela recta CI, portionem CSHI abscindere. Sitque basis SH $= B$, latus AS (vel, in obliquangulis, figuræ altitudo, AP) $= A$, adeoque parallelogrammum inscriptum ASHσ $= AB$: Item CS (vel, in obliquangulis, ut fig. 211. hujus altitudo, CP) $= C$: Ipsiusque A, vel C; particulæ infinitæ exiguæ, a, a, &c. Cum itaque rectæ sh, planum complentes, sint ipsis As (seu harum altitudinibus,) hoc est, suis à vertice distantiis, reciprocè proportionales; Hoc est, As, AS :: SH . sh: Erunt ipsæ sh, (à vertice deorsum,) $\frac{AB}{0}$, $\frac{AB}{a}$, $\frac{AB}{2a}$, $\frac{AB}{3a}$, &c. usque ad basin $\frac{AB}{A} = B$: Vel (à base sursum) $\frac{AB}{A}$, $\frac{AB}{A-a}$, $\frac{AB}{A-2a}$, $\frac{AB}{A-3a}$, &c. usque ad $\frac{AB}{A-A} = \frac{AB}{0}$ (si ad ipsam verticem procedatur;) vel (si tantum ad CI) usque ad $\frac{AB}{A-C}$. Quorum itaque omnium Aggregatum, sunt ipsum quod complent planum. D.

Eædemque rectæ, in suas singulæ à vertice distantias ductæ; putà, $\frac{AB}{a}$ in a, $\frac{AB}{2a}$ in $2a$, &c. hoc est, totidem AB; sunt ipsa Ashσ parallelogramma; (quæ itaque omnia, ut prius dictum est, sunt invicem æqualia.) E.

Sed & eædem rectæ in easdem distantias ductæ, sunt earundem Momenta respectu rectæ Aσ: Vel etiam, parallelogramma, iisdem sh rectis insistentia, Semiquadrantalem Ungulam complentia, aciem habentem Aσ: Quæ itaque sunt totidem AB. Et propterea quæ toti ASHhσ (figuræ interminatæ) insistit, aciem habens Aσ, (seu Plani ASHhσ momentum respectu Aσ,) est ipsum AB in A (totius altitudinem) ductum: Hoc est, A^2B. Et similiter ejusdem Ungulæ portio ipsi ACIhσ insistens (seu plani hujus Momentum respectu Aσ,) est AB in $A-C$; hoc est, A^2B-ABC: Quæque portioni SHIC insistit, aciem itidem habens Aσ, (seu plani momentum respectu Aσ,) est AB in C; hoc est ABC.

Habetur itaque, quæ plano interminato, magnitudinis Infinitæ,

Fig. 210, 211. A S H σ, insistit Ungula (aciem habens A σ) magnitudinis Finitæ; nempe Solido $\mathcal{A}^2$ æqualis. Ejusdemque Plani (magnitudinis infinitæ) quod conversione circa A σ describitur, Solidum Magnitudinis Finitæ: Quippe, ad ungulam illam, ut (P ad R, hoc est) ut Circuli Peripheria ad ejusdem Radium; (per prop. 12. hujus:) Estque hoc Torricellii *Solidum Hyperbolicum Acutum.*

F. Hinc etiam sequitur; istius Ungulæ (aciem habentis A σ) sive quæ toti A S H h σ, sive quæ utrivis portioni A C I h σ, vel S C I H, insistit, Centrum gravitatis (nempe si quod sit) seu Planum Æquilibrii, esse in eo plano quod inter extrema medium est. Nempe, primæ, in eo quod medium est inter A σ & S H, (quódque ab A σ seu H S distat $\frac{1}{2} A$;) secundæ, in medio inter A σ & C I, (quódque ab A σ seu C I distat $\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}C$;) tertiæ, in medio inter C I & S H, (adeoque à C I vel S H distat $\frac{1}{2}C$.) Quippe, cùm singulæ rectæ h s planum complentes æqualiter onerantur (nempe parallelogrammo AB,) Centrum gravitatis seu Æquilibrii planum in ipso medio erit (non minùs quàm si Parallelogrammi plano insisteret Parallelepipedum, altitudinem habens ipsi A æqualem;) per prop. 2. vel 3. hujus.

Atque in quo per aciem plano situm sit, jam supra sæpiùs ostensum est; (nempe, in eo quod Ungulæ altitudinem bisecat.) Ergo, in eâ rectâ quæ est utrique communis: quæ itaque recta, est Axis Æquilibrii.

In quo autem hujus rectæ puncto sit Centrum gravitatis (quod ungulam respiciat ipsi A σ contiguam) si inquiratur: Invenietur, (secundum ea quæ tradita sunt ad prop. 8. hujus) nusquam esse: seu (quod eodem recidit) in distantiâ (ab A S) infinitâ. Est enim Series Magnitudinum, series Æqualium (propter æqualia parallelogramma ipsis s h rectis insistentia,) cujus Index, 0; adeoque Magnitudo, verbi gratia, $\mathcal{N}\mathcal{P}$: Series verò Distantiarum (Centrorum gravitatis) ab A S, (utpote in mediâ longitudine rectarum s h,) Series est reciproca primanorum (qualis est ipsa rectarum series) cujus Index, -1: Et propterea Series Momentorum (ex illis conflata) series item reciproca primanorum; (propter $-1+0=-1$.) Adeoque Momentum integrum, $\frac{1}{-1+1}\mathcal{N}\mathcal{P}D = \frac{1}{0}\mathcal{N}\mathcal{P}\mathcal{D}$,

$\mathcal{N}P)\frac{1}{0}NPD(\frac{1}{0}D$. Hoc itaque per Magnitudinem NP divisum, exhibebit distantiam ab A S, $\frac{1}{0}D$; hoc est, quæ sit ad D (distantiam centri gravitatis basis ab A S;) seu, in hoc casu, ad $\frac{1}{2}B$; ut 1 ad 0. Quæ ratio est infinita.

Sed,

Sed, (ut ad Planum redeamus,) ostensum est, (§ D.) CSHI, (planum interminatum,) æquale esse aggregato omnium sh, hoc est, omnium $\frac{AB}{A} + \frac{AB}{A-a} + \frac{AB}{A-2a} + \frac{AB}{A-3a}$, &c. usque ad $CI = \frac{AB}{A-C}$. G. Fig. 210, 211.

Est autem $\frac{A}{A-a} = 1 + \frac{a}{A} + \frac{a^2}{A^2} + \frac{a^3}{A^3}$ &c. in infinitum. (Quod dividendo A per $A-1$ patebit.) Adeoque $\frac{AB}{A-a}$, $= 1 + \frac{a}{A} + \frac{a^2}{A^2} + \frac{a^3}{A^3}$ &c. in B. Et similiter ostendetur $\frac{AB}{A-2a}$, $= 1 + \frac{2a}{A} + \frac{4a^2}{A^2} + \frac{8a^3}{A^3}$ &c. in B. Et $\frac{AB}{A-3a}$, $= 1 + \frac{3a}{A} + \frac{9a^2}{A^2} + \frac{27a^3}{A^3}$ &c. in B. Et similiter in cæteris usque ad $\frac{AB}{A-C} = 1 + \frac{C}{A} + \frac{C^2}{A^2} + \frac{C^3}{A^3}$ &c. in B. Vel, posito $A = 1$, (quo ipsius A potestates omnes deleantur,) B in, $1 + a + a^2 + a^3$ &c. Et B in, $1 + 2a + 4a^2 + 8a^3$ &c. Et B in, $1 + 3a + 9a^2 + 27a^3$ &c. Et sic deinceps usque ad B in, $1 + C + C^2 + C^3$ &c.

$$A-a)\,A\,(1, + \frac{a}{A}, + \frac{a^2}{A^2}, + \frac{a^3}{A^3}, \&c.$$
$$\frac{A-a}{+a}$$
$$\frac{+a - \frac{a^2}{A}}{+\frac{a^2}{A}}$$
$$\frac{+\frac{a^2}{A} - \frac{a^3}{A^2}}{+\frac{a^3}{A^2}}$$
$$\frac{+\frac{a^3}{A^2} - \frac{a^4}{A^3}}{+\frac{a^4}{A^3}}$$
&c.

Fig. 210, 211.

Erunt ergo, omnes s h (spatium CSHI complentes) posito $A=1$,

$$\left.\begin{matrix} 1+a+a^2+a^3+a^4 \text{ \&c.} \\ 1+2a+4a^2+8a^3+16a^4 \text{ \&c} \\ 1+3+9a^3+27a^3+81a^4 \text{ \&c.} \\ \text{Et sic deinceps usque ad} \\ 1+C+C^2+C^3+C^4 \text{ \&c.} \end{matrix}\right\} \text{in } B.$$

Quorum omnium Aggregatum (seu ipsum CSHI planum) est (per prop. 1. hujus; vel prop. 64. *Arithmet. Infinitorum*)

$$C+\tfrac{1}{2}C^2+\tfrac{1}{3}C^3+\tfrac{1}{4}C^4+\tfrac{1}{5}C^5 \text{ \&c. in } B. = \text{Plano.}$$

Si verò non ponatur $A=1$, sed cujuscunque magnitudinis: Erit saltem Planum, seu PL, $= C + \frac{C^2}{2A} + \frac{C^3}{3A^2} + \frac{C^4}{4A^3} + \frac{C^5}{5A^4}$ &c. in B.

Vel, posito $\frac{C}{A} = E$; erit PL, $= 1 + \frac{1}{2}E + \frac{1}{3}E^2 + \frac{1}{4}E^3 + \frac{1}{5}E^4$ &c. in CB.

Res autem ad calculum sic commodissimè referetur.

Cùm C (per constructionem) semper minor sit quàm A (propter CI rectam, rectis A σ & HS interjectam; adeoque hujus à CI distantiam minorem quàm ab A σ:) Posito $A=1$, erit C in partibus decimalibus quamlibet proximè exprimenda. Hujúsque propterea potestates, C^2, C^3, &c. (quod semper obtinet ubi Radix seu Latus minus est quàm 1,) continuè decrescunt, adeoque in remotiora loca decimalia continuè detruduntur. Quamquam igitur, in plano designando, intelligantur ipsius C potestates, C^2, C^3, C^4, &c in infinitum continuandæ: Postquam tamen aliquousque processum est (& quidem plus minúsve prout major minórve ἀκρίβεια spectetur,) reliquæ, utpote in loca decimalia altiùs detrusæ quàm ut magni sint momenti, meritò possunt negligi.

Fig. 210, 211.

Exempli gratia; Positâ $AS = A = 1$. Sit $SC = C = 0{,}21$. $SH = B = 0{,}01$.

Erunt $C = 0{,}21$

$\frac{1}{2} C^2 = 0{,}02205$

$\frac{1}{3} C^3 = 0{,}003087$

$\frac{1}{4} C^4 = 0{,}000486203 -$

$\frac{1}{5} C^5 = 0{,}0000816802 +$

$\frac{1}{6} C^6 = 0{,}000014294 +$

$\frac{1}{7} C^7 = 0{,}000002573 +$

$\frac{1}{8} C^8 = 0{,}000000473 -$

$\frac{1}{9} C^9 = 0{,}000000088 +$

$\frac{1}{10} C^{10} = 0{,}000000017 -$

$\frac{1}{11} C^{11} = 0{,}000000003 +$

Horum Summa, $0{,}235722333$
Ducta in $B = 0{,}01$

Exhibet planum CSHI, seu $PL = 0{,}00235722333$ proximè.

Atque ad eandem formam procedendum erit, positâ $A = 1$, quæcunque fuerit C (quæ tamen semper minor est quàm A,) & B (quæ vel major esse potest, vel minor, quàm vel A vel C;) prout expositus casus postulaverit.

Atque huic non multùm absimilem Hyperbolæ quadraturam exhibuit nuper in *Logarithmotechniâ* suâ D. *Nicolaus Mercator*. De quâ verba fecimus in binis literis ad D. Vice-comitem *Brouncker*, (Societatis Regiæ *Londini* Præsidem dignissimum, & harum rerum scientissimum,) datis, *Julii* 8. & *Augusti* 5. 1668. atque in *Transactionibus Philosophicis Londinensibus*, sub idem tempus, insertis.

Habitâ verò, ut dictum est, Figuræ Hyperbolicæ Exterioris magnitudine: Etiam Interioris magnitudo facile obtinetur. H.

Intelligatur utique ab V vertice, recta VO, ipsi $A\sigma$ parallela; portionem abscindens SHVO. Cujus plani magnitudo, (sic ut jam traditum est inventa,) dicatur PL. Estque $AVO = \frac{1}{2} AOV\sigma = \frac{1}{2} AB$. Item $AXS = \frac{1}{2} A^2$ (nempe si sit Triangulum rectangulum; adeoque XS S et A ipsi A, figuræ altitudini, æqualis;) vel saltem (posito $SX = F$,) $AXS = \frac{1}{2} AF$: Ergo $HVX = AXS - AVO - OVHS = \frac{1}{2} A^2 - \frac{1}{2} AB - PL$, seu $\frac{1}{2} AF - \frac{1}{2} AB - PL$. Sed & hinc etiam, si opus sit, abscindi poterit (per HD ordinatim-applicatam) HDX triangulum; ut habeatur portio HDV.

Fig. 210, 211. Si verò, non quidem ad Axem, sed ad aliam quamvis Diametrum, ponatur hyperbola: Mensuram ejus non minus assequemur.

Nempe; Sumpto, ubivis in Hyperbolâ, vertice I; cui respondeat Diameter A I d x. Quippe hic similiter habebitur Magnitudo Triangulorum A C I, A S x, H d x, & spatii S C I H: Adeoque & I H x, I H d.

I. Sed &, Propter cognita triangulorum A S X, A O V, A D X, vel A S x, A C I, A d x, tum Magnitudines, tum Centra gravitatis, horúmve momenta respectu rectæ A σ; (per prop. 6. hujus:) Atque etiam (per jam tradita, § G.) Spatii S O V H vel S C I H magnitudinem, Centrique gravitatis ab A σ distantiam, ejúsque (respectu ejusdem A σ) momentum: Habebitur etiam portionum H V X, H D V, vel H I x, H d I, momentum. Cúmque (ut jam ostensum est) habeatur & harum magnitudo; habetur (momentum per magnitudinem dividendo) earundem distantia Centri gravitatis ab A σ.

K. Porro: Si consideretur eadem V H D semi-hyperbola, tanquam ex rectis ipsi H D parallelis, ad axem V D ordinatim-applicatis, conflata. Manifestum est, singularum H D ordinatim-applicatarum momenta, seu Triangula ipsis insistentia Semiquadrantalem Ungulam complentia, aciem habentem V D; earundem Semi-quadratis esse æqualia. Adeóque semisumma quadratorum illorum, erit totius V H D semi-hyperbolæ respectu ipsius V D momentum: (seu semiquadrantalis Ungula aciem habens V D.)

Posito itaque pro Axe Transverso, T; pro Latere Recto, L; sumptis Diametris interceptis, d, arithmetice proportionalibus, ut 1, 2, 3, &c. usque ad maximum $D = $ V D: Erunt quæ his respondent ordinatim-applicatarum (semi-hyperbolam complentium) Quadrata (ut in tractatu meo *De Conicis Sectionibus*, prop. 33. ostensum est:) totidem $dL + \frac{d^2L}{T}$ seu $\frac{dT + d^2}{T}L$, sumptis d arithmetice-proportionalibus, usque ad maximum $\frac{DT + D^2}{T}L =$ Quadr. H D. Adeóque (propter *Omn.* $d, = \frac{1}{2}D^2$; & *Omn.* $d^2, = \frac{1}{3}D^3$; per prop. 1. hujus;) Omnium quadratorum summa $\frac{\frac{1}{2}D^2T + \frac{1}{3}D^3}{T}L$, seu $\frac{3T + 2D}{6T}D^2L$: & semi-summa, seu plani momentum, $\frac{3T + 2D}{12T}D^2L$;

Atque

Atque hoc Momentum, per plani magnitudinem (modò exhibitam) divisum; exhibet ejusdem ab V D distantiam Centri gravitatis. Fig. 210, 211.

Sed ejusdem Centri distantia ab A σ, jam exhibita est: Ergo (propter A σ, A V D, non invicem parallelas,) exhibetur ipsum Plani V H D Centrum gravitatis; per prop. 26. Cap. præced.

Et, consequenter; (propter data etiam triangulorum A S X, A O V, H D X, Magnitudines & Centra gravitatis, per prop. 5. vel 6. hujus; ipsiúsque S O V H magnitudinem, jam ostensam;) datur etiam plani SOVH Centrum gravitatis; per prop. 27. Cap. præced.

Vel etiam, in Fig. 214. ubi Hyperbolæ A O, vertex A, Centrum C, Diameter conjugata C δ, Semissis diametri transversæ C A $= S = \frac{1}{2} T$; Ordinatim-applicatæ ad hyperbolæ diametrum D O $= b$; Ordinatim-applicatæ ad diametrum conjugatam δ O $= c$. Ostensum est (in Tractatu meo *De Conicis sectionibus, prop.* 35, 41.) Rectas δ O $= c$, esse totidem $\sqrt{:S^2 + \frac{T}{L} b^2:}$ (Sumptis C δ = DO $= b$, arithmeticè proportionalibus.) Earum itaque quadrata, sunt totidem $S^2 + \frac{T}{L} b^2$; quorum summa (per prop. 1. hujus) $AS^2 + \frac{AT}{3L} b^2$, (posito A pro altitudine figuræ;) Cujus itaque semissis, $\frac{ATb^2}{6L}$, est plani C δ O A (curvæ & diametro conjugatæ interjecti) momentum respectu C A. Fig. 214.

Sed & magnitudo cognoscitur, ex jam traditis; propter cognitam Spatii M C A O fig. 214. hoc est S A V H fig. 210, 211. magnitudinem; & magnitudinem trianguli M C δ fig. 214; adeoque & totius C δ O A.

Hujus itaque momentum per magnitudinem dividendo, habetur Centri gravitatis ejusdem distantia à C δ.

Verùm & Totius Parallelogrammi C D O δ, tum magnitudo tum & Centri gravitatis à C δ distantia habentur. Habetur itaque & partis reliquæ A O D, tum magnitudo tum Centri gravitatis ab eadem C δ distantia; per prop. 27. cap. præced.

Sed & ejusdem distantia sive à C M, sive ab A D, fig. 214. (hoc est ab A S, vel V D fig. 210, 211.) jam ante data est. Ergo & ipsum gravitatis Centrum datur, per prop. 26. cap. præced.

Quæque

Fig. 212, 213. Quæque de Semi-hyperbolâ Rectâ VHD jam ostensa sunt; eadem Scalenæ IHd, facile accommodantur. Est utique Semi-hyperbolæ IHd fig. 213. Centrum gravitatis in eâ rectâ (puta GR) diametro Id parallelâ, quæ ita dividit basin Hd, acsi anguli ad basin recti essent: Puta, ut recta GR fig. 212. (parallela rectæ VD) dividit basin HD.

L. Hinc etiam colligitur Conoidis (vel Pyramidoidis) Hyperbolici tum Magnitudo tum Centrum gravitatis. Cum enim similia plana solidum complentia, basi parallela, sint in duplicatâ ratione ordinatim-applicatarum, seu ut harum quadrata; hoc est, ut totidem $\frac{dT + d^2}{T} L$, sumptis d arithmetice-proportionalibus; Solidúmque Cylindricum seu Prismaticum super eâdem base, æque altum, compleant plana totidem maximo æqualia, $\frac{DT + D^2}{T} L$: Erit Conoides illud seu Pyramidoides, ad Solidum hoc Cylindricum seu Prismaticum, (propter T, L eadem perpetuò utrobique,) ut omnia $dT + d^2$, (sumptis d arithmetice-proportionalibus,) ad totidem $DT + D^2$ (sumptis D maximo æqualibus;) hoc est (ut modò ostensum est, ex prop. 1. hujus,) ut $\frac{1}{2} D^2 T + \frac{1}{3} D^3$ ad $D^2 T + D^3$; seu ut $3T + 2D$ ad $6T + 6D$. Quod ipsum jam olim demonstravimus, ad prop. 163. *Arithmeticæ Infinitorum*. Et perinde obtinet sive Conoides hoc vel Pyramidoides, Erectum sit, sive Scalenum.

M. Sunt autem planorum horum Distantiæ à Vertice, ipsis d diametris interceptis proportionales; adeóque eorum Momenta respectu plani tangentis in vertice, ut totidem $d^2 T + d^3$, sumptis d arithmetice proportionalibus; qualia totidem $D^2 T + D^3$ sunt momentum Solidi istius Cylindrici seu Prismatici in maximâ distantiâ suspensi; adeóque illorum omnium summa, seu Momentum Solidi (per prop. 1. hujus) $\frac{1}{3} D^3 T + \frac{1}{4} D^4$. Quod quidem momentum, per magnitudinem $\frac{1}{2} D^2 T + \frac{1}{3} D^3$ divisum; exhibet $\frac{4T + 3D}{6T + 4D} D$ Distantiam Centri gravitatis à vertice Conoidis vel Pyramidoidis (sive Erecti, sive Scaleni,) in ipso Solidi Axe constituti.

$$\tfrac{1}{2} D^2 T + \tfrac{1}{3} D^3) \tfrac{1}{3} D^3 T + \tfrac{1}{4} D^4 (\frac{4T + 3D}{6T + 4D} D.$$

Eadémque est distantia à Plano Verticem tangente, in Erecto,

Erecto, (cujus Altitudo eadem est cum D, maximâ diametro inerceptâ:) Fig. 212, 213.
In Scaleno verò, $\frac{4T+3D}{6T+4D}A$; posito A pro figuræ altitudine, seu distantiâ maximâ.

N. Cum Hyperbolæ verò Quadraturâ, conjunctam esse Curvæ Parabolicæ Ἔυθυνσιν, seu Rectæ huic Curvæ æqualis exhibitionem; jam olim demonstravimus in Tractatu Epistolari *de Curvarum* Ἐυθύνσει & Πλατυσμῷ, Tractatui *de Cycloide* subjuncto. Ubi etiam, Conoidis Parabolici Superficiei Curvæ, æqualem Planam exhibuimus.

O. Atque hic quidem pateret Campus satis amplus; si ad Curvarum aliarum Linearum Rectificationem, & Superficierum Complanationem, (vel Rectarum illis, Planarum his, æqualium exhibitionem,) liberet procedere: (Qualia non pauca in illo de Ἐυθύνσει & Πλατυσμῷ tractatu strictim indicavimus, & multò plura in promptu esset exhibere:) Centrique gravitatis in illis investigationem.

Aliáque multa, consimilis argumenti, de figurarum aliarum, aut etiam linearum curvarum, Magnitudinibus, Momentis, & Centris gravitatis, Solidísque aut Superficiebus earundem variâ conversione factis, magnâ varietate adjungi possent.

Verùm, ex his non pauca, ibidem (saltem breviter) insinuata sunt: Aliáque, juxta methodos hic supra traditas, cum opus fuerit, excogitari poterunt, & Calculo subjici. Atque tandem aliquando sistendum videtur, ne in immensum excrescat volumen, quod jamjam multò ultra quàm speraveram excrevit.

Missis itaque aliis; Unam adhuc de Hyperbolâ Speculationem subjungam, quam *Wrennio* nostro debemus: Qui Solidum Hyperbolicum, convexo-concavum, Torni ope acie Dolabræ rectilineâ obliquo ad Axem situ positâ, conficere docuit. Quam rem, ad meas methodos reductam, sic visum est exponere, & paulò fusiùs prosequi: Ejúsque Solidi Sectiones, & Centra gravitatis, considerare.

PROP. XXXII.

A.B. Si in quacunque ab Axe Torni distantiâ, ponatur Acies Dolabræ recta, in situ ad illum Axem (non parallelo, ut in Tornando Cylindrum, sed) quocunque obliquo: Formabitur torno Cylindroides Hyperbolicum Convexo-concavum.

C. Et quidem ea Hyperbola; cujus Semi-axis transversus æquatur minimæ distantiæ aciei dolabræ ab Axe Cylindroidis (seu Semi-diametro basis inscripti Cylindri;) Axísque conjugatus cum Asymptotâ eum faciat angulum, quem facit Dolabræ Acies recta, cum rectâ axi torni parallelâ.

D. Unde patet methodus, Cylindroides torno formandi, cujus sectio per axem, sit data Hyperbola.

E. Solidi hujus sectiones Plano factæ; si planum illud sit, ad Axem Solidi, Rectum; sunt Circuli.

F.L. Si, ad Axem, minus obliquum quam est Asymptota; Ellipses.

F, H, I. Si similiter inclinatum sit atque ipsa Asymptota; sunt Parabolæ; vel (si etiam per Centrum sit) Parallelogrammum.

F,G,K. Si adhuc Obliquiùs secet Axem, vel etiam sit Axi Parallelum; Oppositæ Hyperbolæ; vel (si axi parallelum atque per verticem Hyperbolæ Genetricis) opposita Triangula.

M. Solidi sic constructi (à Centro utrinque æqualiter continuati) Magnitudo, nota est: Quippe ad Cylindrum circumscriptum, ut $3\,LT + 4\,H^2$, ad $3\,LT + 12\,H^2$. Et Centrum gravitatis in Centro solidi, seu Axis medio.

Semisolidi

Semisolidi (plano per Centrum, ad Axem recto, abscissi,) Centrum gravitatis, in Axe situm, abscindit axis sui partem ad Centrum, quæ sit ad totum, ut $3LT + 6H^2$, ad $6LT + 8H^2$. N.

HOc quò commodiùs absolvatur; Lemma præmittam, in meo de ’Ευθύνσει Tractatu; modò memorato, insinuatum; Demonstratione ex meo de *Conicis Sectionibus* tractatu, prop. 35, 40. petitâ. Ad hunc sensum; A. Fig. 214.

Si ad Rectæ alicujus puncta quotlibet, æqualibus intervallis sumpta, ordinatim-applicentur Rectæ, quarum Quadrata sint, ut numerorum continue consequentium 1, 2, 3, 4, &c. quadrata, eodem aliquo vel æqualibus quadratis aucta: Quæ per harum extrema reliqua transit Curva, est Hyperbola.

Quippe, (in fig. 27. ibidem, quam hic repeto fig. 214.) Manifestum est rectas δA, tales esse quales innuit Lemma; (propter Cδ, Cδ, Cδ, &c. ut 1, 2, 3, &c. & CA communem:) Quæ si in situm δO transferantur, ad Cδδ ordinatim-applicatæ; Hyperbolam AOO designabunt.

Quodsi, manentibus CA, δO, ordinatim-applicatis, intervalla Cδ, δδ, minora fuerint vel majora quàm nunc sunt; vel etiam angulus ACδ, qui jam rectus intelligitur, fiat obliquus quilibet; prodibit utcunque AOO Hyperbola; sed cujus aliud erit Latus-rectum, aliúsque ad Asymptoton CM angulus δCM, aliúsque angulus quem cum diametro faciant conjugata diameter & ordinatim-applicatæ.

Demonstratio petitur, ex meis *de Conicis Sectionibus* prop. 35, 41. ubi ostenditur, rectas ad Hyperbolæ diametrum conjugatam ordinatim-applicatas δO; hoc est, CD distantias, punctorum applicationis ad diametrum, à Centro, quas illic c dicimus; (ex Semidiametro transversâ, & diametro interceptâ aggregatas, seu $\frac{1}{2}T + d$;) esse $\sqrt{:\frac{1}{4}T^2 + \frac{T}{L}h^2:}$ Quarum itaque quadrata sunt, $\frac{1}{4}T^2 + \frac{T}{L}h^2$: (Positis T pro diametro transversâ, L pro latere recto, & h pro ordinatim-applicatâ ad hyperbolæ diametrum.) Adeoque, (propter T, L, quantitates permanentes,) si sumantur h, hoc est DO, seu Cδ, arithmetice-proportionales ut 1, 2, 3, &c. manifestum

festum est, quadrata illa, $\frac{1}{4}T^2 + \frac{T}{L}b^2$, esse, ut *Quadrata æqualia, quadratis arithmeticè-proportionalium aucta.* Quæ itaque cùm sit Hyperbolæ generalis proprietas, (quæcunque fuerit ratio Diametri transversæ ad Latus-rectum, & quemcunque ad diametrum angulum faciant ordinatim-applicatæ;) Lemma constat.

B. His præmissis; Intelligatur (fig. 215.) Acies Dolabræ recta, Fig. 215. A O O, in quacunque ab Axe Cylindroidis (torno conficiendi) distantia, situ quocunque obliquo (ad axem illum) posita. Manifestum est, per rectam illam A O O, transituram esse planum aliquod, ut O A α, cui parallelus sit Cylindroidis axis C δ: Rectámque aliquam in eo plano, axi parallelam, ut A α α, (nempe, ex parallelis eam quæ sit axi proxima,) lineam contactûs esse quâ planum illud tangat Cylindrum, (Cylindroidi inscriptum,) cujus Axis C δ; & basis radius C A; (quæ est minima distantia aciei dolabræ, quantum opus sit continuatæ, ab Axe Cylindri seu Cylindroidis formandi.) Sumptísque in Axe C δ δ, partibus continuè æqualibus C δ, δ δ, &c. atque ad eum perpendicularibus C A, δ α, &c. erectísque itidem ad planum C A α perpendicularibus α O, α O, &c. Manifestum est, rectas α O, esse ut 1, 2, 3, &c. numeros continuè consequentes; earúmque quadrata, ut quadrata horum: Et propterea (propter angulum δ α O rectum, rectásque α δ invicem æquales,) junctis omnibus O δ, quadrata harum esse, ut quadrata numerorum illa æqualibus quadratis aucta.

C. Adeoque; Si Torni ope, circa axem C δ (fig. 215.) describi intelligantur in Cylindroide Circuli, quorum radii sint ipsæ δ O rectæ: Sectio per axem exhibebit ipsum δ C A O (fig. 214.) planum. Erunt utique Circulorum illorum radii, planum complentes, ipsis δ O, utriusvis figuræ, æquales. Nempe si, in binis figuris, sumptis tum A C æqualibus, tum æqualibus C δ respectivis; sumantur α O fig. 215. ipsis C δ fig. 214. respectivis æquales: Quod fit, sumpto O A α fig. 215. angulo semi-recto; (qualis est, in fig. 214. δ C M, quem cum axe conjugato C δ facit Asymptota C M:) Si verò alius sit angulus O A α quam semirectus; illi congruet Hyperbolæ quæ similem habeat angulum, δ C M; ut nempe C δ fig. 214, 215. sint respectivis α O fig. 215. æquales.

D. Constat itaque, non modò Cylindroides hujusmodi torno formari posse cujus sectio per axem sit hyperbola; sed &, quæ sit data Hyperbola. Quippe exponatur Hyperbola A O O (fig. 214.) quælibet, cujus Centrum C, semi-axis transversus C A, axis conjugatus C δ,

&c

& C M asymptota; cui similem imperatum sit torno exhibere: Hoc tantum curandum erit; nempe ut C A fig. 215. sit æqualis ipsi C A fig. 214. sitque angulus α A O fig. 215. ipsi δ C M, fig. 214. (quem cum Asymptotâ facit axis conjugatus) æqualis.

Solidum verò sic constructum cùm varias admittat sectiones plano factas; eas ut ordine exquiramus, considerabimus hoc idem solidum ut aliâ constructione formatum; conversione scilicet Hyperbolæ O A O fig. 216. circa conjugatum axem δ C δ. Quippe hoc, idem esse solidum atque illud quod Torno constructum iri modò docuimus, ex dictis satis patet. E. Fig. 216.

Cúmque Solidi hujus sectio quælibet plano facta, sit alicui per Axem sectioni recta, seu perpendicularis: Esto ea per Axem sectio O o o O; in quâ oppositæ Hyperbolæ (Genetrices) A O, a o; quarum Centrum, C; Axis conjugatus (qui & Solidi Axis est) δ C δ; Asymptotarum altera, C M; Axis Transversus, A a $= 2$ C A $= T = 2S$; Axis interceptus, A D $= d$; à Centro distantia, C D $= c = \frac{1}{2}T + d = S + d$; Ordinatim-applicata ad hyperbolæ axem, D O $= h$; cujus quadratum, $h^2 = Ld + \frac{L}{T}d^2 = \frac{Td + d^2}{T}L = \frac{c^2 - S^2}{T}L$; (quæ sunt itaque, ut series Primanorum aucta serie Secundanorum; aut etiam, ut Series Secundanorum mulctata serie Æqualium:) Adeoque $c^2 = S^2 + \frac{T}{L}h^2$: Quod itaque est quadratum rectæ C D (distantiæ à Centro) vel (huic æqualis) O δ, ordinatim-applicatæ ad Axem conjugatum. (Quæ omnia olim demonstravimus, *Con. Sect.* prop. 35, 41.) Et, propterea, sumptis C δ, hoc est D O $= h$, arithmeticè proportionalibus; erunt omnia rectarum δ O, ordinatim-applicatarum ad Axem conjugatum, (spatium O δ C A complentium,) quadrata, totidem $S^2 + \frac{T}{L}h^2$, sumptis h arithmeticè-proportionalibus: Hoc est, Series Æqualium aucta serie Secundanorum.

Sed &, sumpto M in Asymptotâ C M, erit (per *prop.* 39. *ibidem*,) ut L ad T, sic quadratum C δ seu D O, hoc est h^2, ad quadratum δ M. Adeóque quadrata omnium δ M (spatium M C δ complentium) sunt totidem $\frac{T}{L}h^2$; sumptis C δ $= h$, arithmeticè proportionalibus.

Ma-

Fig. 216. Manifestum autem est, (ex constructione solidi,) quæ rectis A a, O o, insistunt erecta plana (solidum complentia) totidem esse circulos; quorum diametri sunt ipsæ A a, O o, rectæ. Quippe Radii C A, ♂ O, circa Axem ♂ C ♂ conversi, totidem describunt Circulos.

F. Intelligatur autem, sumpto, ubivis in ♂ O rectâ, puncto m, recta per Centrum C m, cui erectum insistat Planum sectionem faciens, quam itaque compleant rectæ m (ipsis m punctis insistentes:) Quarum quadrata (utpote, in suis respectivè circulis, inter diametri segmenta O m, m o, mediarum proportionalium, seu ordinatim-applicatarum ad Circuli diametrum,) sunt totidem quadrata ♂ O, demptis respectivis quadratis ♂ m; seu $m^2 =$ ♂ O q — ♂ m q.

Sitque 1°, punctum m in ♂; adeoque ♂ m = o, & ♂ O q — ♂ mq = ♂ O q: Et propterea, quæ rectæ C ♂ insistit sectio, eadem erit atque ♂ O A C hyperbola.

Sit 2°, puncto m in M, (nempe C m eâdem existente atque C M asymptota;) adeoque ♂ m = ♂ M, & ♂ m q = ♂ M q $= \frac{T}{L} h^2$: Et propterea ♂ O q — ♂ m q $= S^2 + \frac{T}{L} h^2 - \frac{T}{L} h^2 = S^2 = m^2$: ipsæque m, totidem S, invicem æquales. Adeoque, quæ Asymptotæ insistit sectio, est Parallelogrammum Rectangulum.

Sit 3°, punctum m inter ♂ & M; adeoque ♂ m minor quam ♂ M, sed eidem ubique proportionalis; putà in ratione n ad h. Adeoque ♂ m q $= \frac{T}{L} n^2$: Et ♂ O q — ♂ m q $= S^2 + \frac{T}{L} h^2 - \frac{T}{L} n^2 = S^2 + \frac{h^2 - n^2}{L} T = m^2$. Quæ itaque (propter n minorem quam h) sunt quadrata ordinatim-applicatarum ad hyperbolæ axem conjugatum, (utpote series Æqualium aucta serie Secundanorum;) Quæ quidem Hyperbola Semi-axem transversum habet $S =$ C A, seu transversum Axem $T =$ A a; & latus rectum $\frac{h^2}{h^2 - n^2} L$: Estque conjugatus axis ipsa C m, recta; Centrum, C.

Sit 4°, punctum m inter O & M, (inter Curvam & propiorem Asymptotam; adeoque C m, continuata, curvam secabit; & quidem utrinque continuata, sectiones oppositas:) Adeoque (propter ♂ m majorem quam ♂ M, seu n majorem quam h,) erunt ♂ O q — ♂ m q =

$= S^2 + \frac{T}{L}b^2 - \frac{T}{L}\kappa^2 = m^2$, hoc est $S^2 - \frac{\kappa^2 - b^2}{L}T$; quadrata ordinatim-applicatarum ad Ellipseos conjugatum axem, (per *Con. Sect. prop.* 28. utpote series Æqualium mulctata Serie Secundanorum;) cujus axis transversus, T, seu $2S$, $=$ A a; & Latus rectum, $\frac{b^2}{\kappa^2 - b^2}L$: Et conjugatus axis, ipsa C m recta; quæ curvam A O secabit in eo puncto cui respondet $\frac{\kappa^2 - b^2}{L}T = S^2$. Fig. 216.

Omnis igitur hujus solidi sectio, plano per Centrum facta, erit vel Circulus, nempe si super rectam C A; vel Ellipsis, si inter C A & C M (seu inter curvam & asymptotam proximam;) vel Parallelogrammum, si in ipsâ Asymptotâ; vel Hyperbola (seu potius Oppositæ Hyperbolæ, infra supraque,) si per C m inter C M & C δ; vel ipsa quidem Genitrix hyperbola, si per Axem C δ.

Intelligatur deinde, Sectio rectæ $\kappa\mu$, axi parallelæ, insistens. Eruntque, & hîc, omnia quadrata rectarum punctis μ insistentium (planum complentium,) puta μ^2, $= \delta$ O q $- \delta\mu$ q $= \delta$ O q $-$ Cκq (propter $\delta\mu =$ Cκ.) G. Fig. 217.

Ideoque, si κ sit in C; erit (ut prius) sectio per $\kappa\mu$, eadem quæ per C δ, hoc est δ O A Genitrix hyperbola (propter $\delta\mu = 0$.)

Si κ sit in A vel a; adeoque Cκ $=$ C A $= S$: Erunt δOq $-$ Cκq $= S^2 + \frac{T}{L}b^2 - S^2 = \frac{T}{L}b^2 = \mu^2$. Quæ itaque sunt quadrata ordinatim-applicatarum in triangulo, (utpote Series Secundanorum;) seu potiùs binis triangulis communem verticem A habentibus, quæ fiunt rectis decussantibus eundem angulum facientibus quem faciunt Asymptotæ se mutuò in plano decussantes.

Si κ sit inter C & A, vel C & a; adeoque Cκ $= \sigma$ minor quàm S; Erunt δ O q $-$ C κ q $= S^2 + \frac{T}{L}b^2 - \sigma^2 = \mu^2$, quadrata ordinatim-applicatarum ad conjugatum axem hyperbolæ; (quippe series Æqualium aucta serie Secundanorum:) cujus Semi-axis transversus est $\sqrt{:S^2 - \sigma^2}$: (Nempe, quæ puncto κ insistit ordinatim-applicata in Semicirculo A a;) Latus rectum, $\frac{2L}{T}\sqrt{:S^2 - \sigma^2}$, seu $\frac{L}{S}\sqrt{:S^2 - \sigma^2}$: atque axis conjugatus, ipsa $\kappa\mu$ recta.

Fig. 217. Si κ sit extra Solidum, putà ultra A vel a, (adeoque plani secantis pars media etiam extra solidum,) Planum secans in iis punctis occurret ubi est δO (vel δo) $= C\kappa = \delta\mu$; (quæ itaque puncta sunt vertices oppositi:) Atque ultra hæc puncta, existente μ intra solidum, erunt $\mu^2 = \delta O q - \delta\mu q = \delta O q - C\kappa q = S^2 + \frac{T}{L}b^2 - \sigma^2$; hoc est (propter σ majorem quam S,) $\frac{T}{L}b^2 - \sigma^2 + S^2 = \mu^2$; quadrata ordinatim-applicatarum in Hyperbola (seu Oppositis hyperbolis) ad suum axem: (utpote Series Secundanorum mulctata serie Æqualium:) Cujus Axis transversus est $2\sqrt{\frac{\sigma^2 - S^2}{T}L}$, & Latus rectum, $2\sqrt{\frac{\sigma^2 - S^2}{L}T}$. Centrum verò, ipsum κ; atque Axis, $\kappa\mu$.

Omnis igitur hujus Solidi Sectio, plano quod Axi sit parallelum facta, est, vel Opposita Triangula ad eundem verticem, nempe si per verticem hyperbolæ Genitricis; vel Hyperbolæ Oppositæ, si alibi.

H. Intelligatur denique, ubivis in Hyperbolæ Genitricis axe A a, Fig. 218. quantumvis producto, sumi punctum κ; unde ducatur (cui insistat sectio) in plano per Axem solidi, recta $\kappa\pi$, solidi Axi Cδ non parallela, sed eidem alicubi occurrens.

Et quidem si sumatur κ in C; fiet sectio per Centrum, de quâ jam supra dictum est: In quâ quadrata ordinatim-applicatarum sunt $m^2 = S^2 + \frac{T}{L}b^2 - \frac{T}{L}n^2$: Adeoque sectio ipsa, vel Hyperbola, vel Parallelogrammum, vel Ellipsis; prout n minor est, vel æqualis, vel major quam b.

Jam verò, cuivis prædictarum C m, parallela intelligatur $\kappa\pi$. Sitque $C\kappa$ ($= m\pi$) $= \sqrt{\frac{T}{L}F^2} = F\sqrt{\frac{T}{L}}$; (uti priùs erat $\delta m = \sqrt{\frac{T}{L}n^2} = n\sqrt{\frac{T}{L}}$.) Adeoque $\delta\pi = \delta m + m\pi$, vel $\delta m - m\pi$, vel $m\pi - \delta m$, (pro vario situ punctorum m, π;) hoc est, æqualis summæ vel differentiæ rectarum δm, $m\pi$; hoc est, ipsarum $n\sqrt{\frac{T}{L}}$, $F\sqrt{\frac{T}{L}}$; (nempe, Summæ, si punctum m sit intermedium inter δ & π: Differentiæ, si secus.) Adeoque ipsarum $\delta\pi$ quadrata, $\delta\pi q = \frac{n^2 \pm 2nF + F^2}{L}T$.

Cum

Cum itaque Quadrata rectarum punctis π insistentium (sectionis planum ipsi $\kappa\pi$ insistentis complentium,) puta π^2 sint (per prius ostensa) δOq $-$ $\delta\pi$q; erunt ipsa, $\pi^2 = S^2 + \frac{b^2 - \kappa^2 \mp 2\kappa F - F^2}{L} T$: (Nempe; $2\kappa F$ cum signo $-$, si m sit intermedium; cum signo $+$, si secus.) Ubi S^2 & F^2 sunt series Æqualium; $2\kappa F$, series Primanorum; $b^2 - \kappa^2$, series Secundanorum. Fig. 218.

Et quidem 1°, sit $\kappa\pi$ parallela ipsi CM asymptotæ: Adeoque (propter δm $=$ δM,) $b^2 = \kappa^2$, se mutuò perimentes. I.

Quo casu; si sit etiam $S^2 = \frac{F^2}{L} T$, (existente scilicet κ in A vel a; adeoque CA $=$ Cκ:) his item se perimentibus mutuò, solum superest $\frac{2\kappa F T}{L}$, & quidem cum signo $+$: (Nam, posito κ in A vel a, non potest punctum m intermedium esse inter δ & π, quin π erit extra Solidum:) seu (propter $\kappa = b$,) $\frac{2bFT}{L}$; seu (propter $S^2 = \frac{F^2}{L} T$, adeoque $F^2 = \frac{L}{T} S^2$, & $F = S\sqrt{\frac{L}{T}} = \frac{1}{2} T \sqrt{\frac{L}{T}} = \frac{1}{2}\sqrt{LT}$,) $bT\sqrt{\frac{T}{L}}$, series Primanorum; (ut quadrata ordinatim-applicatarum in parabola.) Adeoque quæ rectæ $\kappa\pi$, per verticem A vel a transeunti, utrivis Asymptotarum parallelæ, insistit Sectio, est Parabola. Cujus vertex, κ; Axis interceptus, $\kappa\pi$ $=$ Cm $= \sqrt{:}$ Cδq $+$ δMq: $= \sqrt{: b^2 + \frac{T}{L} b^2 :} = b\sqrt{\frac{L+T}{L}}$: Latus-rectum, $\frac{2FT}{\sqrt{: L^2 + LT}}$; vel (propter $F = \frac{1}{2}\sqrt{LT}$,) $T\sqrt{\frac{T}{L+T}}$.

Sin (manente $\kappa\pi$ parallelâ CM asymptotæ) punctum κ sit extra solidum (ultra A vel a,) adeoque $\frac{F^2}{L} T$ majus quam S^2: Erit etiamnum $2\kappa F$ seu $2bF$ cum signo $+$, (quippe posito κ extra Solidum, non poterit m intermedium esse, quin π etiam erit extra solidum:) Et $\pi^2 = S^2 + \frac{2bF - F^2}{L} T$, hoc est $\frac{2bF}{L} T - \frac{F^2 T - S^2 L}{L}$, series Primanorum mulctata serie Æqualium: Adeoque,

Fig. 218. & hîc, sectio erit Parabolâ; sed cujus vertex sit non in $\varkappa$, sed (ubi $\varkappa\pi$, intrando, curvam secat) in V; & $\varkappa$, in axe continuato extra Parabolam: Latus rectum (ut priùs) $\frac{2FT}{\sqrt{:L^2+LT}}$: Verticis distantia $\varkappa$V $= \frac{2F^2 - SL}{4F} \sqrt{\frac{L+T}{L}}$.

Si autem (manente $\varkappa\pi$ parallelâ CM asymptotæ) punctum $\varkappa$ sit intra solidum, (sive inter A & C, sive inter C & a,) erit C$\varkappa$ minor quàm CA; adeoque $\frac{F^2T}{L}$ minus quàm S^2: Potestque m vel m intermedium esse inter δ & π (nempe si $\varkappa\pi$ sumatur citra CM,) vel (si ultra) non esse: adeoque $2nF$ seu $2bF$, vel signo —, vel signo + affici. Adeoque $\pi^2 = S^2 - \frac{F^2}{L}T \mp \frac{2bF}{L}T$; series Æqualium, illic mulctata, hic aucta, serie Primanorum: utrobique, sectio erit Parabola, & $\varkappa$ in axe intra Parabolam: Latus rectum (ut prius) $\frac{2FT}{\sqrt{:L^2+LT:}}$; & verticis distantia $\varkappa$V $= \frac{SL - 2F^2}{4F} \sqrt{\frac{L+T}{L}}$; illic sursum, hic deorsum.

Omnis itaque Solidi hujus sectio, plano Asymptotæ parallelo facta, est Parabola, verticem habens in rectæ $\varkappa\pi$ illo puncto quo Curvam genitricem secat.

K. 2°. Si Cm cui parallela est $\varkappa\pi$, non sit ipsa CM asymptota, sed
Fig. 219. quæ obliquiùs secet solidi Axem Cδ; sumpto scilicet puncto m inter δ & M: erit n minus quam b.

Quo casu, si sit $S^2 = \frac{F^2T}{L}$, adeoque C$\varkappa$ = CA, sumpto scilicet $\varkappa$ in A vel a: His ita se perimentibus mutuò, erunt $\pi^2 = \frac{b^2 - n^2 \mp 2nF}{L}T$, quadrata ordinatim applicatarum in oppositis hyperbolis, (utpote series Secundanorum, mulctata vel aucta serie Primanorum;) quarum quidem axis transversus $\varkappa$V est extra solidum, vertices habens in eadem Curva genitrice: Signa verò — + respicient, hoc unum; illud, reliquum verticem.

Idem accidet, si sit S^2 minus quàm $\frac{F^2T}{L}$, adeoque $\varkappa$ extra solidum: nisi quòd jam $\varkappa$ non erit in verticum altero, sed in axe transverso alicubi

intra

intra vertices. Quippe tum $\pi^2 = S^2 + \frac{h^2 - n^2 \mp 2nF - F^2}{L} T$, hoc est, $\frac{h^2 - n^2}{L} T - \frac{F^2 T - S^2 L}{L} \mp \frac{2nFT}{L}$, erit series Secundanorum mulctata serie Æqualium, mulctata vel aucta serie Primanorum. Qui etiam est Locus ad Hyperbolam: Cujus Axis est ipsa $\varkappa\pi$, verticésque illius ea puncta quæ sunt in curva genitrice. Fig. 219.

Si S^2 majus sit quàm $\frac{F^2 T}{L}$, adeoque $\varkappa$ intra solidum: erunt $\pi^2 = S^2 + \frac{h^2 - n^2 \mp 2nF - F^2}{L} T$, hoc est $\frac{S^2 L - F^2 T}{L} + \frac{h^2 - n^2}{L} T \mp \frac{2nF}{L} T$; series Secundanorum aucta serie Æqualium, & mulctata vel aucta serie Primanorum; adeoque Sectio, oppositæ Hyperbolæ: Ipsaque $\varkappa\pi$ earundem Axis si curvam genitricem secet, vertices habens in ipsis intersectionibus, vel, si curvam illam non secet, Axis conjugatus.

Omnis igitur hujus Solidi sectio, plano facta quod obliquius secat axem solidi, quam eam secat Asymptota, sunt Oppositæ Hyperbolæ.

3°. Si C m cui parallela est $\varkappa\pi$, minus obliquè secet axem solidi quam Asymptota C M; adeoque sit m punctum intra M & O: erit n majus quam h: rectáque $\varkappa\pi$ oppositas curvas genitrices secabit. L. Fig. 220.

Quo casu, si $S^2 = \frac{F^2 T}{L}$, posito scilicet $\varkappa$ in A vel a; (cum non possit m cadere inter δ & π,) erit $\pi^2 = \frac{h^2 - n^2 + 2nF}{L} T$; hoc est, $+ \frac{2nF}{L} - \frac{n^2 - h^2}{L} T$; eritque sectio, Ellipsis; cujus Axis $\varkappa\pi$ V, & verticum alter in $\varkappa$, reliquus in opposita hyperbola.

Si verò $\varkappa$ sit extra Solidum; adeoque S^2 minus quàm $\frac{F^2 T}{L}$; (nec possit m cadere inter δ & π:) Erunt $\pi^2 = S^2 + \frac{h^2 - n^2 + 2nF - F^2}{L} T$; hoc est, $+ \frac{2nFT}{L} - \frac{n^2 - h^2}{L} - \frac{F^2 T - S^2 L}{L}$; Sectio item Ellipsis erit, cujus axis & ipsa $\varkappa\pi$, sed neuter verticum in puncto $\varkappa$, quod est in axe continuato extra Ellipsin: Verticesque in illis rectæ $\varkappa\pi$ punctis quibus oppositas curvas genitrices secat.

Sin S^2 majus quàm $\frac{F^2 T}{L}$, adeoque $\varkappa$ intra solidum; erunt $\pi^2 =$

Fig. 220. $S^2 + \frac{b^2 - n^2 \mp 2nF - F^2}{L} T = \mp \frac{2nFT}{L} - \frac{n^2 - b^2}{L} T + \frac{S^2 L - F^2 T}{L}$:
Sectioque Ellipsis erit; cujus axium alter est ipsa $\varkappa\,\pi$ recta, punctumque $\varkappa$ in neutro verticum, sed in axe illo intra ellipsin, cujus vertices sunt in eis ejusdem punctis quibus oppositas curvas genitrices AO, a o, secat.

Omnis itaque hujus Solidi sectio, plano facta quod ad Axem solidi minus obliquum sit quàm est Asymptota; est Ellipsis; vel saltem (si rectum sit ad axem) Circulus.

M. Fig. 214. Solidi hujus Centrum Gravitatis quod spectat; si totum spectemus, æqualiter utrinque continuatum, non est quod ambigemus in ipso C centro positum esse; propter tum ♪C♪ totius axem (in quo propterea Centrum gravitatis situm esse liquet, ex prop. 5. hujus;) tum Circuli planum A a, quod tum axem tum solidum etiam ita dividat ut singulæ segmenti unius particulæ, singulis alterius respectivè sumptis, æquiponderent; utpote æquales, & æqualiter utrinque remotæ; quare & in hoc etiam plano situm esse constat, per prop. 3. vel 4. hujus: adeoque in ipso C puncto quod est utrique commune.

Si verò alterutrum segmentum consideremus; puta O A a o, à dividente plano A a quantumlibet continuatum, vel hujus etiam segmenta quælibet planis ipsi A a parallelis abscissa, vel interjecta: Hic etiam rem facilè obtinebimus.

Cum enim, verbi gratiâ, in Plano C A O ♪, fig. 214. cujus conversione circa C♪ axem, istiusmodi semisolidum formatur; rectarum ♪O quadrata (quibus & circuli his radiis descripti sunt proportionales) sint, (per § A.) $S^2 + \frac{T}{L} b^2$, vel $\frac{1}{4} T^2 + \frac{T}{L} b^2$, hoc est, series Æqualium aucta serie Secundanorum: Sintque (per prop. 1. hujus) *omnia* T^2 idem atque T^2 (in altitudinem) H ductum, seu HT^2, & *omnia* $\frac{1}{4} T^2 = \frac{1}{4} HT^2$: atque *omnia* b^2, idem atque $\frac{1}{3} H^3$; & *omnia* $\frac{T}{L} b^2, = \frac{T}{3L} H^3$: Erunt *omnia* $\frac{1}{4} T^2 + \frac{T}{L} b^2, = \frac{1}{4} T^2 H + \frac{T}{3L} H^3$, (posito, H pro DO $= b$ maximo:) Solidúmque conversione vel Semiconversione factum, ad hanc quadratorum summam, ut Circulus vel Semicirculus ad quadratum radii. Adeoque ad Cylindrum æque altum cujus basis æquetur Circulo radii DO maximi, ut $\frac{1}{4} T^2 H + \frac{T}{3L} H^3$ ad $\frac{1}{4} T^2 H + \frac{T}{L} H^3$, seu ut $\frac{1}{4} LT^2 + \frac{1}{3} TH^2$ ad $\frac{1}{4} LT^2 + TH^2$ Hoc est, & $3LT + 4H^2$ ad $3LT + 12H^2$.

N. Sed & rectarum, adeoque & quadratorum aut circulorum ♪O, à CA distantiæ, sunt ut b arithmeticè proportionales: Adeoque (verbi

(verbi gratia) quadratorum ♂O momenta respectu C A, sunt totidem $\frac{1}{4}T^2h + \frac{T}{L}h^3$ (sumptis h arithmeticè proportionalibus usque ad H maximum;) Adeoque (per prop. 1. hujus) omnium (sive quadratorum sive circulorum) in suis locis suspensorum Momentum, ad momentum totidem maximo æqualium in distantiâ maximâ suspensorum, ut $\frac{1}{8}T^2H^2 + \frac{T}{4L}H^4$ ad $\frac{1}{4}T^2H^2 + \frac{T}{L}H^4$; hoc est $\frac{1}{2}LT^2 + TH^2$ ad $LT^2 + 4TH^2$, seu $LT + 2H^2$ ad $2LT + 8H^2$.

Cum itaque Magnitudinum ratio sit, ut $3LT + 4H^2$ ad $3LT + 12H^2$; & Momentorum ratio, $LT + 2H^2$ ad $2LT + 8H^2$; sitque Momentorum ratio ex rationibus Magnitudinum & Distantiarum composita: erit Distantiarum ratio, (hoc est, distantiæ Centri gravitatis à C A, ad distantiam totam seu altitudinem figuræ,) ut $3L^2T^2 + 18LTH^2 + 24H^4$ ad $6L^2T^2 + 32LTH^2 + 32H^4$ vel (abbreviando per $LT + 4H^2$,) ut $3LT + 6H^2$ ad $6LT + 8H^2$.

$$\frac{3LT+4H^2}{3LT+12H^2}\Big)\frac{LT+2H^2}{2LT+8H^2}\Big(\frac{3L^2T^2+18LTH^2+24H^4}{6L^2T^2+32LTH^2+32H^4}=\frac{3LT+6H^2}{6LT+8H^2}.$$

Adeoque (cum in Axe Solidi situm esse certum sit,) erit in Axe sic diviso.

Verbi gratia; si ponantur $L = T = H$: Erit ut $3+18+24 = 45$, ad $6+32+32=70$; seu, ut $3+6=9$, ad $6+8=14$; hoc est, ut 9 ad 14: Sic, Solidi Centri gravitatis (in C♂ siti) à C distantia, ad totam C♂. Atque similiter judicandum erit (mutatis mutatis) quæcunque ponatur ipsorum L, T, H, ad invicem ratio.

Quæque hîc de Magnitudine & Centro gravitatis Solidi Erecti, ejusve rectâ Portione ipsi A a plano adjacente dicta sunt: ad Scalena facile transferuntur; (posito A loco H pro figuræ altitudine;) Atque ad segmenta duobus utcunque planis plano A a parallelis interjecta; utpote quæ sunt duorum ipsi Plano A a adjacentium, vel Summa vel Differentia.

SCHOLIUM.

ATque hic tandem pedem figo; neque hoc *De Calculo Centri-Gravitatis* Caput ulteriùs produco. In quo si quispiam causetur me satis aliquando perplexum fuisse; utut id non negem, perplexo (siquod

(siquod aliud) subjecto imputandum erit. Nec dubito quin, qui intricatissimam rerum traditarum naturam intelligunt, me satis dilucidè pro subjectâ materiâ tradidisse, existimabunt; nec speraverint forsan clariùs hoc olim ab aliis traditum iri. Si cui nimius fuisse videar; (utut ego is sim qui de hoc omnium maximè conqueri debeam, qui incredibilem intricatissimi calculi laborem, ne dicam infinitum, sustinui solus:) qui tamen multiplicem rerum traditarum copiam perpendit, atque succinctam tradendi methodum; facilè pro me sponsor erit, me, pro tantâ materiæ varietate, etiam brevem fuisse: Dum ea, unico hoc capite, tradi videat, quæ, si, aliorum quorundam exemplum sequutus, in longum protraxisse vellem, ad ipsa satis volumina, neque pauca, materiam affatim suppeditarent. Contra vero, siquis istiusmodi alia non pauca adjungi potuisse queratur, quæ tanquam omissa desiderat: neque ego hoc negaverim, (neque id mihi in animo fuit, sic omnia undecunque corradere, ut nullum superesset sequenti spicilegium:) Addo tamen, etiam ea forsan ipsa, quæ tanquam desiderata causantur illi, si rite animum adverterint, ita universaliter tradi perspiciant, ut nihil ultra desit, quàm ut, universaliter tradita, ad particulares casus applicentur: Saltem eas hic methodos tradi, quæ si ad quæsita particularia accommodentur, etiam alia innumera, quæ hactenus pro difficilibus fuerint habita expedire poterunt.

Supersunt adhuc plura ad hanc, quæ præ manibus est, *De Mechanicis*, sive *De Motu* doctrinam spectantia: Sed preli moras atque difficultates jam expertus; hæc interim præmittenda judicavi, dum *Partem Tertiam*, jam inchoatam, absolvant operæ.

FINIS PARTIS SECUNDÆ.

ERRATA.

ERrata Preli, in opere tam difficili, mirum est quin occurrant aliqua; sed summa cura adhibita est ut sint paucissima, saltem quæ Calculum aut Sensum turbent. Opus totum (postquam absolutum est) accurate recensere, totúmque Calculum (quod tamen putaverim) iteratò examinare, nondum vacavit. Nonnulla tamen quæ animadverti menda quomodo emendanda sint Lectorem monendum duxi; cætera vel emendabit ipse, vel condonabit.

P*Ag*. 123. *l*. 15. Æquilibrii. *P*. 125. *l*. 25. incedat. *P*. 139. *l*. 6. notantur. *P*. 142. *l*. 32. duo Axes. *P*. 144. *l*. 12. quæ ex. *P*. 146. *l*. 19. Cuborum se- *P*. 151. *l*. 23. per 26. *l*. 26. datur ipsum. *P*. 154. *l*. 16. *nt* DP. *P*. 159. *marg*. Fig. 127, 128, 129. *P*. 160. *l*. 16. interceptarum. *P*. 162. *l*. 5. usque ad. *P*. 166. *marg*. Fig. 129, 131. *P*. 170. *l*. 16. *dele* si. *l*. 26. illis. *P*. 173. *marg*. Fig. 131, 133, 134. *P*. 175. *marg*. Fig. 127, 128, 129, 131, 133. *P*. 184. *l*. 28. $\pm s + 2$. *P*. 186. *l*. 25. plusquam infinitum. *P*. 191. *l*. 16. prismatici similiter inclinati. *P*. 207. *l*. 13. quadratorum. *P*. 210. *l*. 30. Semicirculo. *l*. 32. Semicirculi. *P*. 212. *l*. 32. *marg*. S. *P*. 224. *l*. 22. *marg*. S. *P*. 229. *l. pen*. $2s^3$. *P*. 233. *l*. 18. $-\frac{1}{2}eR^2$. *P*. 239. *marg*. Fig. 163. *P*. 249. *marg*. Fig. 164. *P*. 251. *l*. 35. prop. 27. *P*. 252. *l*. 32. $\frac{1}{6}c^2R$. *P*. 254. *l*. 9. $+\frac{1}{12}s^2v P +$. *Cætera nondum perlegi.*

MECHANICA: SIVE, De MOTU, TRACTATUS GEOMETRICUS.

Authore *JOHANNE WALLIS* S S. Th. D.
Geometriæ Professore *Saviliano* in Celeberrima Academia *OXONIENSI*; *Regalis Societatis* LONDINI, *pro Scientia Naturali promovenda*, Sodali; & *REGIÆ Majestati* à Sacris.

PARS TERTIA.

IN QUA,

De Vecte; aut unico, aut binis pluribúsve Fulcris sustento.

De Axe in Peritrochio, cum Potentiis cognatis.

De Trochleâ, seu Polyspasto.

De Cochleâ.

De Motibus Compositis, Acceleratis, Retardatis, & Projectorum.

De Percussione.

De Cuneo.

De Elatere, & Resilitione seu Reflexione.

De Hydrostaticis, & Aeris Æquipondio.

Variisque Quæstionibus Mechanicis.

LONDINI,
Typis *Gulielmi Godbid*; Impensis *Mosis Pitt*, ad Insigne *Albi Cervi* in vico vulgo vocato **Little-Britain**.
M DC LXXI.



MECHANICORUM,

SIVE

Tractatûs DE MOTU.

PARS TERTIA.

Ad Lectorem Monitio.



Ur Partem hanc Tertiam, (*ut priùs* Secundam,) *tanquam ex abrupto inchoemus; continuatis tum Capitum, tum Figurarum, Numeris: Ad Partem Secundam jam dictum est: Nempe, ut Citationes commodiùs peragantur.*

CAP. VI.

De Vecte.

Definitiones.

Def. I.

Vectem (*notæ significationis in usu vulgari*) *hic considera-mus*, *tanquam* Lineam Rectam Inflexilem, *Ponderibus vehendis*, *sustinendis*, *vel levandis accommodatam*: *Ponderisque vel nullius*, *vel saltem æquabilis*. *Græcis* μοχλὸς *dicitur*.

II.

Fulcrum (*Græcis* ὑπομόχλιον) *illud est quo Vectis sustinetur*: *Vel etiam super quo*, *tanquam immobili*, *movetur*.

V*Ectis* nomen, a *Vehendo* dici videtur, (ut *vector*, *vectio*, *vectura*, *vectigal*, *convexum*, *vexo*, *vexillum*, quæque his cognata sunt;) eúmque præsertim ipsius usum respicere, quo Bajuli (seu *Palangarii*) utrinque adhibiti, *Vecti* (*Palangæ* itidem dictæ) impositum Onus *vehunt*; Aut etiam (quod eodem recidit) quo Vectis, Trabs, seu Tignum, Fulcris utrinque sustentatum, incumbens Grave sustinet.

Vox Græca μοχλὸς, sive à μόχθος *labor*, *molestia*, sive (ut ὀχλεὺς ejusdem significatûs) ab ὀχλεύω *moveo*, dicatur; alterum potius Vectis usum respicit (quem Mechanici potissimum tractant) quo, unius Fulcri ope, Vis alteri Vectis extremo applicata, reliquo impositum Grave, faciliùs sublevat: Quo respicit & nostratium vox **Leaver**, tanquam a *levando* dicta, quod nostri dicunt **to lift**, vel etiam **to heave**, (quasi à *veho* diceretur inversis literis;) unde & nostratium vox **Heaven**, Cœlum denotans; tanquam *Elatum*, *Altum*, *Elevatum*;

(quomodo

(quomodo & Cœlum *convexum* dicunt Poetæ.) Eodem sensu nautæ, speciatim de Anchorâ sublevandâ, dicunt **to weigh Anchor**, hoc est, Anchoram sublevare, atque *invehere*; (cui contrarium est **to cast Anchor**, hoc est, projicere.)

A μοχλὸς dicitur μοχλεύω, quod primâ significatione est *vecte moveo*, (unde ad alia etiam molimina transfertur;) atque hinc Latinorum *molior*, *molimen*, *moles*, *molestia*, &c. dici videntur; nisi quis hæc à *moveo* dicta malit.

Nos, utrumque Vectis usum respicientes, quo & Vehendis seu sustinendis ponderibus, & Levandis etiam accommodatur; utrique definitionem accommodavimus.

Quod autem, à μοχλὸς, ὑπομόχλιον dicunt Græci (utpote quod Vecti subjacere solet,) Latinis *Fulcrum* dicitur, quod à *Fulcio*, *fulsi*, *fultum*, formatur eâdem analogiâ quâ à suis Verbis, eorúmve Supinis, formantur alia; nam prout à *lavatum*, *simulatum*, *ambulatum*, *involutum*, *sepultum*, formantur *lavacrum*, *simulacrum*, *ambulacrum*, *involucrum*, *sepulcrum*, (& siqua sunt similia) à *fultum* formabitur *Fulcrum*. Sed &, à *Fulcio*, *fulcivi*, *fulcitum*, etiam *Fulcimen* dicitur, & *Fulcimentum*, eodem significatu. Significat autem vel illud immobile super quo moveri Vectis intelligitur, ubi submovendis ponderibus adhibetur; vel bina illa (sive plura sint) fulcimina, quibus utrinque incumbens Trabs, seu Vectis, fulcitur seu sustinetur: Prout scilicet vel unico, vel binis (pluribúsve) Fulcris Vectis sustinetur.

III.

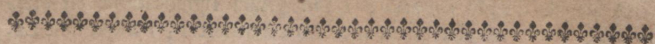
Applicationum puncta, Centrum Æquilibrii, *aliáque hujusmodi, sicubi hic occurrunt, eodem sensu intelligenda erunt quo suprà de Librâ, definitum est.*

Sic, (Fig. 221.) A B, Vectis; O, Onus levandum seu submovendum, vel etiam Obex amoliendus; V, Vis motrix adhibita; B, punctum applicationis ponderis; A, punctum applicationis Vis motricis; F, Fulcrum quo sustinetur; cujus apex C est Centrum motus, Axique Libræ respondet; Onúsque & Vis motrix, oppositis ad Libram Ponderibus respondent. Fig. 221.

Item, (Fig. 222.) A B Vectis, duobus fulcris seu bajulis F, F, sustentatum; O pondus seu onus impositum. Fig. 222.

Vectem autem tanquam rectam lineam (sed non flexilem) eâdem ratione hic habemus, quâ *Libram* suprà sic habuimus: Quoniam tanquam

tanquam nullius ponderis æstimatur. Et siquid, reverâ ponderis habeat, id vel oneri movendo, vel Vi motrici, vel partim huic partim illi, (pro vario situ) accensendum erit.



PROPOSITIONES.

PROP. I.

Si Vectis, (unico fulcro Oneri & Viribus intermedio nixus,) tanquam Libra consideretur; quæ de Librâ supra dicta sunt, eadem & Vecti accommodantur.

Fig.221. PUtà; si Vectis A B, Fulcro sustineatur in C; atque applicentur Onus in B, & Vis in A, (utraque deorsum prementia;) Vis & Onus contra-ponderant; (seu invicem contra nituntur;) hoc est, Vis deorsum in V, elevat O. per 1. Cap. 3.

Item, tantundem simul gravant seu premunt Fulcrum, quantum est utriusque simul (cum ipso Vecte) Vis (dum suspensum onus in quiete libratur;) per 2. Cap. 3. dúmque est in motu, quantum per 16. Cap. 3. determinatur.

Item, tantundem utrumque suum afficit seu gravat applicationis punctum, cui vel directè imminet, vel directè subest, (vel ipsum, vel ejus Centrum gravitatis,) atque si in ipso esset applicationis puncto. (Quod & alibi perinde obtinet.) Per 30. Cap. 2. vel 4. Cap. 3. & 16. Cap. 4.

Item, in ea ratione valent (Vis agendo, & Onus resistendo,) quæ ex rationibus Graduum (puta Ponderum & Virium,) & Distantiarum punctorum applicationis à Fulcro seu Centro motûs (cæteris paribus;) per 12. Cap. 3.

Item, si Vis (sic æstimata) oneri præpolleat; movebit: Si minus, non movebit. per 11. Cap. 1.

Adeoque, quo propiùs ad fulcrum sit Onus O, & Vis V remotiùs, eò minori Vi majus movebitur Onus. per 12. Cap. 3.

Item, si, propter curvatum Vectem (quem rectum supponimus;) vel (quod eodem recidit) propter Centrum motûs extra ipsum Vectem, (hoc est, extra rectam applicationum puncta jungentem;) vel

vel propter non easdem Oneris & Virium Directiones; vel aliàs undecunque, contingat; pro vario Vectis situ, inæquales subinde futuras esse motuum (Oneris & Virium motricium,) Obliquitates: Eædem hic anomaliæ contingent, quæ de Libra ostenduntur, prop. 14. Cap. 3.

Aliáque de Librâ tradita, etiam de Vecte intelligenda erunt. Vectis enim Libra est; & Fulcri vertex, est Libræ Axis, seu Centrum Motûs: Onúsque & Vis Motrix, sunt ut Pondera utrinque Libræ applicata. Adeóque quæ illic de Libra universaliter demonstrantur; speciatim Vecti conveniunt.

SCHOLIUM.

Notandum interim est; quamquam Vectium præcipuus usus esse soleat ad onera in altum levanda, (quem itaque vocabula horsum accommodata potissimum respicere videantur;) tamen eadem omnino ratio est, mutatis mutandis, Vectium in alio situ adhibitorum, ad quoscunque obices amoliendos; (eadémque & hic demonstratio.) Fig. 223. Puta, si, in situ horizontali, Vectis A B, firmiori fulcro F ad dextram posito nixus, adhibeatur (vi in A applicatâ) ad amoliendum obicem O ad sinistram positum; aut ad fores ibidem perfringendas; aliúdve hujusmodi perficiendum. Eodem modo; si fulcro F, supernè Fig. 224. posito, adhibeatur A B vectis, quo Clavus supernè fixus subducatur, vi adhibitâ in A quæ sursum præmat. Et sic alibi.

Dico autem, *firmiori Fulcro F.* Nisi enim satis firmum sit Fulcrum; Manente O, movebitur F, (ut fiat O fulcrum, & F mobile; de quo in Propositione sequente dicendum erit.) Sicut &, nisi vectis A B sit satis firmus; frangetur vectis A B, vel curvabitur. (Quæ & alibi similiter intelligenda erunt.)

Et quidem sic aliquando inter plura distribuitur motus; ut in ambiguo sit, quod Fulcrum dicatur, quod Mobile. Sic in Navium Remis; dum Vis Manubrio applicatur, Palmula Aquæ ut Fulcro innixa, Scalmum cum conjunctâ Nave submovet: Verum, cum neque ita firmum fulcrum sit Aqua, quin & ipsa nonnihil pressa cedat; ratione motûs hujus, Scalmus pro Fulcro erit, eritque Aqua pro Mobili: Sed &, cum neque Remus ipse tam validus aut firmus sit, quin Flectatur nonnihil seu Incurvetur, (etiam cum non frangitur;) tertius hinc oritur motus: Qui quidem tres motus se minuunt invicem. Quippe Aquæ Cessio, & Remi Flexio, motui Navis nonnihil demunt, qui major esset si non adessent illæ; sicut ex adverso, Motus Navis, eadémque Remi Flexio, Cessioni Aquæ; duóque motus reliqui, Flexioni

Flexioni Remi nonnihil demunt: Adeo quidem ut Vis eadem adhibita, quæ jam flectit; si nec Aqua cederet, nec submoveretur Navis, Remum frangeret. Et simile esto in aliis judicium.

Fig. 225, 226. Sed & nonnunquam gemini Vectes, decussatim positi, eidem communi Fulcro nitantur. Ut in Forficibus, & Forcipibus, ad interjectum obicem vel scindendum vel comprimendum adhibitis. Ubi duo Vectes A B, $\alpha\,\beta$, communi fulcro F nixi, (adhibitâ vi in A, α,) comprimunt interjectum obicem O; & quidem eò fortiùs, quò vel O propiùs est ad F, vel A α inde remotiùs.

Quæ autem ad hanc propositionem monemus; etiam in sequentibus obtinent.

Possent quidem hæc omnia deduci, ex prop. 4, 5, 6. Cap. 2. (ubi fundamenta jacta sunt pro Machinarum omnium viribus æstimandis:) Cùm autem id *de Libra* jam factum sit, Cap. 3. potius duxi, ea quæ de Librâ dicta sunt, ad Vectem hic transferre, propter similes utrobique affectiones ab iisdem principiis deductas.

PROP. II.

Si Onus, Vecti applicatum, Fulcro & Vi motrici interjaceat: Quæ de Libra traduntur, etiam huc facilè transferentur. Aut etiam, si Vis Fulcro & Oneri interjaceat.

Fig. 227. NEmpe; Si ad A B vectem, inter Vires in V, & Fulcrum in F, applicetur Onus in O: Vis sursum in V, secundum directionem suam procedens, elevat O contra directionem suam; (propter inflexilem A B:) Adeoque contra-nituntur vis & onus. Per 1. Cap. 3.

Fulcrum verò non utrâque vi premitur (vi scilicet oneris, & vi motrice,) quia vis motrix non est deorsum, nec Fulcro impeditur (ut in casu propositionis præcedentis;) sed sursum: Sed neque toto Onere premitur F, sed auxilio virium in V partim sublevatur. (Cui consonum occurrit ad prop. 18. Cap. 3.) Quantam autem oneris partem sustinet F, determinandum erit ex iis quæ post tradentur de Vecte duobus Fulcris sustentato.

Sed & hic in eâ ratione valent, Vis sursum nitendo, & Onus reintendo, quæ ex rationibus Graduum, & Distantiarum puncti applicationis à Fulcro, componitur. per 11 & 12. Cap. 3.

Atque si Vis (sic æstimata) præpolleat; submovebit Onus: Secus; non movebit. Et quidem si minus polleat, ne sustinebit quidem. Per 11. Cap. 1.

Adeoque, quo propius ad Fulcrum sit Onus, vel Vis remotior; eò minore Vi movetur majus Onus. Quippe sic Oneris Vis minuitur, Vis motrix augetur.

Quæque ad Prop. præcedentem, ex prop. 14. Cap. 3. notantur: etiam hic locum habent.

Eadem fere omnia dicenda veniunt, si Vis V, Fulcro & Oneri intercedat. Hoc saltem interest, quod Fulcrum jam supernè ponendum erit; & minus Onus, nonnisi majore Vi elevabitur: Sed neque tam Onere premitur Fulcrum, quam Virium parte. Fig.228.

PROP. III.

Si (ad Vectem cum unico Fulcro applicatorum) ratio Vis motricis, ad Onus, major sit quam reciproca distantiarum (punctorum applicationis) à Fulcro; Vis Onus movebit: Secus; non movebit: Si minor; ne sustinebit quidem.

$$\frac{\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}}{mn = nm} \qquad \frac{\begin{matrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{matrix}}{6 = 6}$$

Verbi gratia. Si Vis Motrix ad Vim Oneris, sit ut 2 ad 3; seu n ad m; sitque distantia VF ad OF, ut 3 ad 2, seu ut m ad n: Æquipollebunt quidem Vires (propter $2 \times 3 = 3 \times 2$, seu $mn = nm$;) sunt utique (ut jam ostensum est, ad prop. 1 & 2.) illarum valores in ratione ex graduum & distantiarum rationibus compositâ. Adeoque, nondum movebit. Sed si Vis motrix vel tantillum augeatur, aut minuatur Onus: Vis præpollebit, adeoque movebit Onus. Sin minuatur Fig.229, 230, 231.

nuatur Vis, vel Onus augeatur; Vis Onus ne ſuſtinebit quidem, per 9, & 11. Cap. 1.

Demonſtratio perinde valet, ſive Onus ultra fulcrum intelligatur; ut in fig. 229. ſive citra; ut in fig. 230. Aut etiam (ut in fig. 231.) ſi Vis utrique intercedat; niſi quod, hoc caſu, Vis motrix ſemper major eſſe debeat quàm Vis Oneris (propter minorem à Fulcro Diſtantiam) quò poſſit Vis Oneri æquipollere; ſicut, ex adverſo, ubi Onus citra Fulcrum eſt (Vi motrici & fulcro interjectum) Vis motrix minor, majori Vi ponderis, æquipollet; (propter minorem Oneris à Fulcro Diſtantiam:) Ubi autem Fulcrum intermedium eſt, poteſt utrumvis contingere.

PROP. IV.

Datum Pondus, datâ Vi, Vecte movere.

$$\begin{array}{c} n \\ m \\ \hline nm \end{array} = \begin{array}{c} m \\ n \\ \hline mn \end{array} \qquad \begin{array}{c} nV \\ mD \\ \hline mnDV \end{array} = \begin{array}{c} mO \\ nD \\ \hline mnDO \end{array} \qquad \begin{array}{c} 2V \\ 3D \\ \hline 6DV \end{array} = \begin{array}{c} 3O \\ 2D \\ \hline 6DO \end{array}$$

Fig. 229. INtelligatur vis V, oneri O, æquipollere; ſitque expoſitum Onus mO (quod utique ſit ad O ut m ad 1;) & nV vis expoſita, (puta quæ ſit ad V, ut n ad 1;) ſitque onus mO, vi nV movendum. Si Vectis AB (fig. 229) ita dividatur in puncto F, (quòd Fulcro incumbat,) ut ſit AF ad FB, ut m ad n; Vis nV in A adhibita, Oneri mO applicato in B æquipollebit; per 3. hujus. (Propter rationem virium ad onus, n ad m, reciprocam rationis diſtantiarum m ad n; adeóque, quæ ex utriſque componitur, momenti ad impedimentum rationem æqualitatis, per 6. Cap. 1.) Si itaque, vel tantillum ad Fulcrum verſus admoveatur Onus, (quo minuatur Impedimentum,) vel inde remotiùs applicetur vis (quo Momentum augeatur,) vel denique Fulcrum tantillum promoveatur ad Onus (quo utrumque fiat,) Momentum Impedimento præpollebit, & Vis expoſita (ſic adhibita) expoſitum Onus movebit. Per 9 & 11. Cap. 1.

Fig. 230, 231. Idem fiet, ſi Vectis AB ita in O dividatur, ut ſit AB ad OB ut m ad n. Quippe tum, poſito Fulcro in B, æquipollebit vis nV in A, ponderi

ponderi *m* O in O; (propter Vis & Oneris à Fulcro distantiis ipsis reciprocas;) Adeoque si vel Fulcrum Oneri, vel Onus Fulcro, tantillum admoveatur, vel remotiùs applicetur Vis; hæc Oneri præpollebit, adeoque movebit. Quippe tribus saltem hisce modis (ne plures nominem) augebitur ratio distantiarum A F ad O F.

Patet autem, in hac posteriori via, si Vis Oneris major sic quam Vis motrix; debere Onus Fulcro & Vi Motrici intercedere, ut in Fig. 230. Si Vis Motrix Vi Oneris major sit, potest Vis illa Fulcro & Oneri interponi, ut in Fig. 231. Verùm ubi hoc contingit, Vecte non opus erit; quippe Vis Motrix, Oneri immediatè applicata, movebit Onus.

PROP. V.

Si Vectis (Tignum, Palanga, seu Trabs oblonga,) situ Horizontali jacens, utroque sui extremo Fulcris sustineatur: Fulcra bina sustinentia, onus inter se partiuntur; idque in ea ratione quæ est reciproca distantiarum suarum à Vectis Centro gravitatis: Et quidem utrumvis eam totius portionem sustinet quæ ad totum eam habeat rationem, quam habet contrarii Fulcri distantia ad distantiam totam, seu Vectis longitudinem.

Adeoque, si Vectis, vel Trabs illa, sit æquabiliter gravis; & propterea Centrum gravitatis habeat in media longitudine; (aut etiam, si hoc propter aliam causam contingat;) Onus inter se æqualiter partiuntur.

Si verò Centrum gravitatis in mediâ longitudine non sit: Fulcrum illud magis premitur cui propius est Centrum gravitatis; atque in ea ratione quæ hac propositione determinatur.

Idémque valet, si Vecti ubivis applicetur Pondus quodvis. Nempe, si Pondus præcisè Vectis medio applicetur; æqualiter ab utroque Fulcro sustinetur. Si non in ipso medio, in eâ ratione premitur, ab incum-

bente Pondere, utrumvis Fulcrorum, quæ eſt reciproca diſtantiarum ſuarum à puncto applicationis. In ea verò ratione ad totum Pondus abſolutè conſideratum, qua eſt contrarii Fulcri Diſtantia (à puncto applicationis ponderis) ad Fulcrorum ab invicem Diſtantiam, ſeu Vectis longitudinem.

Si autem in pluribus punctis, plura applicentur Pondera; de ſingulis ſeorſum ſimile fiet judicium (nempe, quantam partem cujuſque Ponderis, utrumvis ferat Fulcrum;) atque inde de omnibus ſimul ſumptis. Vel etiam (quod eodem recidet) ibidem omnia applicata cenſeantur, ubi eſt commune omnium Centrum gravitatis.

Fig.232. ESto duobus Fulcris in A & B, Vectis A B ſuſtentus; cujus Centrum gravitatis ſit O punctum medium: Vel (quod eódem recidit, per prop. 16. Cap. 4.) Intelligatur A B Vectis tanquam linea recta nullius ponderis, quæ in ſui puncto medio O, onuſta intelligatur totius Vectis (Tigni ſeu Trabis) pondere, cujus Centrum gravitatis ibidem eſſe intelligatur: Vel denique (nam & hoc tantundem valet) Vectis puncto medio O, intelligatur Pondus quodlibet applicatum. Dico utrumvis Fulcrum ſemiſſe totius Ponderis onerari; adeoque Fulcra duo totum onus æqualiter inter ſe partire.

Manifeſtum utique eſt, Onus fulcro A incumbens, tantum eſſe, quanta Vis eſt quæ ibidem foret neceſſaria huic ſuſtinendo oneri, ſi (manente fulcro B) fulcrum A abeſſet. (Quippe tantum Onus eſt, quanta Vis eſt quæ ſuſtinendo ſufficit: per prop. 11. Cap. 1. vel prop. 18. Cap. 2.) Hoc eſt, (propter diſtantiam A B, duplam diſtantiæ O B,) quæ dimidio Oneri æquipollet, (per prop. 3. hujus.) Idémque ſimiliter oſtendetur de Fulcro B. Adeoque totum onus æqualiter inter ſe partiuntur duo Fulcra A, B. Quod oſtendendum erat.

Si verò Punctum O (quod ſit vel totius Vectis ſeu Trabis Tignive aut Palangæ Centrum gravitatis, vel punctum applicationis impoſiti Ponderis) non ſit in ipſo Vectis puncto medio: Utcunque tanto Onere
Fig.233. premitur fulcrum A, quanta Vis eſt quæ huic ibidem ſuſtinendo par eſſet, ſi abeſſet A fulcrum: Hoc eſt, (per prop. 3. hujus,) quod ſit, ad totum Pondus, in ea ratione quæ eſt reciproca diſtantiarum A B, O B; hoc eſt, ut O B ad A B. Et ſimiliter oſtendetur eo onere præmi fulcrum B, quod ſit ad Pondus totum, in ratione reciproca diſtan-

tiarum B A, O A; hoc est, ut O A ad eandem A B. Et propterea (ob eundem utrobique consequentem) onera fulcrorum A, B, sunt ad invicem, ut O B ad O A; hoc est, in reciproca ratione suarum (ab applicationis puncto) distantiarum. Quæ itidem erant demonstranda.

Sin plura applicentur Pondera, puta alterum in O, alterum in I: Similiter ostendetur, Fulcrum A, eam partem ponderis O sustinere, quæ sit ad totum ut O B ad A B; eamque partem ponderis I, quæ ad totum sit ut I B ad A B: Et Fulcrum B, eam sustinere ponderis O partem, quæ sit ad totum, ut O A ad B A; eamque partem ponderis I, quæ sit ad totum ut I A ad B A. Fig. 234.

Vel etiam si per prop. 27. Cap. 4. quæratur commune simul-utriusque Centrum gravitatis; atque ibidem utraque censeantur tanquam unum Pondus applicari: Hujus eam partem sustinebit utrumvis fulcrum, quam indicant reciprocæ distantiæ; (per modò demonstrata.) Tantundem utique gravant utcunque applicata pondera atque si ibidem essent ubi est commune omnium Centrum gravitatis: per prop. 16. & 27. Cap. 4.

SCHOLIUM.

Dico autem disertè, *In situ Horizontali jacens.* Quamquam enim de hac conditione prorsus tacere soleant Mechanicorum Scriptores (quantum scio, Omnes:) rationem onerum ad A & B, eandem assignent in Obliquo Vectis situ, quam assignant in situ Horizontali: Est tamen onerum, alia plane ad invicem ratio, in hoc, atque in illo, situ. (Ut ex dicendis ad prop. 8. patebit.) Quod quidem eousque verum est, ut, prout alterutrum Vectis extremum A altius elevatur, ita continuò minuatur Onus; donec tandem, Vecte ad situm perpendicularem redacto, Fulcrum A nihil prorsus oneris sustineat, sed B totum. Quod in erigendâ prælongâ Perticâ, vel Scalâ, facile quis deprehendat. Fig. 235.

PROP. VI.

Hinc sequitur; Ita posse ad eundem Vectem (duobus Fulcris sustinendum, vel duobus Bajulis ferendum,) applicari Pondus; ut unius Fulcri (seu Bajuli) onus, ad onus reliqui, eam habeat rationem quam quisque velit.

Fig.233. PUtà, si Gigas & Infans (seu Fulcra firmitudinum utcunque inæqualium) adhibeantur (ille quidem in B, hic in A,) eidem portando oneri, imponendo Vecti A B: quod ita moderandum sit ut ferentium viribus justâ proportione consulatur: Id fiet, si ita dividatur, in O, vectis A B, ut sit distantia B O ad O A, ut sunt vires A ad vires B. Quippe, tum erunt Onera Viribus proportionalia: per præced. Sed ipsius Vectis hic nulla habetur ratio.

PROP. VII.

Inde etiam Calculo colligetur; Quanta cuique Vectis puncto Firmitas requiratur, ne rumpatur.

Fig.233. EXempli gratia. Vectis A B, duo segmenta B O, O A, firmitate conjunctionis suæ in communi O puncto, impediuntur ne rupto Vecte ruant. Tanta igitur conjunctionis firmitudo ibidem requiritur, quanta si disjuncta essent vis fulcri foret necessaria utriusque segmenti extremo sustinendo. Si autem, disjunctione in O factâ, supposito Fulcro sustinendum esset utriusque segmenti extremum; onerandum foret (per prop. 5. hujus) fulcrum illud, tum semisse ponderis B O (propter Vectem B O, duobus fulcris in B & O sustentum;) tum semisse ponderis O A, (ob similem causam:) Hoc est, semisse totius A B. Tanta itaque firmitudinis Vis in O requiritur, ne Vectis suo pondere rumpatur.

Intelligatur deinde, eidem O puncto (præter ipsum Vectis seu Trabis pondus) imponi vel suspendi pondus aliud quantumvis. Manifestum est onerandum fore subjectum fulcrum illud, tum semisse totius

totius A B, (ob causam jam dictam,) tum toto onere Ponderis ibidem incumbentis. Tanta itaque Vectis firmitudo ibidem requiritur, quæ simul utrique (sui semissi, & toti ponderi imposito) æquipolleat.

Intelligatur demum proponi punctum quodvis aliud expendendum (extra punctum applicationis appensi ponderis) ut I. Manifestum est, si disjunctione ibidem factâ supponendum esset in I Fulcrum, onerandum fore fulcrum illud (ob causam modô dictam) tum semisse ponderis B I, tum semisse ponderis I A, (hoc est, semisse totius B A,) tum etiam (per prop. 5. hujus) ea parte oneris O (inter B & I suspensi) quæ sit ad totum ut B O ad B I; (atque similiter, si plura adhuc pondera sive inter B & I, sive inter I & A, imponi aut suspendi intelligantur, de singulis fiet judicium; adeoque, additione factâ, de omnibus:) tanta itaque firmitas in I requiritur quæ oneribus illis æquipolleat. Atque sic alibi, prout res tulerit.

SCHOLIUM.

ATque hinc, in re Architectonicâ, facienda erit æstimatio, quam trabis cujusque partem oporteat fortiorem facere, prout imponendi oneris & disponendi ratio postulaverit.

PROP. VIII.

Si intelligatur Vectis obliquo situ positus; Fulcrum elatius, eam totius Oneris impositi partem sustinebit, quæ sit ad totum, in ea ratione quæ componitur ex ratione Distantiæ Oppositi Fulcri ab applicationis puncto, ad totam Fulcrorum ab invicem Distantiam; &, ratione quam habet ad Radium Sinus rectus istius anguli quem cum recta ad horizontem perpendiculari facit Vectis; seu Co-sinus inclinationis Vectis ad horizontem: Reliquúmque oneris sustinebit inferius fulcrum.

Nempe (in fig. 236.) Oneris O eam partem sustinet Fulcrum A, quæ sit ad totum ut B ω ad B H; B verò, quæ est ω H ad B H. Adeoque Onus Fulcri A, ad Onus Fulcri B, ut B ω ad ω H.

Intelligatur

Fig. 236. INtelligatur enim Vectis A B = R, situ ad Horizontem Obliquo positus, fulcris A, B, sustentus; cui applicetur, in O, pondus quodvis; Vectem dirimens in duo segmenta, A O = a, & O B = b. Manifestum est (per demonstrata ad prop. 5.) Onus fulcri elatioris A, tantum esse, quanta Vis esset eidem ibidem sustinendo necessaria, si (manente fulcro B) abesset A fulcrum. Hoc est; propter rectæ A B divisionem in O; in ea ratione ad totum pondus, quæ est distantiarum B O ad B A, seu b ad R: per prop. 2. hujus, vel prop. 7. Cap. 2. & prop. 11. Cap. 3. Sed & porro; propter Obliquum situm ad Horizontem, adeoque Obliquum Descensum si (manente B) moveretur A, (puta in arcu A H, cujus Tangens A T;) in ea ratione quam ad Radium habet Sinus rectus anguli quem facit Vectis cum perpendiculari, vel Co-sinus anguli Inclinationis ad Horizontem: per prop. 13. Cap. 3. vel prop. 21. Cap. 2. Hoc est A b ad B A; seu O β vel B ω ad B O; puta ut s ad R. Adeoque; propter simul utramque causam; in ea ratione quæ ex utrisque componitur; s ad R, & b ad R; hoc est, ut $s\,b$ ad R^2: Seu ex β O ad B O, & B O ad B A; hoc est, ut β O ad B A, seu B ω ad B H.

Adeoque Oneris reliquum quod sustinet B fulcrum, est ad totum, ut ω H ad B H.

Et propterea Onus fulcri A, ad Onus fulcri B, ut B ω ad ω H. Quæ erant demonstanda.

Hic nota; rectam B α (Co-sinum anguli inclinationis A B H) in eadem ratione secari in ω, qua secatur B A in O.

SCHOLIUM.

Fig. 236. CAusa diversæ rationis in Obliquo Vectis situ, ab ea quæ est in situ Horizontali; hinc oritur, quòd, manente B fulcro, fulcrum A impedit tantummodo Rotationem puncti O circa B centrum, quæ in hoc situ æquipollet Obliquo Descensui secundum tangentem O T, (per prop. 15. Cap. 2.) non descensui recto in recta O ω.

Fig. 235. Fulcrum verò B, (ut in fig. 235.) impedit, non tantum Rotationem ipsius O circa centrum A; sed etiam ejusdem Descensum Obliquum secundum rectam A O B, cui fulcrum A non obstat. Nam, nisi obstaret B fulcrum, posset, manente fulcro A, non modo punctum O circa A rotari, sed etiam totus A B Vectis deorsum labi; adeóque punctum O ferri in motu composito ex motu Rotationis & motu Vectis Labentis, cui utrique obstat Fulcrum B.

Si verò intelligatur Vectis A B, non tantum fulcro A inniti, (quò impediatur

impediatur rotatio,) ſed & (ut fig. 237.) cum illo ſic ligari, aut unco aliáſve ſic conjungi, ut, etiamſi B abeſſet, non poſſet alias, quàm circa A rotando, moveri punctum O: alia prodibit ratio. Quippe jam fulcra A, B, obliquum lapſum ſecundum A B rectam æqualiter impediunt: rotationem verò impediunt in oppoſitarum diſtantiarum ratione. Fig.237.

Sed & porrò; ſi intelligatur, non modò A fulcrum, ſed & fulcrum B, ſic eſſe comparata, ut non impediant obliquum illum ſecundum rectam A B Deſcenſum (puta ſi intelligatur A B Vectis extremo tantum fulcri B angulo incumbere:) labetur Vectis ſimul cum annexo pondere, deſcenſu illo obliquo. Rotationem verò impedient in ea ratione Fulcra quæ eſt Oppoſitarum Diſtantiarum; (quæ continuè variabitur prout O propiùs ad B feretur.) Totúmque quod inter ſe partiuntur Onus, non eſt totius Ponderis impoſiti, ſed ea pars totius quæ determinanda erit ex diminuto deſcenſu in obliqua recta O B (fig.235.) præ eo qui eſſet in O ω perpendiculari (fig.236.) juxta leges prop.17. & 21. Cap.2. traditas. Puta, quæ ſit ad totum,ut (in fig.42.) P R ad P F, propter obliquum deſcenſum in F B recta: hoc eſt (in fig.236.) ut B O — O ω ad B O. Fig.238.

Si verò, (fulcro B id permittente,) intelligatur Vectis A B, fulcro A ſic ſuſpendi (aliáſve cum illo ſic connecti) ut hoc ſolo impediatur Vectis A B, ne ſecundum A O B rectam deſcendat; (fulcro B nonniſi rotationem circa A impediente:) erit onus fulcri B, ad onus totius ponderis impoſiti in ea ratione, quæ ex s ad R, & a ad R, componitur; hoc eſt, ut sa ad R^2, (quod ſimiliter de B probabitur, atque ſupra probatum erat, in caſu propoſitionis, rationem oneris A, eſſe ad totum, ut sb ad R^2;) reliquúmque oneris ſuſtinebit A. Fig.239.

Denique; ſi intelligatur Fulcri B facies ſuperior horizontalis, ſic ab omni aſperitate lævigata, ut quamvis non permittat Vecti deſcenſum per A O B rectam, permittat ſaltem ut Vectis extremum B (verbi gratia) in horizontali recta H B labetur, (neque huic obſtet aliqua connexio cum A fulcro,) unde aliqualis ſaltem deſcenſus puncto O permittatur: minùs propterea premetur fulcrum B, propter deſcenſum non penitus impeditum. Idem verò eſt quod prius fulcri A Onus; ſed quod continuò variabitur, partim Auctum (propter ſitum Vectis minùs obliquum) partim Diminutum (propter majorem rationem diſtantiæ A O ad O B) prout Vectis extremum B remotiùs in H B rectâ retro lapſum fuerit; dummodò (quod hic intelligendum erit) Vectis pars O A intelligatur ultra A quantum opus fuerit prolongata; ſecus enim, retro labente extremo B, alterum A fulcrum ſuum deſeret, nec eo ſuſtinebitur. Fig.240.

Et

Et quidem similiter, mutatis mutandis, in aliis casibus judicandum erit, quos omnes sigillatim prosequi nimis molestum esset.

PROP. IX.

Si pluribus Fulcris (Vectium invicem commissarum ope) sustineatur impositum Pondus; Onus cujusque, prout singulorum situs postulaverit, calculo æstimabitur, cui ferendo par esse debet ne fatiscat.

Fig.241. Exempli gratia: Si tribus Vectibus seu Tignis, A O, B O, C O, in communi O puncto firmiter conjunctis, impositum pondus O, tribus fulcris in A, B, C, sustineatur. Manifestum est, si A B C sit triangulum æquilaterum, sitque O in Trianguli medio, æqualiter à singulis angulis remoto; Onus hoc inter tria Fulcra (ob similem omnium situm) æqualiter distribui; adeoque quodlibet Fulcrum trientem totius Oneris sustinere.

Sin secus fuerit; singulorum tamen Onus sic habebitur. Intelligatur (verbi gratia) Vectis A O continuari, donec in D occurrat rectæ B C. Cúmque fulcri A id unicum munus sit, ut impediatur Oneris O rotatio circa B C rectam (ut ex prop. 1. Cap. 4. liquet:) perinde est (quantum ad fulcrum A) sive id fiat ope continuati Vectis A O D, in ejusdem B C rectæ puncto D suffulti, sive fiat ope duorum B O, C O: Utrovis enim modo eadem præcisè Rotatio impeditur. Si vero id fiat (sublatis fulcris B, C,) ope continuati Vectis A O D (supposito Fulcro ipsi D puncto;) erit Oneris A, ea pars totius quæ sit ad totum ut O D ad A D; per prop. 5. hujus. Tantundem itaque erit, si, sublato D, fulcris B, C, idem obtineatur. Atque similiter ostendetur, (continuatis B O ad E in recta A C, & C O ad F in recta A B,) onus fulcri B, eam esse totius O partem, quæ sit ad totum in ratione O E ad B E; onúsque fulcri B, ad totum, ut O F ad C F: Cujuscunque formæ fuerit Triangulum A B C.

Et simili modo procedendum erit, prout res postulaverit, quotcunque Fulcris quomodocunque sitis, sustineri intelligatur Pondus O. Quippe id semper prospiciendum erit, Quam Rotationem impediat quodlibet Fulcrum; &, quidem, Num Unum aliquod an Plura id præstent. Quippe si Plura sint; utut unum eorum non satis valeat Oneri sustinendo, tamen si simul omnia (suis cujusque Viribus ritè computatis,) ferendo Oneri saltem æquipolleant; Onus sustinebitur.

Putà;

Putà; si non tantùm in A, B, C, (ut modò) sed & in G, H, I, intelligantur Fulcra; (cæteraque constructa ut in fig. 242.) Quorum respectivæ Vires sunto a, b, c, g, h, i. Fig. 242.

Stantibus Fulcris A, B, vel A, G, B; non aliter Descendendo movebitur Pondus O, quàm circa A B rectam rotando, (ut modò ostensum est ex prop. 1. Cap. 4.) Huic autem obstant Tria Fulcra C, H, I. Quorum quidem C, Pondus in O sustinebit, quod ad Vires suas sit ut C F ad F O; puta $\frac{CF}{FO}c$: per 2 vel 3 hujus: (tantundem utique est, acsi continuata Vectis C O F, fulcrum haberet F, in ea recta A B circa quam facienda esset Rotatio.) Similiter Fulcrum H, sustinebit Pondus in O, quod sit ad Vires suas, ut H A ad H O; putà $\frac{HA}{AO}h$. Et Fulcrum I, similiter Pondus in O sustinebit quod sit ad Vires suas ut I L ad L O, putà $\frac{IL}{LO}i$. Si itaque totum Pondus O (simpliciter consideratum) majus non sit quam $\frac{CF}{FO}c + \frac{HA}{AO}h + \frac{IL}{LO}i$; valebunt hæc tria Fulcra C, H, I, onus in O sustinere ne circa A B rotetur. Sin majus fuerit Pondus O, quàm ut dictum est; fatiscent Fulcra C, H, I, ponderi sustinendo imparia.

Similiter; Stantibus Fulcris A, C, seu A, I, C; non descendet O, nisi circa A C rectam rotando. Huic autem obstant Tria Fulcra B, G, H. Quorum, Fulcrum B, sustinebit $\frac{BE}{EO}b$: Fulcrum G, $\frac{GC}{CO}g$: Fulcrum H, $\frac{HA}{AO}h$: (ut ex modò dictis, & Schematis inspectu patet.) Si itaque majus non sit Pondus O, quàm $\frac{BE}{EO}b + \frac{GC}{CO}g + \frac{HA}{AO}h$; satis valebunt B, G, H, Fulcra, Oneri sustinendo ne circa A C rotetur: Si secùs; fatiscent.

Item; Stantibus Fulcris B, C; non descendendo movebitur O, nisi circa B C rectam rotando. Huic verò obstant Quatuor Fulcra, A, G, H, I. Quorum A, sustinebit (per ante dicta) $\frac{AD}{DO}a$: Fulcrum G, $\frac{GC}{CO}g$: Fulcrum H, $\frac{HD}{DO}h$: Fulcrum I, $\frac{IK}{KO}i$. Si itaque ma-

jus non sit Pondus O, quàm $\frac{AD}{DO}a + \frac{GC}{CO}g + \frac{HD}{DO}h + \frac{IK}{KO}i$; satis valebunt Fulcra A, G, H, I, ne circa B C rotetur O: si secùs; sub onere fatiscent.

Atque ad eandem formam, mutatis mutandis, instituetur Calculus, quotcunque fuerint Fulcra, & quomodocunque sita.

SCHOLIUM.

NOtandum hic, (quo rectiùs intelligantur omnia,) Onus seu Pondus quod intelligitur ad punctum O applicari; & Vectibus A O, B O, &c. invicem compactis sustineri; posse vel Tabulatum esse (gravatum vel non gravatum incumbente aut dependente pondere quovis alio) vel aliud quodvis Grave cohærens; cujus saltem Centrum gravitatis vel sit in ipso O puncto, vel huic directè subsit aut immineat: per prop. 18. Cap. 2. & prop. 16. Cap. 4.

Item Vectes, A O, B O, &c. non semper alios esse ab ipso onere; sed vel ipsius Tabulati seu Gravis rectas, vel imaginarias saltem rectas à suis respectivè Fulcris ad O pertingentes, & prout opus fuerit continuatas, secundùm quas Fulcrorum A, B, &c. distantias tum ab O onere, tum ab oppositis respectivè Fulcris imaginariis in Axe Rotationis, æstimemus. Neque aliud innuunt, quàm quod Gravis partes ita sint inter se sat firmiter cohærentes ut puncti O, ab ipsis A, B, C, &c. distantiæ, eædem maneant: sive id fiat totidem rectis inde in O coeuntibus ibique connexis, sive per curvos circuitus, aliásve, id fiat.

Fulcra verò, quæ punctis A, B, C, &c. supposita intelligimus; considerantur solummodo ut Fulcra, non item ut Retinacula: impedientia scilicet ne quod illis imponitur ibidem Descendat, non autem ne inde Assurgat. Adeoque, utut Fulcrum H (verbi gratia) intelligatur impeditivum Rotationis circa B C, (quoniam non deprimetur O, nisi depresso H;) non tamen intelligitur Fulcrum G, impeditivum rotationis circa A B, quoniam ut hæc fiat rotatio (descendente O) non fiet Fulcri G depressio, sed sursum assurget quod illi incumbit; cui Fulcrum non obstat.

Si verò, quod huic impositum est, non tantùm subjecto fulcro incumbat, sed cum eo ita connexum sit ut nonnisi ruptâ copulâ possit assurgere; (alióve quovis Retinaculo, aut Impedimento, vel onere superimposito idem eveniat:) Hoc quicquid est Retinaculi, Impeditivum erit Rotationis circa A B, fulcrísque C, H, I, suppetias feret:

(quippe,

(quippe, stante rectâ A B, non poterit O descendere nisi ascendente Gravis puncto G; propter rectam O G quam supponimus inflexilem, seu totum Grave ita compactum ut non luxetur; per Schol. prop. 1. Cap. 4.) Cujus quidem Retinaculi vires si ponantur r; sustinebunt illæ, pondus in O, quod sit ad r, ut G F ad F O, (per prop. 1. vel 3. hujus,) puta $\frac{GF}{FO}r$. Adeoque jam, non modò, si O non sit majus quàm $\frac{CF}{FO}c + \frac{HA}{AO}h + \frac{IL}{LO}i$, (ut priùs;) sed si majus non sit quàm $\frac{CF}{FO}c + \frac{HA}{AO}h + \frac{IL}{LO}i + \frac{GF}{FO}r$: Satis valebunt Fulcra C, H, I, unà cum Retinaculo in G, impediendæ rotationi Oneris O circa A B. Similéque erit in reliquis judicium.

Rotationes autem nonnisi Tres in Calculo consideravimus; nempe circa A B, A C, B C: non quòd plures esse non possint, (ut circa A G, G B, &c.) sed quoniam instituto sufficiant hæ tres; in quibus considerandis Fulcrorum omnium vires sub calculo veniunt. Quippe si saltem tria puncta, (ut A, B, C,) intra quæ sit ipsum Grave ejusve Centrum gravitatis O, satis sustineantur, (sive suis singula fulcris, ut in fig. 241. sive cum succenturiatorum subsidiis, ut in fig. 242.) totum sustinebitur Grave: per prop. 1. Cap. 4.

PROP. X.

Contignationem planam ex Tignis multò Brevioribus quàm sit Areæ Latitudo invicem conjunctis construere: Et computo æstimare, Quantum cuique Juncturæ Onus incumbat.

Contignationis seu Tabulati Constructio.

POtest quidem hoc variis modis fieri. Eam verò formam præ cæteris seligendum putavi, quam jam olim Anno 1644. *Cantabrigiæ* primum delineabam, in Collegio *Reginensi*, in quo tum temporis *Socius* eram: & quam non ita multò post Tigillis ligneis construendam curabam, (quò manifestiùs indicarem Theoriam posse in Praxin reduci:) eámque in Vesperiis Comitiorum *Oxoniæ* Anno 1652. (postquam ad munus illud quod etiamnum sustineo vocatus eram) Fig. 243.

eram) solenni Prælectione exponebam; ejusque Calculum Vesperiis Comitiorum Anni sequentis, 1653. similiter explicabam: Quamque ex eo tempore tum Nostratium tum Exterorum non pauci satis approbarunt, aliqui etiam imitati sunt: Quam & Serenissimus Rex noster, CAROLUS *Secundus*, post auspicatum suum in *Angliam* reditum, oblatam sibi Octobr. 18. 1660. inter Κειμήλια sua dignatus est reponere.

Specimen exhibet Areæ quadratæ, cujus Latitudo est fere quadrupla longitudinis Tignorum longissimorum; quæ ita sunt invicem intertexta, ut se mutuo sustineant. Et quidem, quò supra planitiem non assurgant, quâ parte tignum quodvis aliud sibi supernè impositum sustinet (quod sui partibus intermediis fit) supernè (ad mediam quasi partem) excavatur: quâ parte verò alii impositum sustinetur, (quod in sui extremis fit) tantundem quasi excavatur inferne: quò fit, ut, sibi mutuò impacta, aream planam faciant. Si tamen metuendum videatur, ut, propter ligni naturam flexilem partes mediæ, onere pressæ, nonnihil subsidant: huic incommodo cavebitur, si excavationes non præcisè ad mediam tigni crassitiem pertingant, sed paulo citra medium desinant. Quippe, hoc pacto, assurget paululum in singulis juncturis contignatio, quò compensetur illa exigua depressio quæ ex curvaturâ oriatur.

Fig. 244, 245. Faciem lateralem Tigni Longioris, exhibet fig. 244. Brevioris, fig. 245. Facies superna in ipsa fig. 243. satis apparet.

Fig. 243. Quo autem ordine disponantur; ex Schematis intuitu (fig. 243.) faciliùs intelligatur, quàm possit multis verbis explicari.

Videre enim est, si ab Extremis ordiri libeat, totam Aream *Muro* circumseptam; vel etiam (siquis id malit) Muri loco, totidem quot opus erit *Columnis*, quibus imponantur Trabium sive Tignorum exteriora Capita. Quorum capita altera, introrsum spectantia, Tignis aliis imposita sustinentur; atque horum porro, ab aliis; atque hæc ab aliis; & sic deinceps donec ad oppositos muros perveniatur.

Verbi gratia, Tigni S&, extremum alterum muro sustinetur, alterum tigno &Z: Hujus alterum extremum muro itidem sustinetur, reliquum tigno QP. Sed & tigni UY, extremum alterum muro sustinetur; reliquum eodem QP tigno. Hujus verò QP sed & tigni ON, extrema altera tigno SR, altera tigno KI sustinentur. Atque horum item extrema (uti videre est) tignis alteris superimposita sustinentur; horumque alteris; & sic porro, prout ex inspecto Schemate luculentiùs patet quam ut multis verbis explicatu opus sit.

Si-

Similiter; si à medio libeat ordiri, quodlibet Tignorum A B, ut & tignorum C D, sustinentur alteris extremis in altero A B, alteris in tigno E F: atque hujus item, ut & tigni L M, extrema altera tigno G H, altera tigno N O: atque horum, aliis; & sic porro usquedum ad muros perveniatur; ut ex Schemate liquet.

Notandum interim, eâdem methodo, aream istiusmodi construi posse vel ex paucioribus, vel etiam ex pluribus tignis; sed & in alia formâ, (puta oblongâ non minùs quam quadratâ;) prout res postulaverit.

Verbi gratia; poterit ibidem continuus Murus collocari, ubi jam habentur Tigna S R, V U, & S; aut ubi Tigna &Z, M L, P Q; quo area reddatur minus lata, ut paucioribus tignis à muro in murum perveniatur: idque eousque ut non nisi *Quaternis* tignis opus sit; ut in fig. 246. Vel etiam (quæ est forma omnium simplicissima) Fig. 246, *Ternis* tignis; ut in fig. 247. 247.

Verùm etiam, si id opus erit, poterunt tigna X R, W V, (cæ- Fig. 243. teraque quæ reliquis breviora sunt, atque hic in muro terminantur,) ad parem cum reliquis longitudinem protrahi, tignaque secunda (ipsis S R, V U, parallela, & extra hæc posita) sustinere; eorumque sic protractorum extrema, vel muris (extra promotis) ibidem transeuntibus sustineri, vel etiam (ampliatâ adhuc areâ) tignis aliis, (ipsis M L, P Q, parallelis;) atque sic porro prout opus videbitur.

Hoc autem ne in infinitum protrahi possit, impediunt, non tam rationes Mathematicæ, (quæ in contrarium non eunt,) quàm Materiæ Physicæ conditio. Quippe in protractâ areâ, auctâ Tignorum multitudine, augetur Onus; donec eò tandem perveniatur, ut majus evadat, quam ut, quæ sustinendo paria sint, Tigna conquiri possint, quæque sub tanto onere non fatiscant & rumpantur.

Quousque autem tutò liceat hac ratione procedere; ex calculo facienda est æstimatio. Quippe si constet tum quanto oneri ferendo sufficiant Tigna quæ adhibenda veniant; (quod periti Architecti, experimento docti, docebunt:) tum quantum oneris, prout sitûs ratio postulat, cuique Tigno ferendum imponatur; (quod calculus indicabit:) hinc optimè fiet judicium, quid tutò fieri possit. Qui quidem calculus, in tignis numero paucioribus, faciliùs instituetur; operosiùs autem in pluribus.

Quò autem quâ methodo fieri possit ostendam; expositæ contignationis juncturas singulas calculo subjeci; perplexo quidem, propter tignorum multitudinem; sed qui in paucioribus tignis multò citiùs ad exitum pervenisset.

Calculus

Calculus, expositæ Contignationi accommodatus.

Fig. 243. Quò Calculus (Synopsi sequente tradendus) rectiùs intelligatur; notandum est (quod oculi judicium satis indicabit,) Tignorum alia aliis longiora; atque ita quidem ut longiora sint breviorum quasi sesquialtera. Et propterea, cum Tigni cujusque ex longioribus pondus designemus symbolo T; cujusque ex brevioribus symbolum erit $\frac{2}{3}T$.

Onus autem cuique Tignorum juncturæ incumbens, eâ literâ indicatur quam sibi in Schemate ascriptam habet ea junctura.

Notandum porro erit; cùm manifestum sit, (Schema vel mediocriter consideranti,) quaterna semper puncta esse, quæ (propter similem situm respectu totius contignationis) æqualiter onerata censenda sint: ea semper (ne, præter necessitatem, symbolorum numerus cresceret, & calculus proinde redderetur multò perplexior,) eisdem symbolis designamus. Unde habeantur quatuor A, (similiter sita, atque æqualiter onerata,) atque totidem B, & sic de reliquis.

Cum itaque habetur, verbi gratia, (ad Num. 2. seu Æquationem secundam,) $B = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}C + \frac{1}{3}A$; tantundem est atque si diceretur, subjecti Tigni A B, punctum B, (præter eam firmitatem quæ ibidem requiritur ne suo pondere rumpatur tignum, quam hæc æquatio non involvit,) tantum onus impositum sustinere, quantum est tum $\frac{1}{2}T$ (semissis ponderis incumbentis tigni longioris A B,) tum $\frac{2}{3}C$ (bessis oneris eidem A B tigno impositi in C puncto; utpote quod in C, A, punctis trifariam sectum intelligitur;) tum $\frac{1}{3}A$, (triens oneris eidem A B tigno, in A, impositi.) Item ubi habetur (ad num. 21.) $W = \frac{1}{3}T + \frac{1}{2}V$: innuit hoc, Tigni, L M, puncto W, onus impositum tantum esse, quantum est tum $\frac{1}{3}T$ (semissis incumbentis tigni brevioris, qui idem est atque tigni longioris triens,) tum $\frac{1}{2}V$ (semissis oneris quod incumbentis tigni puncto medio V superimponitur.) Quæ omnia singulatim demonstrantur ex prop. 5. vel 7. hujus Capitis. Quod similiter obtinet in Æquationibus primoribus Viginti-quinque.

Æquatio 26. & quæ sequuntur; ex præcedentibus derivantur, (quas per numeros æquationibus illis adscriptos citavimus, quò dilucidior esset totius processus ratio.) Quæ inserviunt partim ad abbreviandas fractiones, (quoties tum numeratores tum denominatores possunt communi aliquo divisore dividi,) partim verò (& quidem potissimùm) ad reducendas & exponendas æquationes præcedentes (substituto

ſtituto ſymboli alicujus valore, aliis ſymbolis explicato, (quo, diſpunctis ſubinde aliquot ſymbolis, ſymbolorum numerus reſiduorum ſenſim minuatur, donec tandem unum aliquod ſymbolorum à principio ignotorum, per notam quantitatem T (pondus unius tigni longioris, ſimpliciter conſiderati,) exponatur; ejuſque demum ope (repetendo præcedentium aliquot æquationum veſtigia) reliquorum etiam ſymbolorum (onerum primitus ignotorum) valores innoteſcant.

Verbi gratia; cum habeatur (num. 1.) $A = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}A + \frac{1}{3}C$; manifeſtum eſt (propter A in æquationis utraque parte repertum) ſublato utrinque $\frac{2}{3}A$, ſupereſſe $\frac{1}{3}A = \frac{1}{2}T + \frac{1}{3}C$; hoc eſt (utrinque per 3 multiplicando) $A = \frac{3}{2}T + C$; quam itaque Æquationem (num. 26.) habemus, tanquam derivatam ex Æquatione prima, (num. 1.) quam itaque citamus.

Similiter; cum ſit (num. 2.) $B = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}C + \frac{1}{3}A$; ſitque (per Fig. 243.
num. 26.) $A = \frac{3}{2}T + C$; adeoque $\frac{1}{3}A = \frac{1}{2}T + \frac{1}{3}C$: erit B $(= \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}C + \frac{1}{3}A = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}C + \frac{1}{2}T + \frac{1}{3}C) = T + C$. Quam itaque æquationem ($B = T + C$) habemus num. 27. tanquam ex num. 2, 26, derivatam. Et ſimiliter in aliis.

Nonnunquam verò (ut modò dictum eſt) ſola fit Fractionis abbreviatio (ſeu ad minores terminos per communem diviſorem reductio.) Ut, cum (num. 64.) habeatur $H = \frac{6912T + 672G + 552I + 2790}{2907 = 3 \times 969}$; poſſintque omnia membra per 3 dividi: habetur, num. 65. (tanquam ex num. 64. derivata) æquatio, $H = \frac{2304T + 224G + 184I + 93O}{969}$. Et ſic alibi.

Quoniam autem has omnes Æquationum reductiones atque abbreviationes ſingulatim exponere (prout has paucas expoſuimus) Lectori tædium crearet, (cum illud poſſit ſuo marte quilibet præſtare:) contenti ſumus omnes unâ Synopſi breviter exhibere; indicatis iis æquationibus antecedentibus ex quibus quæque immediate dependeat.

Calculi Synopſis.

1	$A = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}A + \frac{1}{3}C.$	6	$F = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}D + \frac{1}{3}B.$
2	$B = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}C + \frac{1}{3}A.$	7	$G = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}E + \frac{1}{3}L.$
3	$C = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}G + \frac{1}{3}I.$	8	$H = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}L + \frac{1}{3}E.$
4	$D = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}I + \frac{1}{3}G.$	9	$I = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}N + \frac{1}{3}P.$
5	$E = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}B + \frac{1}{3}D.$	10	$K = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}P + \frac{1}{3}N.$

11 | L=

11 $L=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}W+\frac{1}{3}X.$

12 $M=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}X+\frac{1}{3}W.$

13 $N=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}F+\frac{1}{3}M.$

14 $O=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}M+\frac{1}{3}F.$

15 $P=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}Y+\frac{1}{3}Z.$

16 $Q=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}Z+\frac{1}{3}Y.$

17 $R=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}O+\frac{1}{3}Q.$

18 $S=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}Q+\frac{1}{3}O.$

19 $V=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}H+\frac{1}{3}K.$

20 $U=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}K+\frac{1}{3}H.$

21 $W=\frac{1}{3}T+\frac{1}{2}V.$

22 $X=\frac{1}{3}T+\frac{1}{2}R.$

23 $Y=\frac{1}{3}T+\frac{1}{2}U.$

24 $Z=\frac{1}{3}T+\frac{1}{2}\&.$

25 $\&=\frac{1}{3}T+\frac{1}{2}S.$

Per Prop. 5. vel 7. hujus Cap.

26 $A=\frac{1}{2}T+C.$ per 1.

27 $B=T+C.$ per 2, 26.

28 $B=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}G+\frac{1}{3}I.$ per 27, 3.

29 $E=\frac{15T+5G+4I}{9}.$ per 5, 28, 4.

30 $F=\frac{12T+4G+5I}{9}.$ per 6, 4, 28.

31 $W=\frac{7T+4H+2K}{12}.$ per 21, 19.

32 $X=\frac{7T+4O+2Q}{12}.$ per 22, 17.

33 $Y=\frac{7T+2H+4K}{12}.$ per 23, 20.

34 $\&=\frac{7T+2O+4Q}{12}.$ per 25, 18.

35 $Z=\frac{7\frac{1}{2}T+O+2Q}{12}.$ per 24, 34.

36 $L=\frac{39T+8H+4K+4O+2Q}{36}.$ per 11, 31, 32.

37 $M=\frac{39T+4H+2K+8O+4Q}{36}.$ per 12, 31, 32.

38 $P=\frac{39\frac{1}{2}T+4H+8K+O+2Q}{36}.$ per 15, 33, 35.

39 Q=

Fig. 243.

39 $Q = \frac{20T + H + 2K + O + 2Q}{18}$. per 16, 33, 35.

40 $Q = \frac{20T + H + 2K + O}{16}$. per 39.

41 $N = \frac{94\frac{1}{2}T + 16G + 2H + 20I + K + 4O + 2Q}{54}$. per 13, 30, 37.

42 $O = \frac{45T + 4G + 2H + 5I + K + 4O + 2Q}{27}$. per 14, 30, 37.

43 $O = \frac{45T + 4G + 2H + 5I + K + 2Q}{23}$. per 42.

44 $G = \frac{213T + 40G + 8H + 32I + 4K + 4O + 2Q}{108}$. per 7, 29, 36.

45 $G = \frac{213T + 8H + 32I + 4K + 4O + 2Q}{68}$. per 44.

46 $H = \frac{48T + G + 4H + 4I + 2K + 2O + Q}{27}$. per 8, 29, 36.

47 $H = \frac{48T + 5G + 4I + 2K + 2O + Q}{23}$. per 46.

48 $I = \frac{658\frac{1}{2}T + 64G + 20H + 80I + 28K + 19O + 14Q}{324}$. per 9, 38, 41.

49 $I = \frac{658\frac{1}{2}T + 64G + 20H + 28K + 19O + 14Q}{244}$. per 48.

50 $K = \frac{294T + 16G + 14H + 20I + 25K + 7O + 8Q}{162}$. per 10, 38, 41.

51 $K = \frac{294T + 16G + 14H + 20I + 7O + 8Q}{137}$. per 50.

52 $G = \frac{1724T + 65H + 256I + 34K + 33O}{8 \times 68 = 544}$. per 45, 40.

53 $H = \frac{788T + 80G + H + 64I + 34K + 33O}{16 \times 23 = 368}$. per 47, 40.

54 $H = \frac{788T + 80G + 64I + 34K + 33O}{367}$. per 53.

55 $I = \frac{5408T + 512G + 167H + 238K + 159O}{244 \times 8 = 1952}$. per 49, 40.

56 $K = \frac{608T + 32G + 29H + 40I + 2K + 15O}{137 \times 2 = 274}$. per 51, 40.

57 $K = \frac{608T -|- 32G -|- 29H -|- 40I -|- 15O}{272 = 8 \times 34}$. per 56.

Fig. 243. 58 $O = \frac{380T + 32G -|- 17H -|- 40I + 10K -|- O}{23 \times 8 = 184}$. per 43, 40.

59 $O = \frac{380T -|- 32G + 17H -|- 40I -|- 10K}{183}$. per 58.

60 $G = \frac{14400T + 32G -|- 549H -|- 2088I -|- 279O}{544 \times 8 = 4352}$. per 52, 57.

61 $G = \frac{14400T -|- 549H -|- 2088I + 279O}{4320 = 9 \times 480}$. per 60.

62 $G = \frac{1600T -|- 61H + 232I + 31O}{480}$. per 61.

63 $H = \frac{6912T + 672G -|- 29H -|- 552I + 279O}{367 \times 8 = 2936}$. per 54, 57.

64 $H = \frac{6912T + 672G + 552I -|- 279O}{2907 = 3 \times 969}$. per 63.

65 $H = \frac{2304T -|- 224G -|- 184I -|- 93O}{969}$. per 64.

66 $I = \frac{47520T + 4320G + 1539H -|- 280I -|- 1377O}{1952 \times 8 = 15616}$. per 55, 57.

67 $I = \frac{47520T -|- 4320G + 1539H + 1377O}{15336 = 27 \times 568}$. per 66.

68 $I = \frac{1760T + 160G + 57H + 51O}{568}$. per 67.

69 $O = \frac{54720T -|- 4512G + 2457H -|- 5640I -|- 75O}{183 \times 136 = 24888}$. per 59, 57.

70 $O = \frac{54720T + 4512G -|- 2457H + 5640I}{24813 = 3 \times 8271}$. per 69.

71 $O = \frac{18240T + 1504G + 819H -|- 1880I}{8271 = 3 \times 2757}$. per 70.

72 $G = \frac{13799040T + 46624G + 529920H -|- 1977152I}{480 \times 8271 = 3970080}$. per 62, 71.

73 $G = \frac{13799040T + 529920H -|- 1977152I}{3923456 = 64 \times 61304}$. per 72.

74 $G = \frac{215610T -|- 8280H + 30893I}{61304}$. per 73.

75. H=

75 $H=\frac{6917568T+664192G+25389H+565568I}{969\times 2757=2671533}$. per 65, 71.

76 $H=\frac{6917568T+664192G+565568I}{2646144=64\times 41346}$. per 75. Fig. 243.

77 $H=\frac{108087T+10378G+8837I}{41346}$. per 76.

78 $I=\frac{15487200T+1400064G+513216H+95880I}{568\times 8271=4697928}$. per 68, 71.

79 $I=\frac{15487200T+1400064G+513216H}{4602048=96\times 47938}$. per 78.

80 $I=\frac{161325T+14584G+5346H}{47938}$. per 79.

81 $G=\frac{9809571420T+85929840G+1350472338I}{61304\times 41346=2534675184}$. per 74, 77.

82 $G=\frac{9809571420T+1350472338I}{2448745344=162\times 919\times 16448}$. per 81.

83 $G=\frac{65890T+9071I}{16448}$. per 82.

84 $I=\frac{7247976552T+658470852G+47242602I}{47938\times 41346=1982044548}$. per 80, 77.

85 $I=\frac{7247976552T+658470852G}{1934801946=18\times 919\times 116963}$. per 84.

86 $I=\frac{438156T+39806G}{116963}$. per 85.

87 $I=\frac{9829607228T+3610802261}{116963\times 16448=1923807424}$. per 86, 83.

88 $I=\frac{9829607228T}{1562727198=4594\times 340167}$. per 87. Hoc est, ordine Alphabetico.

89 $I=\frac{2139662}{340167}T$. per 88.

90 $G=\frac{2542709}{340167}T$. per 83, 89.

91 $C=\frac{2578443\frac{1}{2}}{340167}T$. per 3, 89, 90.

92 $D=\frac{2444094\frac{1}{2}}{340167}T$. per 4, 89, 90.

$A=9\frac{27191}{340167}T$.

$B=8\frac{197274\frac{1}{2}}{340167}T$.

$C=7\frac{197274\frac{1}{2}}{340167}T$.

$D=7\frac{62925\frac{1}{2}}{340167}T$.

	93	$B=\frac{2918610\frac{1}{2}}{340167}T.$	per 27, 91.	$E=8\frac{209186}{340167}T.$
Fig. 243.	94	$A=\frac{3088694}{340167}T.$	per 26, 91.	$F=8\frac{51014}{340167}T.$
	95	$E=\frac{2930522}{340167}T.$	per 5, 92, 93.	$G=7\frac{161540}{340167}T.$
	96	$F=\frac{2772350}{340167}T.$	per 6, 92, 93.	$H=5\frac{283977\frac{1}{2}}{340167}T.$
	97	$H=\frac{1984812\frac{1}{2}}{340167}T.$	per 77, 89, 90.	$I=6\frac{98660}{340167}T.$
	98	$O=\frac{1895418\frac{1}{2}}{340167}T.$	per 71, 89, 90, 97.	$K=4\frac{329646\frac{1}{2}}{340167}T.$
	99	$K=\frac{1690314\frac{1}{2}}{340167}T.$	per 57, 89, 90, 97, 98.	$L=3\frac{236331\frac{1}{2}}{340167}T.$
	100	$V=\frac{2056730}{340167}T.$	per 19, 97, 99.	$M=3\frac{181326\frac{1}{2}}{340167}T.$
	101	$U=\frac{1958564}{340167}T.$	per 20, 97, 99.	$N=7\frac{37757}{340167}T.$
	102	$W=\frac{1141704}{340167}T.$	per 21, 100.	$O=5\frac{194583\frac{1}{2}}{340167}T.$
	103	$Y=\frac{1092671}{340167}T.$	per 23, 101.	$P=3\frac{50382\frac{1}{2}}{340167}T.$
	104	$Q=\frac{879012\frac{1}{2}}{340167}T.$	per 40, 97, 98, 99.	$Q=2\frac{198678\frac{1}{2}}{340167}T.$
	105	$R=\frac{1726700}{340167}T.$	per 17, 98, 104.	$R=5\frac{25865}{340167}T.$
	106	$S=\frac{1387898}{340167}T.$	per 18, 98, 104.	$S=4\frac{27230}{340167}T.$
	107	$X=\frac{976739}{340167}T.$	per 22, 105.	$V=6\frac{15728}{340167}T.$
	108	$\&=\frac{807338}{340167}T.$	per 25, 106.	$U=5\frac{257729}{340167}T.$
	109	$Z=\frac{517058}{340167}T.$	per 24, 108.	$W=3\frac{121253}{340167}T.$
	110	$I=\frac{1256832\frac{1}{2}}{340167}T.$	per 11, 102, 107.	$X=2\frac{296405}{340167}T.$

111	$M = \frac{1201827\frac{1}{2}}{340167}T.$ per 12, 10[illegible], 107.	$Y = 3\frac{72170}{340167}T.$	Fig. 243.
112	$N = \frac{2418926}{340167}T.$ per 13, 96, 111.	$Z = 1\frac{176891}{340167}T.$	
113	$P = \frac{1070883\frac{1}{2}}{340167}T.$ per 15, 103, 109.	$\& = 2\frac{127004}{340167}T.$	

Onera Columnis seu Muris incumbentia, non erat necesse distincto calculo designare; utpote quæ eadem planè sunt quæ eorundem tignorum alteris capitibus conveniunt. Cum enim (verbi gratia) Tignum X R, non nisi in medio sui puncto R oneretur; sustinet utrumvis Fulcrum (tum quod est ad X, tum quod est in Muro,) tum semissem Tigni, tum semissem oneris in R impositi: per prop. 5. hujus.

Patet, ex hoc calculo, juncturas A, medio proximas, omnium maximè urgeri. Utpote quorum onus peculiare, est plusquam *Novem* Tignorum longiorum; (reliquorum verò, minora saltem quam novem:) Cui quidem adhuc addendum erit (per prop. 7. hujus) onus *Unius* tigni pro firmitate debitâ ne suo pondere rumpatur: Atque porro semissis oneris juncturæ B incumbentis, (per eandem prop. 7.) paulò plus quam *Quatuor* tignorum. Adeoque (computatis omnibus) firmitas ibidem requisita ne rumpatur tignum, plus quam æquipollet ponderi Tignorum *Quatuordecem*: Nempe $1 + 9\frac{27191}{340167} + 4\frac{394549}{1360668} = 14\frac{503313}{1360668}$: (tigni sui pondere computato.)

Cum itaque nulli dubium esse possit, quin Tigna, etiam satis longa, tantæ firmitudinis esse possint, ut valeant Onus longè gravius in eodem sui puncto sustinere quam est Quatuordecuplum sui ponderis: Neque poterit esse dubium, quin hujusmodi Contignatio tutò possit usui accommodari.

Alia Constructionis Forma.

Aliam formam exhibet, Fig. 248. Quæ à præcedente in hoc differt, quòd quæ illic duorum Tignorum Capita Tigno tertio incumbunt, ejusdem duobus distinctis punctis applicantur (quibus trifariam secatur tignum;) ipsáque Tigna sic suffulta ad easdem partes jacent: Fig. 248.

 Hic,

Hic, ad idem subjecti Tigni punctum medium applicantur utraque; sed ad contrarias partes.

Tignorum Faciem Lateralem exhibet fig. 249. Facies superna,
Fig. 249. in ipsa fig. 248. satis apparet. Sunt autem omnia longitudine invicem æqualia, atque inter se similia.

Fig. 248. Potest autem hæc, ut præcedens, plus minusve continuari prout opus videbitur; atque materiæ conditio ferre poterit. Quippe hic etiam, prout, protractâ areâ, augetur trabium multitudo; sic & augetur Pondus.

Habet autem hæc forma, præ præcedente, hoc incommodum; quod, propter utrumque ponderum incumbentium eidem substrati tigni puncto applicatum, hoc fortiùs premitur, (utpote quod sustinet utrumque onus integrum; cum, in formâ præcedente, punctum idem sustinuerit onus alterum integrum, alterum dimidium;) sed & propterea etiam eodem loci plus excavandum erit tignum sustinens, quo admittantur utriusque incumbentium capita. Quod quadantenus fortè compensari videatur, propter tigna incumbentia ad contrarias partes posita; quæ, in præcedente forma, jacebant ad easdem partes utraque: Quamquam & hoc non multum intersit; præsertim si incumbentium tignorum capita, non ad subjecti mediam tantum latitudinem, sed usque ad remotiorem marginem, aut etiam ultra, extendantur; quod pro Architecti arbitrio vel fieri potest, vel non fieri.

Sed neque admodum metuendum erit illud incommodum; nam, eo non obstante, satis valere poterunt tigna oneri sustinendo; prout ex subjecto calculo patebit.

Fig. 243. Aspectum quod attinet; præcedens fortè gratior videbitur: tum propter tigna sic disposita ut totius operis textura sit oculo magis conspicua, (quæ in posteriore forma vix aut ne vix observabitur;) tum propter intervalla, ibidem, uniformi difformitate variata; quæ, hic, sunt quadrata omnia.

Calculus, iisdem principiis nititur in hac formâ atque in præcedente: Sed expeditior hic est, propter tigna omnia ejusdem longitudinis, eadémque in uno tantum puncto medio onerata, pluráque puncta æqualibus oneribus pressa: Quæ omnia conducunt ad reddendum calculum expeditiorem.

Calculus huic constructioni accommodus.

Ad calculum hic expeditiùs instituendum, notandum erit; non tantum ea puncta (sive bina, sive quaterna,) quæ sunt respectu totius

Schematis

Schematis similiter sita (& propterea æqualiter onerata) eodem symbolo designari; (quod in calculo præcedente factum erat:) Sed etiam, propter tigna singula in medio tantùm sui puncto onerata, utraque ejusdem tigni capita æquali onere subjecta fulcra gravare, (per prop. 5. hujus;) quæ itaque analogis symbolis designavimus, onera invicem æqualia indicantibus. Cætera quæ de præcedente Calculo dicta sunt, etiam hic (prout opus erit) locum habent.

Calculi Synopsis.

1 $A=\alpha=\frac{1}{2}T+B.$

2 $B=\beta=\frac{1}{2}T+\frac{1}{2}K+\frac{1}{2}F.$

3 $C=\frac{1}{2}T+A$

4 $D=\delta=\frac{1}{2}T+L.$

5 $E=\varepsilon=\frac{1}{2}T+\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}R.$

6 $F=\frac{1}{2}T+\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}G.$

7 $G=\gamma=\frac{1}{2}T+E.$

8 $H=\frac{1}{2}T+\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}D.$

9 $I=\iota=\frac{1}{2}T+\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}N.$

10 $K=\varkappa=\frac{1}{2}T+\frac{1}{2}H+\frac{1}{2}I.$

11 $L=\lambda=\frac{1}{2}T+\frac{1}{2}\varkappa.$

12 $M=\mu=\frac{1}{2}T+\frac{1}{2}P.$

13 $N=\nu=\frac{1}{2}T+\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2}M.$

14 $P=\pi=\frac{1}{2}T+\frac{1}{2}\iota.$

15 $Q=\frac{1}{2}T+\frac{1}{2}\gamma.$

16 $R=\varrho=\frac{1}{2}T+\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}Q.$

Per prop. 5 vel 7 hujus Cap.

17 $C=T+B.$ per 3, 1.

18 $D=T+\frac{1}{2}\varkappa.$ per 4, 11.

19 $F=\frac{5}{4}T+\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}E.$ per 6, 7, 17.

20 $H=\frac{5}{4}T+\frac{1}{2}B+\frac{1}{4}\varkappa.$ per 8, 1, 18.

21 $M=\frac{3}{4}T+\frac{1}{4}\iota.$ per 12, 14.

22 $N=T+\frac{1}{4}\varkappa+\frac{1}{4}P.$ per 13, 11, 12.

23 $N=\frac{9}{8}T+\frac{1}{4}\varkappa+\frac{1}{8}\iota.$ per 22, 14.

24 $Q=\frac{3}{4}T+\frac{1}{2}E.$ per 15, 7.

25 $R=\frac{9}{8}T+\frac{1}{4}E+\frac{1}{4}\iota.$ per 16, 14, 24.

26 $B=\frac{9}{8}T+\frac{1}{4}B+\frac{1}{4}E+\frac{1}{2}K.$ per 2, 19.

27 $B=\frac{9T+2E+4K}{6}.$ per 26.

28 $E=\frac{29}{16}T+\frac{7}{24}E+\frac{1}{8}I+\frac{1}{3}K.$ per 5, 25, 27.

29 $E = \frac{87T + 6I + 16K}{34}$. per 28.

30 $H = 2T + \frac{1}{6}E + \frac{7}{12}K$. per 20, 27.

Fig. 248. 31 $I = \frac{17}{16}T + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{16}I + \frac{1}{8}\kappa$. per 9, 23.

32 $I = \frac{17T + 8\varepsilon + 2\kappa}{15}$. per 31.

33 $K = \frac{31}{15}T + \frac{7}{20}E + \frac{43}{120}K$. per 10, 30, 32.

34 $K = \frac{248T + 42E}{77}$. per 33.

35 $I = \frac{361T + 140E}{3 \times 77 = 231}$. per 32, 34.

36 $E = \frac{11389T + 952E}{34 \times 77 = 2618}$. per 29, 34.

37 $E = \frac{1627T + 136E}{34 \times 11 = 374}$. per 36.

38 $E = \frac{1627}{238}T$. per 37.

39 $G = \frac{1746}{238}T$. per 7, 38.

40 $Q = \frac{992}{238}T$. per 15, 39.

41 $K = \frac{1654}{238}T$. per 34, 38.

42 $L = \frac{946}{238}T$. per 11, 41.

43 $D = \frac{1065}{238}T$. per 4, 42.

44 $B = \frac{2002}{238}T$. per 27, 38, 41.

45 $A = \frac{2121}{238}T$. per 1, 44.

46 $C = \frac{2240}{238}T$. per 3, 45.

47 $F = \frac{2112}{238}T$. per 6, 39, 46.

48 $H = \frac{1712}{238}T$. per 8, 43, 45.

49 $I = \frac{1358}{238}T$. per 32, 38, 41.

50 $P = \frac{798}{238}T$. per 14, 49.

51 $M = \frac{518}{238}T$. per 12, 50.

52 $N = \frac{851}{238}T$. per 13, 42, 51.

53 $R = \frac{1014}{238}T$. per 16, 40, 50.

Hoc est.

$A = 8\frac{217}{238}T$.	$E = 6\frac{192}{238}T$.	$I = 5\frac{168}{238}T$.	$N = 3\frac{137}{238}T$.
$B = 8\frac{98}{238}T$.	$F = 8\frac{208}{238}T$.	$K = 6\frac{226}{238}T$.	$P = 3\frac{84}{238}T$.
$C = 9\frac{98}{238}T$.	$G = 7\frac{80}{238}T$.	$L = 3\frac{232}{238}T$.	$Q = 4\frac{40}{238}T$.
$D = 4\frac{113}{238}T$.	$H = 7\frac{46}{238}T$.	$M = 2\frac{42}{238}T$.	$R = 4\frac{62}{238}T$.

Pater,

Patet, ex hoc calculo; Ponderum ſingularium maximum eſſe $A = 8\frac{2}{2}\frac{1}{3}\frac{7}{8}T$. Cum itaque eidem puncto (tigni C C medio) incumbant duo A, (utrinque unum,) hoc eſt $17\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{6}{8}T$; idemque porro (ne pondere tigni ſui rumpatur) Uno adhuc tigno onerari cenſendum ſit, (per prop. 7. hujus Cap.) Firmitas ibidem requiſita, (ne rumpatur tignum) æquipollet ponderi Tignorum $8\frac{2}{2}\frac{1}{3}\frac{7}{8} + 8\frac{2}{2}\frac{1}{3}\frac{7}{8} + 1 = 18\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{6}{8} = 18\frac{1}{1}\frac{4}{7}$.

Quod quidem Onus non tantum eſt ut propterea metuamus ne non ferendo ſufficiat tignorum robur: Quippe tigna, etiam ſatis longa, multò gravius onus ſuſtinere valebunt quam eſt *Octodecuplum*, ſeu *Novendecuplum* ſui ponderis.

Eſt autem gravius quam onus maximum formæ præcedentis; utpote quod ad *Quindecuplum* ponderis unius tigni non pertigiſſe, ſupra deprehenſum eſt.

Paucioribus interim Tignis in hac forma res abſolvitur, (utut areæ hujus latitudo intra muros, duodecima ſui parte ſuperet latitudinem illius, eâdem manente longiſſimi tigni longitudine:) Quippe hic adhibentur tigna omnino 49 æqualia; illic verò, ex longioribus 40, ex brevioribus 20.

Conſtructiones adhuc aliæ plures.

Tertia conſtructionis forma, quam exhibet fig. 250. in hoc potiſſimum à Primâ differt, quod quæ diverſis ejuſdem ſubjacentis tigni Fig. 250.
punctis ſuſtinentur tigna incumbentia; ſint, illic, ad eaſdem partes poſita; hic, ad contrarias.

A Secundâ verò, in hoc potiſſimum differt, quod, quæ ad contrarias partes ſubjecti tigni jacent tigna incumbentia, applicentur illic ad idem ſubjecti tigni punctum medium; hic verò, ad diverſa puncta, quibus tigni longitudo trifariam ſecatur.

Quarta, Quinta, & Sexta, ſimiliter ex figura trilatera fig. 247. derivantur; ut, ex quadrilatera fig. 246. derivantur prima, ſecunda, & tertia.

Forma Quarta, quam exhibet fig. 251. eſt analoga Tertiæ; mu- Fig. 251.
tatis Quadratis (propter angulos non rectos) in Triangula & Hexagona.

Forma Quinta, quam exhibet fig. 252. eſt magis analoga primæ; Fig. 252.
propter duo tigna incumbentia, ad eaſdem partes tigni ſuſtinentis poſita: In hoc autem cum ſecunda convenit, quòd ad idem ſuſtinentis punctum medium, applicentur utraque.

Forma Sexta, quam exhibet fig. 253. eſt Secundæ plane analoga; Fig. 253.
propter incumbentium ad contrarias partes tignorum capita, eodem

ſubjecti

subjecti tigni puncto medio suffulta: Atque in hoc potissimum à Quartâ differt; quod, hic, ad idem sustinentis punctum applicantur utraque; illic, ad diversa. In Schemate autem, necesse habui tignorum capita amputare, paulò citra tigni sustinentis puncta media, (quibus suffulcienda intelliguntur:) Quippe aliàs, coeuntibus ad idem punctum tignis contrariis, una fieret continua recta, nec ad oculum pateret tigni sustinentis ab incumbentibus distinctio, nisi vellem in majori forma Schema dilineare (ut in fig. 248. factum est) quo possint tignorum oppositorum capita sustinentis medio disterminari.

Possunt autem hæ Formæ (sicut præcedentes) plus minusve continuari, prout opus erit, atque expedire videbitur.

Possuntque, quæ singulis incumbunt juncturis onera sustinenda, similiter ad calculum revocari, ut ad formam primam & secundam factum est.

Sed & aliis mille modis possunt hæc omnia vaiari, prout vel conditio loci, vel scopus Architecti postulaverit. Nobis, hæc pauca sufficiat exhibuisse specimina.

CAP.



CAP. VII.

De Axe in Peritrochio, & Machinis cognatis.

DEFINITIONES.

DEF. I.

Axem in Peritrochio *vocant Machinam, seu Instrumentum Mechanicum, ponderibus levandis aptum; in quo Cylindrus (quem* Axem *vocant,) Fulcris per extrema sustinetur, circumpositum habens Tympanum, (quod* Peritrochium *vocant,) in cujus ambitu, foraminibus ad id factis, infiguntur* Scytalæ; *quibus applicata Vis, Peritrochium unà cum Axe vertit, cui convoluti Funes Onus elevant.* Fig. 254.

C*Ylindrus* (κύλινδρος) à κυλίνδω seu κυλινδέω dicitur, (atque hoc à κυλίω *volvo*,) ob formam teretem, aptè volubilem: quam autem in Geometriâ figuram sic appellant, notum est.

Cylindri autem, saltem qui pro magnitudine breves sunt, (in Mechanicis præsertim) etiam *Tympana* (τύμπανα) dici solent: ob similitudinem, credo, Instrumentorum pulsatilium sic dictorum, quæ & etiamnum in usu sunt. Ea verò sive à τύπτω sic dicantur (unde Scholiastes Aristophanis τύμπανον deducit, cùm pro *fuste* sumitur quo quis verberetur;) seu potiùs ab Hebræo תוף (quod tantundem significat) non disputo. Certè à Syrorum [illegible] תופים, Græcorum τύμπανα originem traxisse, non videtur ambigendum; quæ Romanis postea aliísque gentibus in usum venerunt. Neque satis convenit inter interpretes num illud ἐτυμπανίσθησαν Hebr. c. 11. innuat quòd *fustigati* fuerint seu

Fig. 254. ſeu *fuſtibus cæſi*, an quod fuerint quaſi in equuleo *torti* atque *extenſi*, haud ſecus atque Membranæ Tympanorum capitibus impoſitæ.

Cylindrum autem (in Mechanico hoc Inſtrumento) minorem, ſed & longiorem, *Axem* (ἄξονα) appellant. *Axis* autem ſeu ἄξων, ab ἄγω, ἄξω, videtur deveniſſe; utpote circa quem *agatur* Rota. Quippe de rotarum axe vox ea primâ ſignificatione dicitur; atque inde ad Circulorum, Sphærarum, aliorúmque Solidorum Axes transfertur.

Tympanum verò ſive Cylindrum majorem, ſed & breviorem, *Peritrochium* (περιτρόχιον) vocant; (quod quin à τρόχος *rota*, atque hoc à τρέχω *curro* dicatur, non eſt ambigendum;) quòd Rotarum inſtar circa Axem (περιτρέχει) circumcurrit: cum eo tamen diſcrimine, quod curruum Rotæ circa manentem Axem (hoc eſt, non converſum,) convertuntur; hoc autem Peritrochium unà ſecum & Axem ſuum volvit.

Et quidem Axem hunc, utut alibi tornatum, eâ tamen parte quâ Peritrochio infigitur, quadratum relictum vult Pappus, (aptatum ſimili in Peritrochio Foramini quadrato,) quò Peritrochio firmiùs jungatur, certiúſque cum eo converſo convertatur.

Axis autem Extrema, (quæ & axis *Capita* dicuntur, aut etiam *Poli*,) in foramina (τρήματα) immoti Pegmatis quo ſuſtinentur immiſſa, circumpoſitis axique fixis munimentis æneis armari jubet quas *Chœnicidas* (χοινικίδας) vocat, (dicitur autem χοινικὶς à χοῖνιξ, ab formæ, ut videtur, ſimilitudinem; atque in eodem ſenſu uſurpatur χνόη:) Sed &, in pegmatis foraminibus, eiſdem Chœnicidibus ſubjectos vult τρίβεις æneos, ſic enim eſt in codicibus græcis; Commandini verſio τρύβεις habet; quod à τρίβω *tero*, dictum videtur: In eum verò finem utraque, tum ut Axium extrema in Foraminibus expeditiùs vertantur, tum ut minus terantur utraque.

Idem verò, ubi *Gloſſocomum* deſcribit, pro Axium extremis, habet *Digitos* æneos *Pyxidibus* æneis acceptos, Δακτύλους dicit ob formæ ſimilitudinem; & πυξίδας ſimiliter. Utut enim πυξὶς à πύξος dicatur, quoniam primitùs è *buxo*, ut videtur, fiebant *pyxides*; poſtea tamen non ex quovis ligno tantùm ſed ex quavis materia cùm fierent, idem tamen nomen retentum eſt.

Eoſdem idem ibidem etiam *Tormos* τόρμους videtur appellare: quod ſive à τείρω *tero* dicatur, (quòd verſando teratur) ſive à τερέω vel τορέω *terebro, perforo*, perinde eſt; ſive etiam cognatæ ſignificationis ſint τόρμος, τέρμα, τέρμις, τέρμων, & *terminus*. Vitruvius, *Cnodacas* appellat; Hero, κνώδακας; ut ejuſdem forte originis ſint κνώδαξ,

&

& κνώδων, *mucro* ſeu *cuſpis gladii*, quod à καίνω & ὀδὼς dictum volunt.

Hi autem ſive δάκτυλοι, ſive τέρμοι, ſive κνώδακες dicantur; non tam videntur fuiſſe continuati axis (qui ligneus eſſe ſolebat) partes, in minorem formam tornatæ; quàm Clavi ferrei vel æneï ibidem impacti, adacti, aut etiam implumbati; quò fortiùs axem ſuſtinerent quam ſi lignea eſſent hæc axis Capita. Quare & *ſubſcudes* quædam ſeu *ſubſcudiculæ* rotundæ dicuntur eſſe. *Subſcus* autem à *ſuccudendo* dici perhibetur; quòd quaſi *cudendo*, mallei ictibus percuſſa, immittatur.

Scytalæ (σκυτάλαι) dicuntur, Fuſtes ſeu Baculi teretes, qui pro Manubriis ſunt, in foramina in Peritrochii ambitu facta immiſſi fixique. A σκῦτος *(corium)* σκυτάλην dictum volunt; eo præſertim ſignificatu quo *Flagrum coriaceum* ſeu *ſcuticam* ſignificat. Sed & *clavam corio obductam* ſignificare volunt; (atque, hinc, ſimpliciter *clavam* vel *fuſtem.)* Et quidem fieri poteſt, ut hæc manubria non raró fuerint corio obducta (quò tractantium manus minimè læderentur,) indéque *Scytalæ* dicta. Sed (quicquid ſit de orgine ſeu cauſa nominis) *Scytalæ* vox pro *baculo* ſeu *ligno tereti* paſſim adhibetur. Atque hinc Lacedæmoniorum *Scytale*, (à multis paſſim ſcriptoribus memorata,) modum innuit oculte ſcribendi. Quippe Segmentis Membranæ (quod quaſi Corii genus eſt) bacillo tereti circumpoſitis, ſive Spirali forma circumvolutis, Epiſtolam inſcribebant: quibus inde ſolutis confuſæ literæ non legerentur niſi baculo ſimili ſimiliter circundarentur.

Quæ autem Pappo σκυτάλαι, Ariſtoteli (in quæſtionibus Mechanicis) κόλλοπες vocantur. Habétque & hæc vox, neſcio quo pacto, cum Corio connexionem. Quippe κόλλοψ primâ ſignificatione Corium durius ſignificat, quod in boum cervicibus & dorſis eſt; quod ita dictum volunt quòd ex eo cocto fiebat κόλλα *gluten*. Hinc & Citharæ *verticilla*, quibus chordæ intenduntur, κόλλοπας dici volunt; *ex materiâ quâ fiebant:* niſi potiùs dicendum ſit, *quâ tegebantur*. Hoc utique putaverim potiùs; quippe corium utcunque durum & calloſum, non tantæ firmitatis eſt ut ex eo fiant hæc verticilla; quæ lignea ſaltem eſſe debent, aut ſi mavis metallina. Sed tum hæc Verticilla tum illa Manubria corio tecta fuiſſe nihil impedit; atque inde tum κόλλοπας dici, tum & σκυτάλας.

Dum verò *Collopas* appellat Ariſtoteles hæc manubria, idem σκυτάλας vocat inſtrumenta quædam alia; Qualia ſcilicet nos exhibemus fig. 260. item, qualia innuit figura 258, R, S, oneribus trahendis ſuppoſitæ,

quo minùs in ſubjectam terram offenſent; eáque vel rotulis quaſi capitibus affixis, vel etiam ſine his. Cum enim *Scytala* pro *ligno tereti* habebatur, mox ea pluribus inſtrumentis ex ligno Cylindraceo factis accommodata eſt.

Funes σχοινία, quæ Axi circumpoſita etiam ad Onus ſublevandum (φορτίον dictum) annexa erant, ὅπλα appellat Pappus; hoc eſt *Arma*; (pro quo in Commandini verſione, errore credo Typographi, *Arna* legitur: quod quid ſit, nonnullis forſan faceſſat negotium.) Sic enim & Rudentes ſeu funes nautici majuſculi ὅπλα dicebantur; &, Latinè, *navis Armamenta*. Quæ & *Sparta* σπάρτα dicebantur; hoc eſt, ut quibuſdam videtur *Sata*; (tanquam à σπείρω, pro *ſero, ſevi*;) quia ex *cannabe* aliiſque rebus ſativis fiebant: malim à σπείρω *necto*, hoc eſt, *ſero, ſerui*. Nam, ut σπείρω, ſic *ſero* (quod inde factum videtur) utrumque ſignificatum habet; ſed in altero eſt *ſevi, ſatum*, ubi pro *ſemino* uſurpatur; in altero, *ſerui, ſertum*, ubi pro *jungo*, aut *necto*, dicitur; (quâ ſignificatione etiam ab εἴρω *necto* dici poterit; ut & *ſermo, ſeries*, &c. & quidem *ſerere ſermones*, fortaſſis ab ἔρω dico.) Idémque & in compoſitis videre eſt; quia ab *inſero*, pro diversâ ſignificatione, dicitur *inſitus*, & *inſertus*; à *conſero, conſitus*, & *conſertus*; à *diſſero, diſſitus*, & *diſertus*; à *deſero, deſitus*, & *deſertus*; ab *aſſero, aſſitus*, & *aſſertus*; ab *exero, exertus*; (ſed *exitus*, potiùs ab *exeo*.) *Funis* autem ſeu *ſpartum* in hoc & hujuſmodi inſtrumentis, dicitur & *Funis tractorius*, & *Funis ductarius*.

II.

Fig. 256. *Axem cum Scytalis, ſed ſine Peritrochio*, Suculam *vocant*.

SUculam, ſive *Succulam*, (nam utroque modo ſcribitur,) dici volunt, ob *Suis* neſcio quam (volutando forſan) ſimilitudinem. Græcis, ob *Aſini* potiùs (in ferendis oneribus) ſimilitudinem, ὄνος, ὀνίσκος, ὄνειος, appellatur. Scytalas autem vel ad alteram vel ad utrumque extremum, pro arbitrio, habere poterit.

Fig. 257. Neque huic abſimile eſt *Jugum* textorum (ζυγός) de quo Ariſtoteles in Mechanicis quæſtionibus, aliique ad illum, ſcribunt.

III.

Suculam erectam, Ergatam *vocant*.

Fig. 258. SI nomen ſpectemus, *Machinam Operariam* dixeris; (eſt utique ἐργάτης *operarius*, ab ἐργάζω:) ſed huic ſpeciatim Organo nomen impoſuit

imposuit usus. In quo erecta Sucula, vectibus quaternis, (seu, quod tantundem est, duobus transversim positis & utrinque extantibus,) vel etiam pluribus, converti solet; atque ponderibus Attrahendis, (potiùs quàm elevandis aut attollendis,) adhiberi.

IV.

Huc referenda erunt ejusmodi alia Instrumenta innumera; ex Cylindris seu Tympanis confecta (seu quæ horum instar sunt,) eisque vel Dentatis vel non-Dentatis; & quidem utcunque multiplicatis: idque sive circa eundem motûs axem rotentur, sive circa diversos. Talia sunt Terebra, Tympanum manubrio instructum, Tympanum cum axe, *aut etiam hujusmodi plura invicem commissa, (ut in Automatis fieri solet,)* Geranium, *aliaque multa, quæ vel ex figuris satis intelligantur, vel quæ Lector ex suo penu huc referre possit.* Fig. 259, 260, 261, 262, 263.

ET quidem *Terebra* seu *Terebrum*; à *Tero* dictum, (ut Græcorum τέρετρον à τερέω *perforo*, atque hoc à τείρω *tero*,) vel à Græco τέρετρον immediatè; vix aliud est quàm vel *Sucula* vel *Ergata* cum *Scytalis binis*; cujus ope acies quâ secat premitur seu protruditur. Fig. 259.

Tympanum manubrio instructum, est instar *Suculæ* cum unicâ *Scytalâ*. Fig. 260.

Tympanum cum Axe, est *Axis in Peritrochio* sed sine *Scytalis*: (saltem nisi, in *Tympanis dentatis*, ipsi Dentes sint pro Scytalis:) sed & hujusmodi plura invicem committi solent; quò Vis Vi addatur. Fig. 261.

Geranium appello, Instrumentum illud cujus in Navigiis onerandis & exonerandis (atque Oneribus aliàs sublevandis) frequens est usus; (ubi Rotâ magnâ, ab hominibus calcatâ, porrigitur longa Cervix, unde ad Onus demittitur Tractorius Funis.) Nostrates vocant à *Crane*, (Gruem;) cui respondent Machinæ Græca nomina γέρανος, γεράνιον; &, Latinorum, *Grus*. Fig. 262.

Sed & vulgaris Ferrei *Mallei* usus, evellendis Clavis adhibiti, poterit & huc referri. Aliáque istiusmodi plurima. Fig. 263.



PROPOSITIONES.

PROP. I.

Fig.254, In Axe cum Peritrochio, (& cognatis Potentiis, quibus
255, eadem eſt ratio,) ut eſt Perimeter Axis, cui applicatur
256, Pondus movendum; ad Perimetrum Orbis Extimi, cui
257, applicatur Vis Motrix; (ſeu illius Diameter vel Semi-
258, diameter, ad Diametrum vel Semidiametrum hujus:)
259, ſic, vice versâ, Vis æquipollens, ad Pondus Moven-
260, dum. Quæ itaque vel tantillum aucta movebit; aut
261, etiam, ſi tantillum minuatur Pondus: Secùs; non mo-
262, vebit: Et, ſi adhuc minor ſit, vel Pondus augeatur; ne
263. ſuſtinebit quidem.

PRopoſitionem ſic univerſaliter conceptam, eâdem operâ pluribus Machinis ſeu (ut dici ſolent) Potentiis accommodandam cenſui (cùm in omnibus eadem ſit ratio;) potiùs quàm ut eadem de ſingulis toties repetantur.

Solent autem plerique omnes Mechanicorum ſcriptores Potentiam hanc ad Vectem reducere, (de quo in ſuperiore Capite dictum eſt:) Neque id incommode. Quippe ſi C Centrum ſeu Axis Motûs pro Fulcro ſeu Hypomochlio habeatur; rectæque C A, C B pro Diſtantiis punctorum applicationis, Virium & Ponderis, ad eandem rectam ceu Vectem A C B: Eadem omnia quæ de Vecte ſuperiùs demonſtrantur, etiam hic locum habebunt. Eſt utique hoc Organon tantundem atque Vectis continuus, ſeu alius atque alius continuo ordine ſubinde ſuccedentes. Quippe ut, vertente Machinâ, (fig. 254, 255.) aliud atque aliud erit Perimetri axis punctum B cui applicatur Pondus; ſimiliter alius atque alius ſuccedit Vectis A C B, cujus reliquo extremo applicetur Vis motrix. Si verò non quidem ad ipſum A punctum oppoſitum applicetur Vis, ſed ad aliud quodvis extimi Orbis Punctum, ut

ut α: ſi tamen ad hoc punctum quodvis ſic applicetur Vis ut linea directionis ſuæ, ut αV, ſit ſecundum Tangentem hujus Orbis; res eodem planè recidit, per ea quæ de Librâ Demonſtravimus, ad prop. 14. Cap. 3. Si autem non ſecundum rectam quæ Orbem tangat, ſed quamvis aliam, ut αv, applicetur Vis; eadem pro ſingulis reſpectivè caſibus locum hic habebunt, quæ illic de Libra demonſtrantur. Sive enim ad Libram referatur hæc potentia (quod mihi potius videtur) ſive ad Vectem (qui & ipſe Libra eſt,) eodem res recidit.

Verùm ego, ut rem ad prima principia revocem, malim ex prop. 5 & 6. Cap. 2. demonſtrare; utpote quod univerſale principium eſt, ex quo omnium Machinarum vires æſtimandæ ſunt.

Si itaque intelligatur (quod hic ſupponimus) in unâ Machinæ converſione tantundem Elevari (ſeu contra propenſionem ſuam moveri) Pondus appenſum P, quantum tractorii funis illud eſt quod Axem ſemel ambiat, (quod itaque ipſius Ambitui æquale ſupponitur;) unáque tantundem Deſcendere (ſeu ſecundum propenſionem ſuam procedere) Pondus contrarium ſeu Vim Motricem V, quantus eſt Extimi Orbis Ambitus cui vis hæc applicatur, (quod pariter intelligendum erit:) Manifeſtum eſt ſic eſſe Deſcenſum ad Aſcenſum, ut eſt Ambitus hic ad illum, ſeu ut hujus diameter vel ſemidiameter ad diametrum vel ſemidiametrum illius: putà ut m ad n ſeu mD ad nD. Si itaque ponatur (vice versâ) Pondus ad Vim Motricem, ut n ad m, ſeu ut nP ad mP: Erit Motûs illius Magnitudo ad Magnitudinem hujus, (utpote in ratione ex duabus illis rationibus compoſita, per prop. 5. Cap. 2.) adeoque & Momentum illius ad Momentum hujus (per prop. 7. Cap. 2.) ut $nP \times mD$ ad $mP \times nD$, ſeu ut $mnPD$ ad $mnPD$; nempe æquale. Hoc eſt, Virium ut nP, Deſcenſus (ſeu latio ſecundum directionem ſuam) ut mD, æquipollebit Ponderis ut mP Aſcenſui (ſeu lationi contra directionem ſuam) ut nD: Qui itaque cum ſint contrarii, pro nullo ſimul vel Deſcenſu vel Aſcenſu reputandi ſunt; per prop. 6. Cap. 2. adeoque (per prop. 7. ejuſdem.) Momentum in neutram partem præpollens; & Vires contrariæ ſe mutuò ſuſtinebunt. Si verò vel Augeatur Vis Motrix, vel Minuatur Pondus; præpollebit Vis Motrix & Pondus elevabit: Sin contra; præpollebit Pondus, & Vis Motrix ne ſuſtinendo per erit: per prop. 8, & 12. Cap. 1. Quæ erant demonſtranda.

$$\frac{nP \quad mD}{mnPD} = \frac{mP \quad nD}{mnPD}$$

SCHO-

SCHOLIUM.

NOtandum hic, si ad Mathematicum rigorem res exigatur, à ratione propositâ nonnihil recedendum esse. Nam Funis longitudo quæ unâ revolutione convolvitur aliquanto major est quàm axis ambitus: Tum quia, propter funis crassitiem, extra Axis ambitum supereminet, (adeóque peripheriam majorem efficit;) Tum quia non præcisè circularem peripheriam efficit; sed Spiralis circa Cylindrum conversionem, quæ circuli peripheriâ major est. Item quæ Scytalis applicatur Vis, non in ipsis earundem punctis extimis applicatur, sed paulò citra extremum. Verùm hujusmodi minutiæ in Mechanicis negligi solent. Si autem ad Mathematicum rigorem exigere velis; tantus reputandus erit Axis Ambitus, quanta est longitudo funis unâ conversione convoluti: Atque tantus reputandus ambitus à Scytalis descriptus, quantus ab eo illarum puncto describitur cui Vis censenda erit applicari. Hæc utique supponit Demonstratio.

Notandum porro; Demonstrationem hanc spectare potissimum fig. 254, 255, &c. ubi Pondus dependet, adeóque propter gravitatem suam agit ut Vis contraria; quæ itaque ut Pondus elevetur, superanda erit à Vi motrice; & saltem æquanda, quo sustineatur.

Si verò, ut in fig. 258. Pondus humi jacens Trahendum sit (in Plano Horizontali) non Elevandum; vel aliud obstaculum amovendum sit; (ut fig. 259. ubi lignum Terebrâ scindendum erit, quo possit Terebra converti; & fig. 263. ubi clavus evellendus est;) considerandum erit hoc Pondus, vel Obstaculum, non ut *Vis contraria*, (quippe ut non horsum suâ sponte nititur quò trahitur, sic neque ad partes contrarias,) sed simpliciter ut *Impedimentum*. Quo casu utut Vis major quàm quæ æquipolleat requiratur ad Pondus illud vel Obstaculum movendum vel amoliendum: quò tamen sustineatur (hoc est, impediatur ne feratur in oppositum,) nulla Vis requiritur; supponitur utique vel non aliorsum niti, vel (quod tantundem hic erit) aliunde sustineri (putà subjecto pavimento, vel alio quovis modo,) ne eò feratur. Alia siquidem habenda est ratio nudi *Impedimenti*, ut in prop. 11. Cap. 1. alia *Vis contrariæ*, ut in prop. 12. ejusdem.

Si verò, ut in fig. 256. partim Trahatur, partim Elevetur; utriusque habenda erit ratio: Nam, præter amoliendum Impedimentum (ex scabritie terræ vel aliunde ortum quod majus minúsve esse potest, prout magis vel asperum vel glabrum sit subjectum quo nititur fundamentum;) superanda etiam est Vis contraria deorsum tendens; quæ ascensui non opponitur tantùm sed contrariatur. Quæ quidem Vis contraria

contraria major minórve erit (eodem manente pondere) prout major minórve fuerit motûs acclivitas; secundum ea quæ Cap. 2. tradidimus, prop. 16, 17, & alibi.

Et quidem illud ipsum Impedimentum quod quò Trahatur pondus superandum erit à Vi motrice; quò tamen sustineatur, (ne à Vi contrariâ in Oppositum moveatur,) Adjumento esse potest: Quippe eadem, verbi gratiâ, asperitas Terræ quæ impedit tractionem sursum, impediet etiam lapsum deorsum in eodem obliquo plano; & quamquam Vi Tractrici opponatur ut Impedimentum; Retentrici tamen ut Adjumentum associandum erit.

Si autem peragenda sit Tractio in plano (non, ut priùs, Acclivi, sed) Declivi: Superandum & hic erit quod à Terræ Scabritie (vel aliunde) oritur impedimentum; sed quæ superetur vis contraria, à Ponderis gravitate orta, nulla est: imò ea ipsa quæ in gravitate illâ est Vis Motrix deorsum, Impedimento illi contraria erit; illúdque magis minúsve minuit, prout major est aut minor declivitas; quæ & tanta esse poterit ut hæc ipsa Impedimentum superet, ut Vi Tractrice opus non sit. Utcunque; Vi Tractrici eousque adjumento erit, ut eâ nihil ultra superandum relinquatur quàm id quo Impedimentum illud superat hoc ex Gravitate Momentum pro eâ plani declivitate.

Verùm hæc omnia sunt extra considerationem hujus Propositionis: quæ (cæteris ritè computatis prout ex suis quodque principiis æstimandum erit) hoc potissimum probatum it; Vim quamlibet in A directè applicatam, ad eandem directè applicatam in B, eam Momenti rationem habere ad Pondus P movendum, quam habet C A distantia, ad distantiam C B, vel eo radio descripta Perimeter ad Perimetrum hoc radio descriptam.

Dico autem *directè applicata*; (hoc est, secundum rectam quæ ad Orbis ambitum in puncto applicationis Tangens sit; ut ad prop. 14. Cap. 3. explicatum est:) quippe si Obliquè applicetur; minuitur Vis pro ratione Obliquitatis; secundum Obliquitatis leges Cap. 2. expositas. Nempe, Vis per $\alpha\, v$ obliquè applicata, ad eandem per α V tangentem directè applicatam, in eâ ratione valebit quam habet α V ad $\alpha\, v$; per prop. 14. Cap. 3. vel prop. 21, aut 25. Cap. 2. Et quidem, Vis per α a, ad Vim eandem per α V vel A V applicatam; valebit ut C a, ad C α vel C A; per prop. 13. Cap. 3.

Atque hoc, *Geranium* seu *Gruem* speciatim spectat. Ubi Vis motrix adhibita, hoc est, hominis calcantis pondus, non directè applicatur secundum Orbitæ tangentem, sed obliquè. Et propterea minus agit Pondus calcantis in α, quàm si esset in A; Cùm enim agat hoc Pondus, Fig. 262.
propter

propter gravitatem suam, secundum rectam quæ sit Horizonti perpendicularis; adeóque, si ad Horizontalis rectæ CA punctum A applicata foret, orbitam tangeret ea recta; atque æquipolleret calcantis Pondus Oneri in P, quod ad ipsum sit ut CA ad CB, per modò demonstrata: idem ad punctum α applicatum, minus valebit (ob causam jam dictam) quam si in A foret. Et quidem si foret α ipsi C directè subjectum, nihil omnino ageret ad convertendum Tympanum aut Pondus elevandum; sed eò plus agit quò propius ad A promovetur; atque in eâ quidem ratione quam jam ostendimus ex prop. 21. Cap. 2. & prop. 13. Cap. 3.

Dico etiam, in eâ ratione valere *ad Pondus* P *movendum:* quoniam ubi ad materiam Physicam perventum erit, nullum erit tam in omnibus expeditum Organum (utcunque affabrè detornatum fuerit, omnésque mobilium commissuræ ad glabritiem redactæ, & perfuso Oleo aliásve adjutæ,) quin aliqua supererit scabrities, aliáve inæqualitas, aut impedimentum, quod faciet ut Virium nonnihil impendendum fuerit ad ipsum Organum movendum; atque hoc, quantumcunque sit, summæ Virium in A applicatarum detrahendum erit, illúdque quod superest Virium reputandum erit adhibitum ad Pondus movendum quod ad B applicatur.

Quæque hic monemus, alibi prout opus fuerit intelligenda erunt.

Fig.263. Mallei verò usum illum quem innuit fig. 263. cur huc reducimus, ratio manifesta est: Quoniam, etiam hic, virtus in A adhibita, movet in circumferentiâ radio CA descriptâ (propter C Centrum motus,) B verò, unà cum Impedimento seu Obstaculo, (hoc est clavo evellendo,) in circumferentiâ descriptâ radio CB. (Adeoque quò propius sit B ad C, eò fortiùs aget vis eadem in A.) Atque idem dicendum erit de quovis alio organo consimili, ubi eadem ratio.

Si tamen Mallei usum illum (aliáque similia) ad Vectem referas (aut Libram etiam) cujus Centrum Motûs extra Vectem (Librámve) sit: perinde est. Quam rem ad prop. 14. Cap. 3. consideravimus.

PROP.

PROP. II.

Datum Pondus, datâ Vi, Axe in Peritrochio (alióve quod hujus instar sit Organo) movere. Fig. 254, 255, &c.

FIat, ut Pondus *P*, ad Vires *V*, sic (reciprocè) hujus distantia C A, ad C B: atque æquipollebunt in hoc situ Vis & Pondus, (utpote in distantiis reciprocè proportionalibus,) per præcedentem. Adeóque si distantia C A vel tantillum augeatur; auctum sic erit Virium Momentum, Ponderíque præpollebit, illúdque movebit: per prop. 11, 12. Cap. 1. Quod erat propositum.

SCHOLIUM.

PAtet hinc; quò minor fuerit Axis ambitus cui applicatur Pondus, vel major ambitus Peritrochii extimus (seu quod hujus instar est) cui Vis Motrix applicatur, eò minori Vi movebitur Pondus.

Verùm hic recordandum erit, præsertim vastis Ponderibus exigua Vi movendis, quod in Schol. prop. 18. Cap. 2. monuimus; nempe probè curandum esse, ut omnia, Vi & Ponderi intermedia, sint pro suis respectivè oneribus sustinendis satis firma: secùs, rumpetur ipsa Machina, ejúsve aliqua Armamenta, potiùs quàm efficiatur motus imperatus.

Item, quod ad prop. 28. Cap. 1. monuimus; nempe, motum hunc quò minori Vi peragatur, eò tardiorem fieri; adeóque defectum Virium Temporis impensi longitudine redimendum esse: Quod & in omnibus omnino Organis mechanicis locum habet. Adeóque, ubi Tempori parcendum erit, ut plus Virium addatur necesse est.

Denique; quoniam, ubi Virium & Ponderis magna est inæqualitas, haud commodè poterit quod in hujus Propositionis constructione Imperatum est ad praxin redigi unâ vice (pro Physicæ materiæ imperfectione;) ideo pluribus sive tympanis sive rotulis invicem commissis id præstant; De quo in sequenti propositione agitur.

PROP. III.

Si pluribus commissis Rotulis, aliisve Ponderis levandi mediis adhibitis, motus facilitetur: calculo nihilominùs constabit, quanta sit illa facilitatio.

Fig. 264. ESto, verbi gratiâ, Centro (seu motûs Axe) C, Tympanum seu Rota C A, cui in ambitu (ut moris est) Asserculi seu Pinnacidia affigantur; quibus impingens in A, Aqua currentis Fluvii, Rotam convertat. Sitque ad eundem motûs Axem C, Rota minor C B dentata; quæ ita cum priore conjuncta sit ut circa communem Axem junctim moveantur. Sitque C B ad C A, (verbi gratia,) ut *a* ad *b*, seu ut 1 ad 3: valebit igitur, (per prop. 1. hujus) Vis in A ad æqualem in B; ut *b* ad *a*, seu ut 3 ad 1. Adeóque *Uncia* in A, æquipollebit *Quadranti* (hoc est, tribus Unciis) in B.

Esto porro; Centro (seu motûs Axe) D, alia Rota D B; ita dentata, ut dentes sui aptè congruant dentibus rotæ C B; eisque sic implicentur ut earum ope convertatur rota D B circa Centrum suum seu Axem D. (Sic autem congruent, si in eâ sit ratione Numerus Dentium rotæ D B, ad Numerum Dentium rotæ C B; quâ est istius Ambitus, ad Ambitum hujus; seu ut Radius, ad Radium.) Sitque circa eundem motûs-Axem D, Rota minor seu Orbita D E; quæ cum D B junctim moveatur; habeátque sibi circumpositum Funem Tractorium E P, quo Pondus P trahatur. Sitque Radius D B ad D E, ut *c* ad *b*; puta ut 4 ad 1. valebit igitur Vis in B, ad æqualem in E (per prop. 1. hujus) ut *c* ad *b*, seu 4 ad 1. Adeóque *Quadrans* in B, æquipollebit *Assi* in E. At (per modò ostensa) *Uncia* in A, æquipollet *Quadranti* in B. Ergo, *Uncia* in A, æquipollebit *Assi* in E, aut etiam (per prop. 18. Cap. 2.) in P. Adeóque *Vis Uncialis* in A, sustinebit *Pondus Assis* in P; eadémque Vis, tantillum aucta, movebit.

Vel, universaliter; propter C A ad C B, ut *b* ad *a*; vis V in A tantundem valebit atque $\frac{b}{a}V$ in B: Item, propter D B ad D E, ut *c* ad *b*; vis $\frac{b}{a}V$ in B (seu V in A) tantundem valebit atque $\frac{c}{b}\times\frac{b}{a}V$ $=\frac{c}{a}V$, in E. Hoc est, Vis in A, æquipollebit Ponderi in E vel P,

quod

quod ad illam sit in eâ ratione quæ componitur ex C A ad C B, & D B ad D E. Atque eodem modo procedendum erit quotcunque porro fuerint Rotæ invicem Commissæ.

Si verò Pondus illud non ex E directè dependeat, ut in P; sed, ut in Π, obliquo Plano F O incumbat: Pondus in Π, ad idem in P, in ea ratione ponderabit quâ est F I (perpendicularis æque-alta) ad F O; puta ut *c* ad *d*, seu 3 ad 4; (per prop. 21, vel 25. Cap. 2.) Adeóque cum vis V in A, æquipolleat Ponderi $\frac{c}{b} \times \frac{b}{a} V = \frac{c}{a} V$ seu 12 V, in P; eadem æquipollebit Ponderi $\frac{d}{c} \times \frac{c}{b} \times \frac{b}{a} V = \frac{d}{a} V$, seu 16 V, in Π. Hoc est, Ponderi quod ad eum sit in ratione quæ componitur ex A C ad C B, & BD ad D E, & O F ad F I.

Atque ad eandem formam, mutatis mutandis, in aliis casibus Calculo æstimanda est Vis in A, quæ Ponderi in P vel Π æquipolleat; (quæ itaque, tantillum aucta, Pondus movebit.) Quod faciendum erat.

SCHOLIUM.

§ 1. AD hanc formam de quibusvis Machinis, ex Tympanis dentatis confectis, fiet judicium; qualia sunt varia Automatum genera, aliáque instrumenta in usum passim adhibita. Et speciatim *Glossocomum* illud quod ex Heronis Alexandrini *Barulco* describit Pappus, Collectionum lib. 8. prop. 10. Et quæ sunt istiusmodi.

2. Hanc autem de *Rotulis* doctrinam priusquam dimittam; locus hic haud incommodus erit alias adhuc de Rotis speculationes subjungere; quæ quamquam hujus loci directè non sint, huc tamen quadantenus spectare non immeritò videantur.

3. Observatum est in usu communi (quod & Aristoteles attigit in Mechanicis Quæst. 9.) *majores Rotas, Cylindros, Tympana, Sphæras, &c. facilius moveri quam Minores.* Quod utut per omnia verum non sit (limitatione utique opus erit;) ritè tamen intellectum, concedi potest. Quippe, dummodo idem sit utrobique Pondus, (id utique manifestò interponendum erit) id non rarò videmus in Curruum Rotis, in Cylindris Sphærísve humi volutis, in Trochlearum Orbiculis, aliísque contingere. Saltem si & Axium siqui sint circa quos moventur, eadem sit utrobique magnitudo; aliáque quæ sunt Impedimentorum loco, sint utrobique æqualiter constituta. Nam nisi hæc ita sint, res omnino secus esse poterunt.

4. Ubi autem hoc contingit; si de causâ quæratur: quilibet fere proclivis est eam ex hac de Axe in Peritrochio doctrinâ assignare. Neque hoc prorsus incommodè; (quippe & huic considerationi locus erit:) Sed alia etiam in considerationem advocanda erunt, si res penitiùs inspiciatur. Quippe hæc de Axe in Peritrochio doctrina, non de Rotis separatis invicem comparandis agit; sed de duabus (pluribúsve) conjunctis, quarum motus alter ab altero dependet: & quidem ubi Agens secundum unam, Patiens secundum alteram, consideratur.

5. Ut igitur ad suum Principium res referatur; intelligatur primò Cylindrus ejusmodi (*Scytalen* vocat Aristoteles) qualem in Hortis (& alibi) ad complanandam terram volvendo solent adhibere: qualem (si manubrium demas) in fig. 260. exhibuimus. Ex hujusmodi Cylindris, Pondere æqualibus (& longitudine) Majorem faciliùs volvas (cæteris paribus) quàm minorem. Idémque de Rotis intellige; aliisve Tympanis, aut etiam Sphæris.

Fig. 265. 6. Sunto enim ejusmodi duo Cylindri, (vel, si mavis, duæ Rotæ; Sphæræve,) ut A B, $\alpha\beta$, in fig. 265. qui vel Trusione vel Tractione movendi sint, super B β plano.

Manifestum est, si nulla esset medii resistentia superanda; nullúmque à scabritie subjecti (super quo movetur) impedimentum, aut quod horum instar sit; pondus idem, ab eâdem Vi, eadem facilitate antrorsum propelli, aut retrorsum trahi; per prop. 22. Cap. 1.

7. Si autem Resistentiæ Aëris ratio habeatur: Manifestum est, Cylindrum (cæteris paribus) mole majorem, majori Aëris portioni obviam ire, unde major igitur erit Resistentia; & propterea Major Cylindrus difficiliùs movebitur: contra quam expectandum erat. (Quod in duobus Globulis, plumbeo putà & ligneo, ejusdem ponderis, per aerem missis, omnino obtinebit.) Adeóque hæc consideratio dissimulanda potiùs esset, quam in causæ partem advocanda. Sed tantilla potest hæc esse differentia, ut aliunde superari possit.

8. Si verò Subjecti (super quod movetur) Scabrities seu Asperitas in considerationem advocetur.

Dico, primò, hinc potissimum esse (si non solummodo,) quòd Rotunda præsertim corpora humi volvantur multo faciliùs quàm labantur vel possint sine volutione trahi. Cùm enim nullæ sint tam perfectè tersæ & glabræ Superficies, ut nihil prorsus asperitatis habeant, quâ se mutuò impediant detineántque: hinc fit, quòd Cylindrus A B, impeditus (contactu plani) ad partes B, sed non item ad partes A; quà potest expeditè, præceps fertur; (A celeriùs quàm B moto.)

moto.) Atque hoc continuè: Quod est, Volvi. Haud secus acsi Dentata Rota D B fig. 264. super Dentatâ superficie movenda esset: ubi ne labatur, impediunt impliciti dentes; (ut ad B videre est;) non item, ne volvatur. Id utique, nisi dentibus vel alterutris vel utrisque ruptis, fieri non potest: hoc potest; ne deserente quidem suum tramitem Centro C. Atque eadem ratio est asperitatum minutiorum utut minùs observabilis.

9. Idémque (ob eandem causam) in Curruum Rotis sufflaminatis videre est; quæ multò difficiliùs ita trahuntur renitentes, (rotæ ambitu, terræque superficie se mutuò radentibus,) quàm ubi circa axem volvuntur.

10. Fallor, an non ob eandem causam sit, quòd projecta in Aere volvantur etiam; nempe, quia pars aeris ea quæ projecti partibus inferioribus obviam fit, humilior sit adeóque pauxillo crassior, magísque propterea renitatur, quàm quæ superioribus.

11. Quamquam, & id etiam aliunde fieri possit; nempe ob impetum in projectione impressum. Cùm enim quæ ex Fundâ (verbi gratiâ) projiciuntur, circulari motu priùs lata fuerint, quàm relictâ fundâ per istius circuli tangentem procedant; projecti partes ab hujus circuli centro remotiores, majores propterea circumferentias eo motu descripserant, adeóque velocioris motûs conceperant impetum, quàm quæ propiores; qui quidem impetus inæquales, ubi ex peripheriâ ad rectam tangentem transitur, volutionem inchoant, (projecti centro per rectam procedente, partibúsque superioribus concitatiùs reliquis,) eadémque cepta, cum nihil impediat, perseverat, (per prop. 11. Cap. 1.) Intelligatur enim (ut Schemate rem exponam,) Fundâ C B A, versari A B projectile, circa C centrum motûs, in situm $\alpha\beta$; ibique desertâ fundâ, centro suo c (quod priùs arcum descripserat c κ) secundum rectam tangentem $\kappa\tau$ deinceps ferri. Cùm itaque majorem impetum conceperit A, per A α arcum majoris circuli delatum, quàm B per similem circuli minoris arcum B β: ubi ad parallelas rectas $\alpha\tau$, $\beta\tau$, perventum erit; impetus in α velocior quàm in β, volutionem protinus inchoabit, circa centrum κ; eadémque, non impedita, perseverabit: ut dictum est. Idémque, si non semper, non rarò tamen, in aliis projectionibus contingit. Fig. 268.

12. Quod autem facit in Cylindris, Rotis, Sphæris, &c. humi volutis, Asperitas Soli; idem facit in Trochlearum Orbiculis Asperitas Funis ductarii, ejúsque propterea cum Orbiculo cohæsio. Unde fit ut faciliùs cum Fune convertatur Orbiculus, quàm manente Orbiculo solus Funis ducatur. Quod & in aliis similibus conversionibus pariter obtinet.

13. Dico

Fig. 265. 13. Dico porro; ob eandem quam diximus superficierum Asperitatem esse, quòd Cylindri Rotæve aut Sphæræ mole majores, (sed pondere æquales;) faciliùs volvantur quàm minores.

14. Intelligantur enim in eandem asperitatem seu eminentiam P O impingere, A B Cylindrus (vel Rota seu Sphæra) major, atque $\alpha\beta$ minor: Quæ quidem eminentia P O (quò possint A B, $\alpha\beta$, procedere) vel superanda erit, vel deprimenda, vel propellenda.

Manifestum primò est, cùm sic impingit $\alpha\beta$, propiùs esse ad P punctum β; quam est punctum B, cum sic impingit A B. Si enim intelligeretur β in B; totus circulus minor (propter mutuum contactum in B) intra majorem esset; adeóque ad O non pertingeret; ut in fig. 267. (& minùs adhuc, si esset β ultra B.) Adeóque (quo superetur eminentia P O) Acclivior erit Ascensus (& propterea difficilior, per 25. Cap. 2.) à β ad O, quàm à B ad O. Et quidem illic per Circuli minoris Tangentem O τ; hic per Tangentem majoris O T.

15. Vel etiam sic idem aliàs colligitur. Facto O centro motûs, circa quod (quò superetur punctum O) rotandæ sint A B, $\alpha\beta$; seu, quod tantundem est (per prop. 16. Cap. 4.) eorundem Centra gravitatis C, γ; in peripheriis C c, $\gamma\varkappa$: eadem erit Obliquitas motus in punctis C, γ, quæ est Tangentium C T, $\gamma\tau$; (quæ quidem ipsis O T, O τ, parallelæ sunt.) Adeóque cum major sit Obliquitas in C T quàm in $\gamma\tau$; (propter angulum O $\gamma\beta$, majorem angulo O C B, ut mox videbitur;) etiam facilior Ascensus erit. Et quidem in ea ratione faciliùs movebitur C, quam γ, (hoc est, A B quam $\alpha\beta$,) quam habet Secans Anguli T C A hoc est C O V, vel T O P; ad Secantem Anguli $\tau\gamma\alpha$, hoc est γ O V, vel τ O P; (per prop. 25. Cap. 2.) hoc est (quippe hæc eadem est ratio) in reciproca ratione Co-sinuum, seu Sinuum Complementorum; (Nam Secantes Angulorum sunt Complementorum Sinibus proportionales: Nempe in fig. 42. ut F T ad F S, seu F V ad F O, hoc est F V ad F B, sic est F Q ad F R; ut ad prop. 14. Cap. 2. ostensum est:) hoc est, ut Sinus Anguli O $\gamma\beta$, vel O τ P; ad Sinum Anguli O C B, vel O T P. Quæ quidem nec eadem est cum ratione Diametrorum; neque eadem ubique ratio; sed alia atque alia pro variâ ipsius P O altitudine. Sed quò minor est altitudo P O, adeóque & minores anguli O C B, O $\gamma\beta$; eo minor hinc est inæqualitas: eademque, si consideretur P vel O in ipsis B β punctis, protinus evanescit.

16. Manifestum item est, Arcum β O majorem esse (proportione ad

ad suam peripheriam integram) quàm est (ad suam) B O. Quippe P O, hoc est B V, vel βv, sinus versus erit arcûs (proportione) majoris in circulo minore, quàm in majore. Adeóque (junctis C O, γ O,) major erit Obliquitatis Angulus $\beta \gamma$ O, quàm B C O. Et propterea, si depremenda sit P O eminentia; fortiùs ad hoc valebit Pondus idem Cylindri (Rotæve aut Sphæræ) majoris, prementis secundum rectam C O minùs Obliquam; quàm minoris, prementis secundum magis Obliquam rectam γ O: per prop. 21, vel 25. Cap. 2. (Quippe ibidem, quoad hoc, censendum erit Grave constitutum, ubi est ipsius Centrum gravitatis; per prop. 16. Cap. 4.) Non quidem in eâ ratione quæ est Diametrorum, (ut ubi de Axe in Peritrochio agitur) sed in eâ quam habet sinus Anguli C O V, ad sinum anguli γ O V, (per prop. 21. Cap. 2.) quæ alia atque alia erit, pro variâ altitudine rectæ P O, manente eâdem Diametrorum ratione. Sed inæqualitas continuò minor, prout P O propiùs est ad puncta B, β; atque, in his, protinus evanescit.

17. Estque hic forsan angulus B Ç O vel $\beta \gamma$ O, quem vult Aristoteles cùm dicit, *Angulum majori circuli, nutum quendam habere ad angulum circuli minoris:* (quod Interpretes alio trahunt; putà, ad Angulum Contactus, vel Angulum Semicirculi, &c. de quibus videantur Monantholius, Baldus, Guevara;) Nam & minor est angulus B C O quàm $\beta \gamma$ O, adeóque C directiùs imminet; & obliquior angulus O P quàm γ O P, adeóque C minùs offensat. Si verò de Angulo contactûs intelligeretur; plus offensaret rota vel sphæra major quam minor quia pluribus subjectis partibus simul incumbit Cylindrus seu Sphæra Materialis; ut post dicetur.

18. Sive igitur Superanda sit, sive Deprimenda, eminentia P O; (quorum, ut plurimum, vel alterum vel utrumque faciendum erit, quò volutio continuetur;) magis ad hoc valebit Cylindrus seu Rota major, cæteris paribus, quàm minor. Idque magis in eminentiis majoribus quàm in minoribus.

19. Sin abrumpenda esset eminentia P O, vel Propellenda: cùm hoc per pulsum lateralem faciendum sit, & potissimum in Horizontali recta, ut V O, secundum quam (vel huic parallelam) fit tractio horizontalis; (quæ magis hic spectanda est quam perpendicularis pressio;) id potiùs fiet per rectam γ O, (quæ à situ horizontali minùs recedit,) quàm per C O. Adeòque, hoc respectu, Cylindrus (vel Rota) minor, prævalebit majori. Verùm hoc in hujusmodi volutationibus rariùs contingit, & vix nisi in altioribus obstacùlis. Sed eminentiæ minores, vel deprimi solent, vel superari, potiús quàm propelli;

cui magis conducit (ut jam est demonstratum) major quàm minor Rota vel Cylindrus.

20. Sed & alia consideratio est, quæ Majori favet præ Minore: Nempe dum ab eminentiâ unâ ad alteram transitur, magis deprimitur minor quàm major Rota seu Cylindrus: Adeóque plus illi ascendendum erit (quoniam ex depressiore valle) quo secundam superet.

Fig. 266. Sunto enim (ut in fig. 266.) eminentiæ duæ, M N, & P O: quarum quum altera superata est sed nondum reliqua; manifestum est (propter majorem in arcu minoris circuli curvedinem) altiùs depressum iri β quàm B, (adeóque & Centrum γ quàm C, totúmque propterea Solidum;) Adeóque non modò Accliviorem sed & Altiorem ascensum habebit Cylindrus (vel Rota seu Sphæra) minor quàm major. Hic itaque faciliùs volvetur.

21. Huc accedit & alia ratio. Utut enim Circulus Mathematicus supponatur Planum in Puncto contingere; in Corpore tamen Physico res secus esse solet. Quippe Corpus grave deprimit gravitate suâ subjectam planitiem; & quidem plus minúsve pro majore vel minore pondere cæteris paribus. Intelligatur itaque Cylindrus seu Rota

Fig. 267. minor (fig. 267.) planitiem N V O deprimere usque ad B vel β. Necesse itaque est ut subjectæ materiæ tantundem deprimat seu loco suo pellat (quo sibi locum paret) quantum est Segmentum Q R B. Quò autem major eò penetret, tantundem deprimendum erit seu loco pellendum, quantum est segmentum N O B: quod segmento Q R B majus est. Hoc itaque ut fiat, majore Pondere opus erit. Ponitur autem utriusque Pondus æquale. Non igitur fiet. Non itaque tam altè penetrat Cylindrus seu Rota Major, quàm penetraverat minor: Adeóque & hoc nomine faciliùs volvetur.

Atque hactenus Cylindrum seu Rotam consideravimus ut Grave; pondere suo vel agens vel renitens: Atque eâ ratione Majorem facilius motum iri quam Minorem ostendimus: Et, quibus de causis id fiat.

22. Potest autem, seclusâ illâ Gravitatis consideratione, ut Vectis considerari; non quidem quatenus hoc ipsum Solidum, stante Obice; sursum movendum sit quò superetur obex, (quippe hac ratione considerandum erit ut Grave movendum;) sed quatenus amoliendus est

Fig. 265. Obex iste seu Obstaculum P O. Intelligatur enim (in fig. 265.) AB vectis, cujus fulcrum B; sitque Vis applicata sive in A, sive (ut in Cylindris plerumque fit) in C: & pondus movendum, seu Obex amoliendus, in V; non quidem immediatè, sed mediante rectâ inflexili V O. (Eadémque de α υ γ β, quæ de A C V B, intelligantur.)

Erit

erit igitur, (per prop. 2. Cap. præced.) ut A B vel C B, ad B V hoc est P O; sic Vis in A vel C, ad huic æqualem in V, vel O. Atque similiter, ut $\alpha\beta$ vel $\gamma\beta$, ad $\beta\upsilon$, hoc est P O; sic vis in α vel γ, ad eandem in υ vel O. Et consequenter (propter eosdem consequentes) ut A B vel C B, ad $\alpha\beta$ vel $\gamma\beta$; sic vis in A vel C, ad eandem in α vel γ applicatam. In eadem igitur ratione (nempe Diametrorum, vel Semidiametrorum,) facilius movebit vis eadem Cylindrum seu Rotam Majorem A B, quàm Minorem $\alpha\beta$; quantum ad amoliendum obicem P O. Atque hoc, ubicunque contigerit obstaculum P O; putà, sive propiùs sive remotiùs à puncto B, vel β.

23. Verum hîc nulla ratio habita est Ponderis in utrovis Cylindro, (nisi quod hujus ope puncta B, β, fixa sint tanquam ab Hypomochlio seu Fulcro, ne resiliant;) sed rectarum solummodo A B $\alpha\beta$, tanquam vectium nullius ponderis. Neque ad onus movendum, sed ad amoliendum obicem tantummodo spectatur. Sin spectetur Onus ipsum, quod tanquam in C vel γ constitutum (quæ centra gravitatis sunt) intelligendum erit: nihil hinc emolumenti habebitur. Quippe eadem utrobique ratio erit tum A B vel C B ad C B, tum $\alpha\beta$ vel $\gamma\beta$ ad $\gamma\beta$. Adeóque si Vectium A B, $\alpha\beta$, Fulcra intelligantur B, β, & Pondera movenda in C, γ; Vires autem vel in A, α, vel in C, γ: quæ Ponderi æquipolleat Vis utrobique vel dimidia vel æqualis erit.

24. Sin concipiatur A B vel $\alpha\beta$ ut Libra cujus Centrum motûs sit B vel β: Ad quam (utpote per Centrum transeuntem) quæ utrinque ponantur solidi partes æquiponderant; adeóque ipsa A B seu $\alpha\beta$ libra, in neutram partem præponderans, quantumvis parvo pondere (nisi quod medii resistentia, solíque inæqualitas quâ detinetur, impedirent,) in utramvis partem moveri posset: Vis applicata in A vel C, (utpote à Centro motûs remotior,) in eâdem ratione plus valebit, quam in α vel γ, qua sunt ipsæ A B vel C B longiores quam $\alpha\beta$ vel $\gamma\beta$: per prop. 12. Cap. 3. Ob quam rationem etiam ostendimus, longiorem Libram exactiorem esse; Schol. prop. 14. § 6. Atque ad hoc respexisse videtur Aristoteles quum eandem hic valere rationem dicit ob quam longiores Libræ sunt brevioribus exactiores. Fig. 267.

25. Estque hæc consideratio etiam Trochlearum Orbiculis communis; sed cum hoc discrimine: In Cylindris Sphærísque humi volutis, Obstacula seu Impedimenta motûs (ob soli asperitatem) sunt in ipsarum orbitis, putà prope B, β; quæ itaque pro Fulcro, seu Libræ motûsque Centro habentur; ut dictum est: Sed in Trochlearum Orbiculis, quorum ambitus ab offensionibus liberi sunt, motûs Impedimenta sunt ad Axem, circa quem immotum volvuntur Orbiculi; &

præsertim, in Orbiculis illis qui sunt in Trochlearum parte superiore, ad superiorem Axis partem super quam incumbit Orbiculus, moléque suâ & dependentis ponderis eam premit; ad partem verò Axis inferiorem (ob similem rationem) in Orbiculis illis qui sunt in Trochlearum parte inferiore. Quæ hinc oritur Frictio, impedit quò minus Orbiculus circa Axem suum expeditè volvatur.

26. Et quidem eò magis, quò Axis major est; propter majorem propterea frictionem. Quod quidem eatenus verum est, ut existimaverit Baldus ob hanc solam causam expeditiùs moveri Orbiculos majores quàm minores, quoniam Majorum Axes in minori ut plurimum sunt ratione ad Orbes suos quàm sunt Axes Minorum: quod si Diameter Axis ad Diametrum Orbiculi sit in eâdem ratione in majoribus atq; minoribus Orbiculis, nihilo facilius motum iri existimat majores quàm minores Trochlearum Orbiculos. Nempe, si intelligatur Orbiculi Centrum pro Vectis Fulcro, Viré́sque ad supremum diametri punctum applicatas, & Frictionem hanc seu adhæsionem pro Onere submovendo; in eâ ratione plus minúsve valebit, Vis ad Onus submovendum, quâ major est aut minor Semidiameter Orbiculi ad Axis Semidiametrum. Puta, Si sit, ut C B ad C A, fig. 269, sic (reciprocè) Vis in A, ad impedimentum à frictione ortum in B; Vis Impedimento æquipollebit, eadémque aucta præpollebit, adeoque movebit: Atque hoc perinde sive in majore sive in minore Orbiculo.

Fig. 269.

27. Quam quidem Demonstrationem ego admitto. Verùm hoc addo; Augmentum illud Virium quicquid sit quod supra Æquipollentiam accedit, plus valiturum in Radio majore quàm in minore; utpote ad Libram in majori à Centro motus distantiâ applicatum. Ut modò ostensum est, ex Cap. 3. prop. 12. & Schol. prop. 14. ejusdem.

28. Eadémque Frictionis consideratio quæ ad Axem fit, (præter eam quam ante consideravimus Soli Asperitatem,) in Plaustrorum Curruúmve Rotis non minùs locum habet quàm in Trochlearum Orbiculis. Nam Axium extrema quæ Rotarum Modiolis immittuntur, onere pressa, ita premunt foraminum imo, ut non possit sine Frictione converti Rota circa Axem suum, in parte præsertim inferiori. (Quam causam assignat Aristoteles, Mechan. Quest. 11. *Cur super Scytalas,* quales R, S, fig. 258. nos (*Rollers* vocamus) *faciliùs gestantur onera, quàm super currus*; nempe ob evitatam axis frictionem. Et quidem ad Axem majorem major erit Frictio, majúsque ex Frictione Impedimentum. Eáque Frictio majorem quæ æquipolleat vim postulat, ubi major est Diametri Axis ad Diametrum Rotæ ratio; ob eandem causam

ſam quam in Trochlearum Orbiculis jam oſtendimus. Quódque ſupra æquipollentiam accedit virium Augmentum, perinde in majoribus Rotis, atque in majoribus Trochlearum Orbiculis, plus valebit quàm in minoribus; atque ob eandem cauſam.

29. Neque huic adverſatur, quòd Trochlearum Axes fixi maneant, Axes Rotarum promoveantur. Quippe, dummodo Centrum Converſionis (quem motum ſolummodo hic conſideramus) in Axe ſit; perinde eſt ſive manente Solo promoveatur Axis (ut in Plauſtrorum Rotis;) ſive (ut in Trochlearum Orbiculis) manente Axe ducatur Funis tractorius; ſive etiam utrumque fiat. Quæque de Rotarum Axibus dicta ſunt; eadem etiam Cylindris aliiſve facilè accommodantur, ubi tractiones per Axes fiunt.

30. Supereſt adhuc alia ratio, etiam à Frictionis hujus conſideratione petita, quæ majoribus Rotis (Cylindris, Tympanis, Orbiculis, Sphæris, &c.) præ minoribus favet. Poſitâ nempe eâdem utrobique axis magnitudine; quod ex Frictione oritur Impedimentum, non modò difficiliùs in Rotâ minore ſuperatur (ob cauſam jam traditam;) ſed & hoc ſæpiùs repetendum erit. Cum enim tantundem tractione promoveri ſoleat Axis in unâ Rotæ converſione quantum ipſius Rotæ ambitum proximè æquet; ſæpiùs eodem tractu converti oportebit Rotam minorem quàm majorem, totámque integræ converſionis frictionem ſæpiùs repeti: & quidem in eâdem ratione ſæpiùs quâ minor eſt rotæ ambitus. Et propterea, ob frictionem ſæpiùs repetendam, difficiliùs movebitur Rota minor.

31. Atque hinc eſt quod Plauſtrorum Curruúmque Rotæ & Axes anteriores (cùm minores eſſe ſoleant) citiùs terantur, ſæpiúſque reparari debeant, quàm majores. (Cui tamen nonnihil conferre poteſt, quòd cùm Axis prior minùs Altus ſit quàm poſterior, ideo magis premitur, cæteris paribus, ab onere quod utrique incumbit. Ob eaſdem cauſas quas Cap. præced. aſſignavimus, cur duobus Fulcris inæqualiter altis incumbens Vectis, depreſſius magis premat.) Eadémque Trochlearum Orbiculis facilè accommodantur: quippe, dum tantundem elevatur pondus, ſæpiús convertendus erit Orbiculus minor, cæteris paribus, quàm major; adeóque & difficiliùs.

32. Atque hactenus de Cylindrorum, Rotarum, Tympanorum, Sphærarum, &c. converſionibus egimus, tum cur fiant, tum cur in Majoribus faciliùs fiant quàm in Minoribus, cæteris paribus. Quorum utriuſque cauſas conjecimus in ſuperficierum Aſperitatem, atque hinc ortam Cohæſionem; ſive quâ cum Solo (aut quod hujus inſtar eſt) cohæret Orbita exterior; ſive quâ cohæret Axis cum eo cui immittitur

mittitur Foramine. Quippe si nihil horum esset; nihil est cur tracta Rota non rectà procederet absque volutatione, Funísque ductorius immotus Trochlearum Orbiculos præterlaberetur, atque in reliquis similiter. Et quidem, nisi hoc esset, (nec impediret medii resistentia) Rotam quantumvis gravem, Vis quantumvis exigua, in situ Horizontali, vel traheret vel propelleret: in situ vero Declivi, etiam nullâ Vi adhibitâ, ferretur sponte suâ: in Acclivi verò, eâ saltem Vi quam postulat tracti Pondus cum Acclivitatis gradu comparatum; (per ea quæ tradimus Cap. 2. prop. 27.) nullâ habitâ ratione vel Magnitudinis vel Figuræ; nullâque volutatione superadditâ.

Fig. 270. 33. Restat alia non obsimilis Quæstio; nempe, *Cur Plaustrorum Curruúmve Rotæ Anteriores sint Posterioribus Minores*; atque cui bono hoc sit.

Videri fortè possit nonnullis, id fieri propter Declivem Plaustri positionem; quasi cùm B rota præcedens humilior sit quàm sequens A, Plaustrum per A B rectam descendere proclive sit. Atque hoc quidem valeret, si, manentibus A B rotis, labi oporteret Plaustrum secundùm A C B rectam. Quippe tum deorsum ferretur C Centrum, totúmque Grave; fierétque Centro terræ propius. Verùm ut jam se res habet, omnino secùs est. Cùm enim simul ferendum sit Plaustrum cum Rotis, putà à situ A C B in situm $\alpha\gamma\beta$, (Centro-gravitatis C describente rectam Horizontalem $C\gamma$,) nullus hoc motu acquiritur Descensus, adeóque nulla est ad illum propter Gravitatem propensio: per prop. 9. Cap. 2. vel prop. 16. Cap. 4.

34. Aliunde igitur petenda est ratio. Et quidem, quantum ad Rotarum posteriorum altitudinem, res ex antè dictis jam satis patet. Quoniam (præterquam quòd hac ratione Plaustrum altiùs ex luto elevatur) Majores Rotæ facilius moventur quàm minores; ob rationes jam traditas.

35. Quòd verò Anteriores Rotæ minùs Altæ sint, duæ saltem sunt causæ. Prima est, quoniam, cùm propter viarum flexus Plaustra sint sæpenumerò nunc dextrorsum nunc sinistrorsum ducenda; huic conducit multùm anteriorum Rotarum parvitas; Quippe si anteriores eâdem essent magnitudine cum posterioribus, incommodè admodum fierent ejusmodi flexiones, & nonnisi magno circuitu facto. Quod vel Aurigæ, experimento docti, testabuntur: ipsáque Plaustrorum inspectio satis docebit.

36. Altera paulò altiùs petenda est. Considerandum itaque est, Lora, quæ Plaustrum Equis alligant, affixa esse (saltem mediatè) ad

Axem

Axem anteriorem ejúsve Capita; saltem non inferiùs quàm sit Axis ille. Cúmque Applicationum puncta virium ad Pondus ibidem censenda sint: si Axis ille tam altus sit quàm Pectus Equi; linea tractûs (secundum quam Vis applicatur) putà B D, Horizontalis esset. Et propterea, dum per planum Horizontale trahatur Plaustrum, erit ea virium Directa Applicatio, (cùm eadem sit *Directio Moventis* seu Virium Applicatarum, & *Directio Motûs.*) Sed quoniam non ita complanatæ sint Viæ, quin subinde superandi sint Montes, & Colles, variæque Asperitates & Eminentiæ, (ut T O, vel P O;) quod nisi per acclivem Ascensum fieri non potest: ubi hoc contingit, Directa Applicatio non ea est quæ est Horizonti T P parallela; sed quæ est parallela Acclivitati T O. Cùm itaque præter tractum Horizontalem, huic etiam casui prospiciendum sit; ídque eò magis, quoniam Pondus per Acclive difficiliùs trahitur quàm per Planitiem, Commodum igitur deprehensum est ut Axis anterior, depressior sit quàm Pectus Equi; quò B D recta (secundum quam Vis applicatur) sit parallela potiùs Acclivitati T O; (saltem, ut propiùs ad parallelismum accedat quàm si tam altus esset Axis quàm Pectus Equi, nedum eo superior.) Sic utique directiùs eò loci Vis applicabitur, ubi plus opus est Virium; neque Attrahendum tantummodo, sed Attollendum pondus erit, seu Elevandum. Atque hoc eo magis faciendum est, ubi per tesqua & salebras, viásque inæqualiter asperas, quàm ubi per Planitiem trahendum est Plaustrum. Fig. 271.

37. Atque ad hunc etiam locum spectare poterit, ut reddatur ratio, cur quæ declivi plano incumbunt Gravia, si Rotunda sint, descendendo Volvi soleant; Labi verò, si planis terminentur: atque illa faciliùs quam hæc moveri. Fig. 272.

38. Intelligatur enim Q grave declivi plano incumbens, superficie suâ planâ A B: sitque à sui Centro Gravitatis perpendicularis ad declive planum Q R, ad Centrum Terræ Q P, declivi plano occurrens supra B. Manifestum est (ex Schematis inspectu) non posse deorsum Volvi Q grave; nisi, facto B Centro motûs, radio B Q describatur peripheria, cujus supremum punctum erit S in rectâ B S ipsi P Q parallelâ seu ad Horizontem rectâ; & Centrum gravitatis Q per Q S arcum continuò ascendere; per prop. 20. Cap. 2. Et (ascendente Centro gravitatis) ascendere ipsum grave, per prop. 16. Cap. 4. Non igitur ob Gravitatem Volvetur circa B punctum permanens. Labi verò potest, (lato Q Centro in rectâ ipsi AB parallelâ,) quoniam sic labendo descendet Q. Et quidem actu labetur, si tanta sit in eâ declivitate

Gravitatis Vis ut superare possit impedimentum (de quo suprà aliquoties dictum) ex cohærentiâ, indeque ortâ Frictione.

39. Si verò, ut in Gravi T, recta à sui Centro Gravitatis ad terræ centrum T P, declivi plano occurrat infra B: Volvendo descendet (& quidem potiùs quàm Labendo, ob vitatam frictionem.) Quoniam peripheriæ Centro B, radio B T, describendæ, supremum punctum S erit in B S rectâ, ipsi P T parallela; arcúsque S T descendens: (per prop. 20. Cap. 2.) adeóque præcipitabitur Grave T. Saltem nisi declivitas plani A B, seu rectæ huic parallelæ à T labente describendæ, tanta sit, ut gravitatis Vis in illâ declivitate eo excessu superet impedimentum à frictione ortum, ut excessus hic præpolleat Vi Gravitatis in eâ declivitate quam habet arcûs S T in puncto T; hoc est, (per prop. 15. Cap. 2.) quam habet Recta arcum in T puncto contingens.

40. Si B & P coincidunt; perinde est ad utrumvis casum referas. Volvetur autem, non Labetur; ob Frictionem Impedientem.

41. Sin grave, ut V, Sphæricum sit; (seu quod hujus instar est;) propter idem punctum A B, recta V P (ad horizontem recta) declivi plano infra B semper occurret; sed & Declivitas Centri V Volventis (propter B V declivi plano rectam) eadem erit atque V Labentis. Volvendo igitur (ob sic vitatam frictionem) non Labendo descendet.

42. Quódque faciliùs moveatur V quàm Q; manifestum item est. Quoniam, cùm eadem sit Declivitatis Volventis V, atque Labentis Q; sitque in Q (cùm non possit nisi Labendo descendere) superandum Impedimentum à Frictione ortum, sed non item in V: faciliùs movebitur (cæteris paribus) V quàm Q.

43. Sed & faciliùs quàm T: propter Declivitatem Volventis V (eandem utique quæ est declivis plani) majorem quàm Volventis T.

44. Intellige; Nisi angulus T B P; vel Rectus sit, (coincidentibus R B;) quo casu eadem erit Volventis T, atque Volventis V, declivitas: vel Acutus, (R infra B cadente) quo casu major erit Declivitas Volventis T, quàm volventis V; adeoque & faciliùs volvetur T quàm V.



CAP. VIII.

De Trochlea, seu Polyspasto.

DEFINITIO.

Ex Orbiculis (uno vel pluribus) aptè dispositis, circa axes suos volubilibus, quibus circumpositus Funis Ductarius pondus attrahit (seu quod tantundem est) compositum Instrumentum, Trochleam *appellant.*

A Τρέχω, τροχὸς, τροχαλὸς, descendunt τροχάλειον, τροχαλία, τροχιλία, τροχιλαία (quâ voce utitur Aristoteles in Mechanicis) ejusdem fere significatûs omnia; atque hinc Latinorum *Trochlea.* Pappo πολύσπαστον dicitur à multiplici tractione. Nostri (à *pull* vello) *Pulley* appellant.

PROP. I.

Si Trochleæ Orbiculus singularis sit, & loco suo fixus; Vis Funi ductario applicata, Ponderi seu Impedimento amovendo æqualis, æquipollet: Adeóque sustinebit, atque aucta movebit, minuta verò ne sustinebit quidem.

Putà, si Orbiculo CA, circa Centrum seu Axem C volubili, ex Unco dependenti (aliásve sic fixo ut inde non amoveatur,) circumponatur Funis ductarius VAP, cui applicetur Vis in V, Pondus in P: Manifestum est, (nisi solvatur, rumpatur, extendatur funis, aliúdve Fig. 273.

accidat

accidat simile, quod non supponimus,) quantum funis extremum V Vi trahitur secundum directionem suam, tantundem ascensurum extremum P cum annexo Pondere contra suam. Et propterea (per prop. 7. Cap. 2.) si æqualia sint Vis & Pondus æquipollebunt; sin secus, præpollebit quod majus est. Unde constat propositum, per prop. 11, 12. Cap. 1.

SCHOLIUM.

Fig. 273. INtelligitur hæc propositio (ut & sequentes, quod moneo ne idem sæpius sit repetendum,) potissimùm de Gravi directè dependente, ut P: Ubi scilicet Vis & Pondus agunt ut Vires contrariæ, (juxta prop. 12. Cap. 1.) Si verò Grave, ut π, situ Obliquo ferendum sit: Minuetur Ponderatio pro gradu declivitatis, (juxta prop. 19. Cap. 2.) Atque de Pondere sic minuto procedit propositio. Si verò pondus P movendum Humi jaceat, aut (ut in p) tractu horizontali ducendum sit, (ubi impedimentum ex scabritie ortum solummodo superandum sit,) vel Obex aliquis amoliendus sit, aliúdve Obstaculum quod Impedimenti tantùm rationem habeat, non Vis contrariæ; Vi sustentrice in V non opus erit (cum Onus illud intelligatur vel non niti in contrarium, vel ne eò feratur aliunde sustineri:) sed, quò moveatur, non minùs requiritur, Vis æquipollente major. Aliáque ejusmodi sic intelligenda erunt ut in Capite præcedente.

Orbiculorum verò usus in Trochleis adhibetur, non tam propter rationem aliquam purè Mathematicam, quàm propter rationem Physicam; ob corporum scabritiem. Quippe si tum Orbiculi tum Funis ductarii superficies essent tam Mathematicè Politæ ut nulla foret ad invicem adhæsio; quin posset Funis tam expeditè labi, quàm Orbiculus converti: Demonstratio non minùs procederet de C A Orbiculo (alióve duro corpore) permanente, quàm circa C converso. Cùm verò (ut ad Cap. præced. ostensum est) hæc corporum Frictio, seu Abrasio mutua, impedimento sit ne expeditè moveatur Funis; sit que hæc major futura si in A permanentem fieret, quàm si circa axem C exiguum; (ob rationes in Cap. præced. ostensas:) hinc est, quòd Orbiculorum usus sit ad motum expeditè faciendum apprimè utilis.

Manifestum item est, ob hujusmodi Orbiculum singularem, loco suo fixum, (intellige, ita ut inde non amoveatur, utut inibi circa axem volvatur;) sed neque ob plures sic fixos, (ut post dicetur, & quidem ob eandem rationem;) nullam in V virium requisitarum minutionem inferri: cum Vis eadem in F, non minùs quàm in V, si ponderi æqua-

lis sit, sustinebit; si major, movebit.) Potest tamen ob causas alias usui esse hic Orbiculus. Quippe fieri potest, ubi Vis Humana (verbi gratiâ) applicanda sit, ut, propter commodiorem corporis situm, vis ea possit fortius exeri in V quàm in F: Vel etiam, in V, non modò vis nervorum (quæ sola poterit in F applicari) sed ipsum Pondus humani corporis applicari ad contrarium Pondus in P tollendum: Vel denique ob alias circumstantias, (quæ præsenti considerationi omnino sunt extrinsecæ, nec possunt facilè numerari,) non parum adjumenti poterit accedere.

Quod autem Orbiculorum magnitudinem aut parvitatem spectat; ex Scholio propositionis ultimæ Capitis præcedentis petendum est.

PROP. II.

Si Trochleæ Orbiculus singularis, Ponderi conjunctus sit, & cum eo trahendus; eíque circumpositi Funis ductarii extremum alterum Unco (vel aliàs) fixum sit, alteri Vis Motrix applicetur: Æquipollebit Ponderi (seu Impedimento amovendo) Vis *Dimidia* (directè applicata:) adeóque sustinebit; atque aucta movebit; minuta verò ne sustinebit quidem.

Cum enim, Ascendente Orbiculo, ejúsve Centro C, (unà cum annexo Pondere,) tantundem ascendat T punctum contactûs Orbiculi Funísque VT, atque ob eam rationem tantundem promoveatur secundum directionem suam Vis motrix V: Sed & tantundem ascendat punctum contactûs Orbiculi ejusdem cum fune pensili HF (ab F puncto fixo ad orbiculum in H pertingente,) & propterea tantundem abbrevietur funis FH; quantum autem funi FH ita demitur, tantundem vertente Orbiculo transferatur ad funem TV, qui propterea tantundem prolongatur: Hinc fit, quod Ascensus puncti V, (seu promotio Vis motricis secundum directionem suam,) Duplus sit ascensûs Centri C, ponderísve P. Quippe tantundem promovetur V propter ascensum puncti T; atque secundâ vice tantundem propter prolongatam TV rectam. Sed Ponderis P Ascensui, æquipollet Vis Dimidiæ Ascensio Dupla; per prop. 5. Cap. 2. Ponderi itaque in P æquipollebit Vis Dimidia Fig. 274.
in

in V. Adeoque (per prop. 11, 12. Cap. 1.) sustinebit, & aucta movebit, minuta verò nequidem sustinebit.

SCHOLIUM.

NOtandum hic est, (præter ea quæ ad prop. præced. monuimus,) Ubi *Vim directè applicandam* dicimus; quò hoc fiat, requiri (illud utique hoc loco intellectum volumus) ut rectæ V T, F H, sint Fig. 275. ipsi C P (directioni mobilis) parallelæ. Quippe, si parallelæ non sint; erit, pro obliquitate diversâ, alia atque alia ratio tum tractionis secundum rectam T V, tum contractionis rectæ H T, ad ascensum C vel P: Et quidem (manentibus F V Punctis per quæ transeat funis) prout altiùs attollitur C vel P, Obliquitas ea continuò variatur. Verùm ea consideratio non tam hujus loci est, quàm ad Caput secundum spectat, ubi de motum Obliquitatibus agitur. In Trochleis enim Chordæ vel parallelæ esse solent, vel tantillum à parallelismo declinare ut pro parallelis habeantur.

PROP. III.

Si Trochleæ Orbiculi plures sint; Calculo æstimabitur, ex Orbiculorum positione, quanta Vis exposito Ponderi æquipolleat; quæ & aucta movebit.

Nempe; Vis ea quæ est ad Pondus in reciprocâ ratione istius quam habet Virium in V Promotio ad Ascensum Ponderis in P.

Hoc est; in fig. 276. Vis ad Pondus, ut 1 ad 2, 4, 8, 16, &c. (Geometricè proportionales) prout Orbiculorum numerus est 1, 2, 3, 4, &c.

In fig. 277, 278. (ubi Funis ductarius terminatur in puncto fixo, ut M.) Vis ad Pondus, ut 1 ad 2, 4, 6, 8, &c. prout Orbiculorum infrà positorum (cum Pondere tollendorum) numerus est 1, 2, 3, 4, &c.

In fig. 279. (ubi ductarii Funis extremum cum Pondere trahendo connectitur ut in K,) Vis ad Pondus, ut 1 ad

1, 3, 5, 7, &c. prout numerus Orbiculorum infrà positorum est 0, 1, 2, 3, &c.

Casus I.

Nam, in Fig. 276. (per prop. 2. hujus) Vis in V æquipollet ejusdem duplo in A: Item, Vis in A, hujus duplo in B: Et Vis in B, ejusdem duplo in C vel P. Atque sic porro quotcunque fuerint Orbiculi. Putà, Si Vis in V dicatur *V*; tantundem valebit, atque 2 *V* in A; vel 4 *V* in B; vel 8 *V* in C vel P: (Atque sic porro quousque opus fuerit.) Hoc est, Vis in V, æquipollebit Ponderi in P, quod ad eam sit in rationis duplæ ratione toties multiplicatâ quot sunt Orbiculi: Nempe, in ratione Duplâ, Quadruplâ, Octuplâ, Sedecuplâ, &c. prout numerus Orbiculorum sit, 1, 2, 3, 4, &c. Fig. 276.

Casus II, & III.

In Fig. 277, 278, 279. ubi Funis Ductarius V A B C, &c. singulos Orbiculos circundans pertingit ad V punctum applicationis Virium: Si intelligatur Pondus pendere ex B (continuato fune A B ad Pondus P vel O P Q, ibíque terminato,) Vis æquipollens in V vel A ad Pondus P erit ut 1 ad 1, per prop. 1. hujus. Fig. 277, 278, 279.

Si A B orbiculum B C (ex quo dependeat Pondus) circumiens figatur in D; erit (per prop. 2. hujus.) Vis in V vel A ad Pondus P, ut 1 ad 2; eò quòd, elevato Orbiculo B C (cum appenso pondere,) tantundem abbreviatur utraque rectarum A B, C D; quantum autem utrique demitur, tantundem per A transit ad V; ut sit virium Promotio, Dupla ascensionis Ponderis. Idémque accideret, si funis V A B C D, orbiculum D E circumiens pertingeret ad F ibíque figeretur; (non quidem ad Pondus quod sublevandum est, sed ad clavum aliquem seu palum fixum:) Cùm enim, propter F punctum fixum, recta F E neutiquam abbreviaretur, nihilque inde transiret ad D; perinde est ad Vires in V vel A; sive in F vel E figatur funis, sive in D.

Si verò Funis V A B C D E F continuatus, cum Pondere connectatur in F (ut simul cum pondere punctum F elevetur:) propter rectas tres A B, C D, E F, tantundem abbreviatas singulas quantum est Ascensus Ponderis; omniúmque abbreviationes per A ad V translatas; vel (quod eodem recidit) si abesset orbiculus V A, ultra A protractas; erit Virium Promotio ad Ascensum Ponderis, ut 3 ad 1: adeóque Vis ad Pondus, ut 1 ad 3. per prop. 5. Cap. 2.

Similiter ostendetur; continuato fune VABCDEFG ad H, ibique fixo, Vim ad Pondus (propter abbreviatas quatuor rectas AB, CD, EF, GH,) esse ut 1 ad 4. Et, continuato per I ad K, ibique cum Pondere connexo; ut 1 ad 5. Et, continuato per L ad M: ut 1 ad 6. Atque sic porro prout opus erit. Et quidem, quoties funis extremum cum Pondere connexum est, (ut ad K;) ut 1 ad numerum imparem; quoties extrà figitur (ut ad M,) ut 1 ad numerum parem.

SCHOLIUM.

NOtandum hic est; Chordas omnes seu Rectas abbreviandas, ut AB, CD, EF, GH, IK, LM, &c. tanquam Parallelas habitas esse. Et quanquam in Trochleis non raro contingat, (ut in fig. 278, 279.) ut à Parallelismo nonnihil recedant; eo quòd Orbiculi inæquales esse soleant, quoniam si invicem æquales essent coinciderent Chordæ séque invicem impedirent: tantillum tamen illud est, ut negligi soleat.

Notandum item, Orbiculos superiores, loco suo fixos esse; (quique ad hos, aut horum syntagma, alligatur funis, perinde est acsi ad clavum extrà positum figeretur:) Inferiores autem (eorúmque syntagma) cum Pondere connexos esse, & juxta cum illo attrahi. Ab horum itaque, non ab illorum, numero determinatur Virium Potentia.

Trochlea fig. 278. tantundem valet cum illâ fig. 277. sed ad formam commodiorem redacta; & quæ ad praxin adhiberi solet.

PROP. IV.

Trochleam ita construere, ut Pondus sit ad Vim æquipollentem, in datâ Multiplorum ratione.

Fig. 278, 279. SI data Multiplorum ratio à numero *Pari* denominetur, (ut Dupla, Quadrupla, Sextupla, &c.) Funis ductarii extremum remotius, extrà figatur (putà ad Uncum, Clavum, Palúmve, aut quiddam simile:) Si à numero Impari; (ut Tripla, Quintupla, &c. aut etiam Simpla:) cum Pondere trahendo connectatur: Totidémque adhibeantur Orbiculi quot innuit præcedens Propositio. Et fiet quod imperatum est. Per ibidem demonstrata.

SCHOLIUM.

POssunt autem Trochleæ, non tantum supernè & situ perpendiculari suspendi, utì cùm ad Pondera sursum tollenda adhibentur: sed etiam ad Tractionem Horizontalem, seu in alio quocunque situ positam; aut etiam ad amovendum Obstaculum adhiberi. Possuntque non modò seorsim, sed & conjunctim cum aliis Organis usurpari. (Ut, ad fig. 258. junctim cum ergatâ.) Potéstque horum Organorum tum singulorum seorsim (pro suâ cujusque naturâ,) tum simul junctorum, Potentia calculo æstimari. Fig. 258.

Exempli gratiâ. Propter interpositam Ergatam inter A & P, facilitatur Tractio Ponderis in P, (seu augetur valor Virium in A,) in ratione C A ad C B; putà, ut 3 ad 1; adeóque Vis in A ut 1, æquipollebit Ponderi in P ut 3. Item, propter interpositam Trochleam inter P & Π, (cujus Chordæ abbreviandæ sint, verbi gratia, quatuor,) facilitatur porro Tractio Ponderis Π, ut 4 ad 1, respectu Virium in P; adeóque Vis in P ut 1, æquipollebit Ponderi in Π ut 4; seu Vis ut 3, Ponderi ut 12. Ergo, propter utramque interpositam inter A & Π, facilitatur Tractio Ponderis in Π respectu Virium in A, in ratione ($3 \times 4 =$) 12 ad 1: adeóque Vis in A ut 1, æquipollebit Ponderi in Π ut 12. Sed & porro, facilitatur Ponderis Q tractio, propter subjectas Scytalas sive Palangas R, S, (sive Rotulas habeat capitibus adjunctas ut R, sive non habeant ut S,) ob minorem exinde frictionem quam si humi traheretur: At, in quâ ratione sic facilitatur, non ita facile est hìc determinare; utpote quod dependeat à variis materiæ circumstantiis Physicis; putà, tum Humi, tum Scytalarum, tum Ponderis his proximè incumbentis, Duritie, Lævore, aliísque ejusmodi, quæ prout magis minúsve ad fuerint, plus minúsve facilitant tractionem.

Atque ad eandem formam (mutatis mutandis prout cujus Organi natura postulat) in aliis conjunctis Organis Potentia calculo æstimabitur.

CAP.



CAP. IX.

De Cochleâ.

DEFINITIONES.

DEF. I.

Si, in Cylindri Recti superficie, intelligatur Recta, basi insistens, circa Axem ferri, motu æquabili: Atque interim, per longitudinem istius rectæ Punctum moveri, motu item æquabili: Quæ à Puncto sic moto describitur Curva, vocatur Helix (*sive* Spiralis) circa Cylindrum; *Rectum, intellige.*

Angulúmque quem facit hæc Curva cum Base Cylindri; Angulum Inclinationis *appellamus: Et, quem facit cum Latere Cylindri, Angulum* Obliquitatis.

Fig. 280. Putà; Si circa Cylindrum rectum AB$\beta\alpha$, cujus basis ABB, feratur (in superficie Cylindri) recta Aα in situm Bβ, atque sic porro; (ut cum describitur Superficies Cylindrica;) motu æquabili: Atque in eâ rectâ, sic motâ, feratur A punctum versùs α; hoc est, à B versùs β; putà, ad H; motu item æquabili: Adeóque, quâ ratione crescant AB, AB, eâdem crescant BH, BH, ubique: Curva AHH, est *Helix* sive Spiralis *circa Cylindrum*; intellige, Rectum. Angulúmque HAB, vocamus *Angulum Inclinationis*; & AHB, *Angulum Obliquitatis.*

Cylindrum autem *Rectum* innuimus; non quòd circa Cylindros alios non possit describi *Spiralis*: Sed quòd ea, quæ nobis hic usui est futura, illa sit quæ circa Rectum describitur. Et quidem, ut *Cylindrus* prout

prout in Elementis definitur, est *Cylindrus Rectus*, (Scalenis enim non convenit ea definitio;) sic & *Spiralis circa Cylindrum*, speciatim solet intelligi de eâ quæ est circa Cylindrum *Rectum*.

Helix autem seu *Helice*, (ἕλιξ, ἑλικὴ, ab ἑλίσσω *volvo*,) Latinè *Spiralis* dici solet, à *Spira*, σπεῖρα, atque hoc à σπείρω *necto*: & *Torsionem* innuit, qualem in Funibus videmus.

II.

Cylindrum Rectum, Helicè *similiter sulcatum*, Cochleam *appellant. Et quidem* Cochleam Marem, *seu Interiorem*, *si sic sulcata superficies Cylindrica* Convexa *sit*: Fœminam, *seu exteriorem*, *si* Concava; *Hoc est, si Solidi cylindricè excavati superficies Concava sic sulcata fuerit.*

Dicitur autem *Cochlea* Latinè, Græcè Κοχλίας, ob *Limacis* (sic item dicti) aliorúmque ejusmodi Testaceorum similitudinem. Nostri *Screw*, Galli *Vis*, appellant. Fig. 282, 283.

Potissimum adhiberi solent Cochleæ, obicibus propellendis, frangendis, aut duriùs comprimendis, aliísque motibus Trusione factis. Atque in eum finem, Mas Fœminæ, hoc est Interior Exteriori intrudi.

Solétque forinsecus adhiberi Manubrium (aut quod hujus instar est) ut in Ergatis, aliísque similibus Instrumentis: Adeóque Potentia, Axis in Peritrochio, cum hæc Cochleæ conjungi.

PRO-



PROPOSITIONES.

PROP. I.

Helix circa Cylindrum Rectum, est Curva Similaris, seu Uniformis. Intellige; cujus pars quælibet cuilibet (æquali sumptæ) congruat.

Eadémque, si intelligatur in Planum expandi Superficies Cylindrica, fiet Linea Recta: (aut plures Rectæ.) Idémque, qui priùs erant, manebunt, tum Inclinationis, tum Obliquitatis, Anguli.

Fig. 280. Sumptâ enim (verbi gratiâ) arcui A B, æquali B B, hoc est H b; erit (propter A B ad A B, ut H B ad H B) etiam (dividendo) ut A B ad B B, sic recta H B (hoc est recta H b) ad rectam b H. Adeoque (propter æquales angulos H B A, H B A,) si intelligatur arcus H b, arcui A B (simili & æquali) applicari, congruent; adeóque b H ipsi B H; atque hoc ubique. Et propterea H H, ipsi A H; pars quælibet cuilibet æquali. Quod demonstrandum erat.

Fig. 281. Item; si (expansâ in Planum superficie Cylindricâ) intelligatur arcus A B B fig. 280. in rectam A B B fig. 281. extendi; cui applicentur, ut prius B H, B H rectæ: Cum sit ubique, ut A B ad A B, sic B H ad B H; adeóque A B H, A B H, similia Triangula; erit A H H Linea Recta: Aut etiam, (si dissectâ secundum longitudinem superficie Cylindricâ, secetur etiam Helix,) Rectæ plures. Quod itidem demonstrandum erat,

Cúmque eadem omnino sit superficies A B H plana fig. 281. atque A B H curva fig. 280. nisi quòd hic in singulis A B rectis parallelis fiat flexio; quæ Angulos H A B, A H B, neutiquam immutat: Iidem qui priùs erant manebunt tum Inclinationis, tum Obliquitatis Anguli. Quod erat ultimò demonstrandum.

SCHOLIUM.

SCHOLIUM.

AFfectionum harum, posteriores duæ, etiam Spiralibus circa Cylindros Scalenos conveniunt; aut etiam circa solidum Prismaticum quodvis: quod ex demonstratione satis patet. Nempe si intelligatur A B B, non quidem Cylindri basis circularis, sed planum Ellipticum quod ad Latus seu Axem Cylindri Rectum sit: Aut, in solido quovis alio Prismatico, Planum quodcunque fuerit quod ad Axem ejus, Latúsve, Rectum sit: Sítque ut A B ad A B, sic respectivè B H ad B H, ubique.

Sed non item Prima; quæ præter Circuli Peripheriam, atque huic circa Cylindrum Rectum Helici, nulli ex lineis Curvis convenit.

Sed neque ita intelligendum est, quasi circa Cylindrum Rectum Helix quælibet cuilibet congrueret; (nam neque Circuli Peripheria quælibet cuilibet congruit, sed æqualium tantùm circulorum;) aut etiam Helicum cuilibet circa eundem Cylindrum factarum: Sed, pars quælibet cuilibet Helicis ejusdem; vel etiam diversarum, modo Cylindri, circa quos fiunt, æquales bases habeant, sitque idem Inclinationis Angulus quem cum Cylindri base facit Helix, atque ad easdem partes.

Ab hac autem Helicis similaritate, seu situ uniformi, dependet Cochlearum usus; ut ex propositione sequente patebit.

PROP. II.

Si Cochlea Exterior (quam Fœminam vocant) ita Interiori (seu Mari) conformis sit, ut pars parti aptè respondeat, (hujus Eminentiis illius Cavitatibus congruentibus, & contra;) per Exteriorem permanentem, Interior tota labetur; (partibus sequentibus in præcedentium loca continuè succedentibus:) aut etiam super Interiorem permanentem propelletur Exterior. Fig. 282, 283.

SEquitur hæc ea Propositione præcedente. Cùm enim, (propter Cochleam Helicè sulcatam, & quidem similiter,) Superficies Cochlearis (sive Interior sive Exterior) vel etiam ipsa Cochlearis Soliditas, intelligenda sit, (per def. 1. Cap. 4.) ex Helicibus circa Cylindrum

 drum

drum rectum, adeóque similaribus, conflari: Si ita constitutæ sint Cochleæ Interior atque Exterior, ut illius portio aliqua hujus correspondenti portioni ita congruat, ut illius Eminentiæ hujus Cavitatibus recipiantur, & contra; etiam pars alia quælibet, respectivè sumpta, similiter congruet; totáque altera per alteram transibit, (succedentibus cujusque Helicis partibus sequentibus in ejusdem præcedentium loca, ut H H in A H, fig. 280.) Unde constat propositum.

SCHOLIUM.

NOtandum hic, utut Cochlearum tum Eminentiæ tum Cavitates ita plerumque fieri soleant, quasi ex Trianguli æquicruris (ut fig. 282.) vel Quadrati aut saltem Parallelogrammi rectanguli, (ut fig. 283.) ductu secundum Helicem illam, cui transversim insistat: nihil tamen impedit, quin pro Triangulo illo seu Parallelogrammo quævis alia figura Rectilinea vel Curvilinea substituatur; modò sic feratur (quod & in illis cavendum erit) ut similem ubique situm ad Helicen illam retineat, quò sulcatio sit ubique sui similis.

Atque etiam, quò Interior Exteriori conveniat, illius Eminentiæ hujus Cavitatibus respondere debent, (& contra,) tanquam ex simili ejusdem figuræ ductu formatæ: ut autem utriusque Eminentiæ ita suis Cavitatibus respondeant, non est necesse.

PROP. III.

Datis in Cochleâ, Ambitu Cylindri, cum Inclinationis Angulo, (seu, quod hinc resultat, intervallum, secundùm Cochleæ longitudinem æstimatum, duarum ejusdem Spiralis conversionum continuè proximarum;) & Manubrii cui Vis applicatur longitudine, (seu Ambitu quem Vis peragit in unâ Cochleæ conversione;) Cochleæ Vis calculo æstimabitur.

Nempe; ut est Intervallum duarum continuè proximarum Spiralis conversionum (secundum Cochleæ longitudinem æstimatum,) ad Ambitum quem Vis applicata peragit in unâ Cochleæ conversione; sic Vis illa Motrix,

trix, ad Pondus; Obicem, seu Impedimentum cui æquipollet: quæ itaque aucta movebit.

Adeóque; Quò longius est Manubrium, atque Intervallum illud brevius, eò major est (cæteris paribus) Cochleæ Vis.

INtelligatur enim Cochlea C O interior seu Mas, per exteriorem seu Fœminam K fixam, ope Manubrii A C B versando protrudi, adversus Obstaculum sive Impedimentum O; quod itaque, protrusâ Cochleâ, vel propelli debeat, vel (si hoc impediatur per obstinaciam ultrà positi L) comprimi aut confringi. Manifestum est, dum Vis in A applicata, unâ conversione factâ, circulum Centro C describit, cujus diameter sit A B; tantundem protrudi Cochleam adversus Impedimentum O, quantum est Intervallum E G; perveniente scilicet D ad E, atque E (circuitu per F facto) ad G, atque G ad H, & sic porro. Si itaque fiat, ut Circuli radio C A vel diametro A B descripti peripheria, ad rectam E G, sic Pondus seu Impedimentum O, ad Vim in A; Vis Ponderi seu Impedimento Æquipollebit: per prop. 5. Cap. 2. Adeóque aucta movebit: per prop. 11, 12. Cap. 1. Fig. 282.

Patet hinc; Quò longius est Manubrium C A, vel A B, (in partem alteram vel utramque protractum;) Item, Quò minùs est Intervallum E G, (sive id fiat propter minorem Cylindri diametrum, sive propter minorem Inclinationis Angulum, sive propter utrumque;) eò fortiùs aget Cochlea, cæteris paribus.

Idem similiter ostenderetur; si fixâ Interiore Cochleâ C O, putà in trabe ligneâ L; conversa Cochlea Exterior A B, interjectum quidpiam comprimeret: Seu quod hujus instar sit. Idémque, aliis innumeris Cochleas applicandi modis, pariter accommodabitur. Fig. 283.

SCHOLIUM.

AT interim hic nulla ratio habita est Impedimenti quod ex Frictione oritur, quod tamen in Cochleis magnum esse potest; (uti nec in aliis Organis habita est ratio difficultatis quæ est in ipso Organo movendo:) Sed siquis istius etiam rationem habere velit; addendum erit illud ex Frictione Impedimentum, ei quod est in ipso Obstaculo O amovendo, comprimendo, frangendo, aliásve amoliendo: totúmque illud Impedimenti loco habendum erit in valore Vis motricis æstimando.

PROP. IV.

Datum Pondus seu Impedimentum, datâ Vi, Cochleâ movere.

Fig. 282, 283. CUm in Cochleâ sic constructâ, si sit, ut Peripheria Circuli AB, ad rectam EG, ita Pondus, Obex, vel Impedimentum quodvis datum ad datam Vim; Vis Impedimento æquipolleat; (per prop. præced.) Si fiat ea ratio aliquantò major; Vis præpollebit, adeóque movebit. Per prop. 11, 12. Cap. 1.

PROP. V.

Spiralis circa Cylindrum, Longitudinem exhibere.

Et quidem, sive Cylindrus rectus sit, sive Scalenus; sive etiam pro Cylindro substituatur Solidum quodvis Prismaticum.

Fig. 280, 281. OStensum est, (ad prop. 1. hujus,) Curvam Spiralem AHH, fig. 280. eandem esse atque AHH rectam, fig. 281. (expansâ scilicet in Planum superficie Cylindricâ.) Datur autem rectæ AHH fig. 281. longitudo: (utpote, cujus quadratum æquale est duobus simul quadratis rectarum ABB, BH, fig. 281. hoc est, ABB curvæ, rectæque BH, fig. 280.) Datur igitur & curvæ AHH fig. 280. longitudo; (utpote quæ illi rectæ æqualis est.) Quod erat faciendum.

Atque idem similiter ostendetur in Cylindro Scaleno: Aliòve Solido Prismatico vel Columnari quovis, sive Rectum sit, sive Scalenum; (dummodo intelligatur, ABB planum, ejusdem Lateri Axíve Rectum esse; ipsásque rectas BH, BH, ipsis AB, AB, rectis curvísque aut mixtis proportionales:) per ea quæ ostensa sunt in Schol. prop. 1. hujus.

PROP. VI.

Cochleæ Soliditatem exhibere.

INtelligatur Cylindri Cochleæ inſcripti ſuperficies Curva, in Planum A B β α parallelogrammum expandi: Atque in eo recta A H H, eadem quæ fuerat, in ſuperficie Cylindricâ, curva Spiralis, cujus ductum ſequitur Cochlea. Fig. 284.

Intelligatur porro, ſecto per Axem Cylindro, in unâ aliquâ Cochleæ revolutione, Sectio facta D E F; (putà Triangularis, Quadrata, aliáve quælibet, pro expoſitæ Cochleæ natura; cujus Figuræ magnitudinem datam ſupponimus, ejúſque Centrum gravitatis M notum.) Cujus itaque Baſin (in latere Cylindri inſcripti poſitam) obliquè ſecet, ſecundum Obliquitatis angulum H A α, ſeu A H B.

Si itaque intelligatur, ſuper A B β α planum, in rectâ D E, ad angulos rectos inſiſtere figura data D E F; atque (eiſdem ad planum angulis retentis) ſuper A H H rectam moveri, retento eodem Obliquitatis Angulo: Manifeſtum eſt, Priſma deſcriptum iri cujus Baſis ſit ipſa D E F, Latus autem ipſi A H H æquale, ſed Altitudo quanta eſt recta A B B.

Adeóque (propter Priſmata, ſuper æquales baſes, altitudinibus proportionalia,) tantundem erit Priſma Scalenum D E F H H, atque Priſma Rectum D E F B B: Nempe, quantum eſt quod fit ex D E F plano, in altitudinem A B B ducto.

Intelligatur demum, planum illud A B β α, in ſuperficiem Cylindricam (uti priùs fuerat) curvatum; manente lineæ A B B longitudine: Manente item ejuſdem ad D E F planum poſitione perpendiculari. Unde fiet, ut recta quam priùs deſcripſerat F punctum (ipſi A B B æqualem) protracta jam in arcum majoris circuli ſimilem ipſi A B B, longior jam futura ſit (propter curvaturam) quam prius fuerat. Idemque de arcubus qui ab aliis deſcribuntur ejuſdem D E F punctis, quæ ſunt extra D E rectam, intelligendum erit.

Et propterea majus erit ſolidum ſic curvatum, quàm fuerat Priſma. Quantum nempe eſt, quod fit ex arcu qui ab M (ipſius D E F centro gravitatis) deſcribitur, in ipſam D E F ducto. per prop. 12. Cap. 5.

Cúmque hoc perinde valeat, in ſitu A B B, atque in ſitu A H H: Si intelligatur D E F figura plana (quam in unâ aliquâ Cochleæ circula-

tione

tione facit Planum per Axem) in rectam duci quæ æqualis sit arcui circulari quem describeret ejusdem D E F Centrum gravitatis M, secundum ductum arcûs A B B latum, (circulatione unâ vel pluribus, perfectis vel imperfectis prout expositæ Cochleæ Circulationes esse contigerit:) habebitur (quicunque fuerit Obliquitatis Angulus) Cochleæ magnitudo. Et quidem (cum eadem utrobique valeat demonstratio) sive Cochlea Mas fuerit, sive Fœmina. Quod erat propositum.

Sin porro Cylindri, cui adjacet Cochlea, magnitudinem adjungere libeat: id facilè fiet ob notam Cylindri magnitudinem: per § O prop. 12. Cap. 5.

SCHOLIUM.

IDem valeret, quod ad Solidi magnitudinem spectat, si, pro verâ Cochleâ, substitueretur aliud solidum, ex simili ductu ejusdem D E F plani per curvam A H H, aliter constitutam; putà, sumptis BH, BH, non quidem in ipsarum A B, AB, ratione, sed in harum ratione duplicatâ, triplicatâ, subduplicatâ, subtriplicatâ, aliásve constitutâ; vel etiam per AHH curvam quamlibet. Quippe, non modò Prisma Scalenum utcunque Inclinatum, sed & utcunque Distortum, æquatur Prismati Recto æque alto: (Quod in Tractatu *de Conicis sectionibus*, prop. 3, 4. ostendimus:) Atque Curvatura Cylindrica utrobique tantundem præstat. Verùm de his, aliisque similibus, (cùm ad præsens negotium non spectent,) non erit hic expatiandi locus.

CAP.



CAP. X.
De Motibus Compositis, Acceleratis, Retardatis, & Projectorum.

PROP. I.

Si, Mobili in Motu posito, accedat nova Vis, seu novus Impetus, secundum eandem directionem; fit Motus Acceleratio.

Si Impedimentum, seu Vis contraria: fit Retardatio.

Et utrobique pro ratione novi istius sive Impetûs, sive Impedimenti, seu Vis contrariæ.

Adeoque si Impedimentum seu Vis contraria sit Vi positâ minor; perseverabit Motus ad easdem partes, celeritate minuta.

Si æquale; Motus tolletur: aut etiam si Impedimentum præpolleat.

Sin præpolleat Vis contraria; ponetur etiam Motus ad partes contrarias.

SIt A mobilis, secundum rectam A B moti, Celeritate *C*, Pondus *P*: Fig. 285. Adeóque Vis seu Impetus quo movetur $V = PC$: per prop. 27. Cap. 1. Idémque Motus eâdem Celeritate, nisi accedat Impedimentum, perseverabit; etiamsi non accedat nova causa motrix. per prop. 11. Cap. 1. (Quippe concepto Motui tollendo, tantundem requiritur, quantum ponendo requireretur si non esset.) Accedat autem in B nova Vis seu novus Impetus, secundum eandem directionem, putà ut *nV*: Adeóque sit Vis tota, ut $V + nV = PC + nPC$. per prop 8 & 27. Cap. 1. Cum itaque idem sit, quod priùs, Moti Pondus *P*; fiet (diviso $PC + nPC$ per *P*) celeritas $C + nC$. per eandem prop. 27.

Cap.

Cap. 1. Adeóque acceleratur Motus, in ratione $1 + n$ ad 1. Quod demonstrandum erat. Eâdémque celeritate (nisi quid aliud intercedat) deinceps movebitur, putà ad *D*. per prop. 11. Cap. 1.

Sin accedat Impedimentum aut Vis Contraria, ut nV, (quod itaque signo — notandum erit:) Adeóque Momentum seu Vis jam superstes (per prop. 8 vel 10. Cap. 1.) sit $V - nV = PC - nPC$: Et, (propter idem, quod prius, Pondus *P*,) Celeritas $C - nC$. per prop. 27. Cap. 1. Motus minuitur seu retardatur; utpote cujus Celeritas jam sit ad pristinam, ut $1 - n$ ad 1. Quod itidem demonstrandum erat. Eadémque Celeritas (nisi quid aliud intercedat) deinceps perseverabit, per prop. 11. Cap. 1.

Adeóque, si nV minus sit quàm V; seu n quàm 1: manebit adhuc motus ad easdem partes, sed celeritate minutâ, nempe $C - nC$.

Si nV sit ipsi V æquale, seu $n = 1$: Motus tolletur; propter Impedimentum Momento æquale: adeóque $C - nC = 0$ Celeritas nulla.

Atque hæc quidem indifferenter sive nV sit simpliciter Impedimentum, sive sit Vis contraria. per prop. 11, 12. Cap. 1.

Si verò nV majus sit quàm V; (adeóque $V - nV$ quantitas negativa; per prop. 8. Cap. 1.) sitque nV simpliciter Impedimentum: adhuc fortius sistetur Motus, (propter Impedimentum Momento præpollens, adeóque potens etiam Majorem Motum sistere:) per prop. 11. Cap. 1.

Sin nV (ipsi V præpollens) sit (non simpliciter Impedimentum, sed) Vis contraria: non modò totus qui prius fuerat motus tolletur, sed ponetur contrarius, per prop. 12. Cap. 1. Celeritate $-C + nC$; per prop. 27. ejusdem. Quæ erant ultimò demonstranda.

PROP. II.

Si Vis Motricis, per se æquabilis, continua fiat applicatio; producetur Motus continuò Acceleratus.

Et quidem ita Acceleratus, ut temporibus æqualibus æqualia concipiat Celeritatis incrementa: Quem Motum vocant *Æqualiter Acceleratum.*

Si Vis Impeditivæ, per se æquabilis, similis fiat applicatio; similis prodibit Motûs Retardatio. Quem Motum vocant *Æqualiter Retardatum.*

Et

Et quidem hoc eousque donec totus tollatur; vel etiam (si Impedimentum illud sit à Vi contrariâ) ponatur contrarius.

INtelligatur enim Causa Motrix aliqua, uno Temporis momento, Mobili imprimere gradum Celeritatis ut 1. Gradus hic, nisi fuerit Impedimento aliquo sublatus, etiam sine novâ Causâ perseverabit. per prop. 11. Cap. 1. Eadem verò Causa, similiter agens, secundo item Momento applicata, tantundem efficiet; per prop. 7. Cap. 1. Adeóque (perseveranti gradui primo) secundum superaddet. Et similiter tertio momento (duobus illis perseverantibus) superaddet tertium. Atque sic deinceps.

Adeóque (sumpto initio Seriei à principio Motûs) Celeritatum gradus (adeoque & Longitudines emensæ; per prop. 23. Cap. 1.) Erunt, ut 1, 2, 3, 4, &c. seu (quod in infinitè exiguis tantundem valet, per prop. 1. Cap. 5.) ut 0, 1, 2, 3, &c. vel etiam, ut 1, 3, 5, 7, &c. arithmeticè proportionales; seu, ut rectæ Triangulum Complentes, per def. 1. Cap. 4. (Respicitur autem illic, figura ex parallelogrammis triangulo Circumscripta; justo Major: istic, Inscripta; justo Minor: hic, intermedia, partim Circumscripta, partim Inscripta; ipsi Triangulo Æqualis: ut ad prop. 1. Cap. 5. dictum est.) Adeoque emensæ Longitudines, ab initio computatæ, ut Triangulorum illorum Plana quæ complent illæ rectæ: adeoq; in duplicata ratione Temporum. Fig. 286.

Si verò, non ab ipso Seriei initio, principium sumamus; sed ab acquisito seu posito aliquo Celeritatis gradu; putà, si à posito Celeritatis gradu ut C initium sumamus; similiter ostendetur, continuis momentis sequentibus, Celeritatis gradus futuros $C+1$, $C+2$, $C+3$, &c. seu $C+1$, $C+3$, $C+5$, &c. Hoc est, ut rectæ in Trapezio, seu Triangulo truncato. Quale autem sumendum erit Trapezium, facilè determinabitur ex ratione quam habet Celeritas ultimò acquisita; ad celeritatem primò positam: quippe inde determinabitur ratio parallelorum in trapezio laterum maximi ad minimum; eritque Triangulum super eorum maximo æque altum, ad Trapezium, ut maximum illud ad summam utriusque; Altitudine sumptâ qualibet. Fig. 287.

Eodem modo ostendetur, in motu Retardato: Puta, si, posito aliquo celeritatis gradu quo feratur mobile, ut C, intelligatur Vis Impeditiva, in se æquabilis, continuò accedere; quæ propterea singulis momentis tantundem demat: Fient celeritatis gradus continuè sequentes, ut $C-1$, $C-2$, $C-3$, $C-4$, &c. putà usque ad $C-C=0$, ubi motus primò positus planè absumitur. Fig. 288.

Adeoque, si porro continuetur ablatio, puta ad *C—C*—1, *C—C*—2, *C—C*—3, *C—C*—4, &c. hoc est, ad o—1, o—2, o—3, o—4, &c. seu —1, —2, —3, —4, &c. sitque Vis illa Impeditiva, non Impeditiva simpliciter, sed in contrarium Motiva: habebitur Motus in partes contrarias, cum celeritatis gradibus 1, 2, 3, 4, &c. per prop. 12. Cap. 1. Si verò simpliciter Impeditiva sit; ubi ad *C—C* pervenitur, tollitur Motus; sed quicunque deinceps succedat gradus Impedimenti, utut fortiùs impediat, non tamen in contrarias partes pellit: Supponitur utique Vim Motricem non habere.

Prioris instantiam habemus in Motu Gravium sursum projectorum (seclusâ consideratione impedientis medii;) ubi post superatam à Gravitate Vim sursum projicientem, descendit grave. Posteriorem quadantenus refert motus projectorum (seclusâ gravitatis consideratione) in quamcunque partem; Ubi Medii Densitas, vim projectricem obtundit, & sensim minuit, tandémque tollit; sed non in partes contrarias repellit.

PROP. III.

Si consideretur Gravitas tanquam Vis Motrix deorsum, in se æquabilis, atque continuè applicata:

Descensus Gravium (seclusâ consideratione medii resistentis, & siquid est ejusmodi) est Motus æqualiter Acceleratus.

Adeóque, temporibus quibusvis à principio decidentiæ sumptis, emensæ Longitudines sunt in duplicatâ ratione Temporum.

Putà, sumptis Temporibus, ut 1, 2, 3, 4, &c. emensæ longitudines erunt ut horum quadrata 1, 4, 9, 16, &c.

Temporibus autem invicem æqualibus, à principio continuè consequentibus, primo, secundo, tertio, quarto, &c. ut 1, 3, 5, 7, &c. quadratorum differentiæ, arithmeticè proportionales.

Si verò à posito aliquo seu jam acquisito celeritatis gradu initium sumatur; longitudinibus jam dictis addendum

erit

erit quantum eâ celeritate, æquabili motu, eo tempore acquisitum foret.

Gravium verò sursum projectorum Ascensus, est motus æqualiter Retardatus.

Et Longitudines ibidem emensæ habentur, si auferantur jam dictæ longitudines à longitudine quæ Celeritate primâ eodem tempore foret acquisita.

SEquitur ex præcedente. Quippe, si intelligatur Grave in A; sublato fulcro, descensum ob gravitatem suam inchoans; momento primo celeritatis gradum acquisivisse, ut 1; secundo, ut 2; tertio, ut 3; & sic deinceps; (propter tantundem celeritatis singulis momentis additum:) adeóque celeritatum gradus temporibus à principio sumptis ubique proportionales: putà ut Tempus A b, ad Tempus A B, sic b β (celeritatem in b) ad (celeritatem in B) B β: & sic ubique: Cùm Longitudines emensæ, sint Celeritatum gradibus proportionales; erunt omnes longitudines tempore A b transactæ, ad omnes transactas tempore A B; (seu tota longitudo transacta tempore A b, ad totam transactam tempore A B;) ut omnes rectæ complentes A b β triangulum, ad omnes complentes triangulum A B β; Hoc est, ut Triangulum A b β ad ipsum A B β Triangulum; Adeóque in Laterum A b, A B, ratione duplicatâ (propter figuras similes in duplicatâ ratione laterum homologorum.) Ideóque si sumantur tempora A b, A b, &c. ut 1, 2, 3, 4, &c. erunt Triangula A b β, A b β, &c. (adeóque & transactæ Longitudines,) ut 1, 4, 9, 16, &c. Et propterea, quæ temporibus æqualibus continuè sequentibus, A b, b b, &c. transiguntur; A b β, b β β b, &c. ut eorum differentiæ, 1, 3, 9, 7, &c. Et sic ubique. Fig.289.

Putà, sumptis in rectâ A E, partibus A B, B C, C D, D E, &c. ipsis 1, 3, 9, 7, &c. proportionalibus: æqualibus illæ temporibus trasigentur. Fig.290.

Si verò intelligatur, non ab ipso motûs initio in A, computus instituendus; sed à celeritatis gradu jam acquisito, ut b β, seu B C; vel, quod tantundem erit, si non suapte tantum gravitate motum concipiat Grave, sed à Vi Motrice extrinsecùs pellatur seu projiciatur, unde Celeritatis gradum concipiat ut b β, (quâ itaque ferretur nisi quid aliud accederet, per prop. 11. Cap. 1.) quæ deinceps ob gravitatis impetum continuè applicatum, continuè (ut dictum est) æqualiter acceleranda sit: erunt Celeritatis gradus, singulis ipsius temporis b B momentis, ut rectæ trapezium b β β B complentes, & Longitudo per id temporis Fig.289.

 emensa,

emensa, ut ipsum b β β B trapezium; quæque temporis illius partibus transiguntur Longitudines, respectivis trapezii partibus proportionales. Et quidem si intelligatur B b β parallelogrammum, repræsentare longitudinem emetiendam tempore b B celeritate ubique ipsi b β æquali: triangulum β E β repræsentabit id quod propter accelerationem accedit.

Fig. 291. Similiter si intelligatur Grave, in A, sursum projectum eâ Vi quæ Celeritatem imprimeret ut A α; quâ perseverante transigendam tempore A B longitudinem repræsentet A B α α parallelogrammum. Ea verò, propter Gravitatem, ut Vim contrariam, contra renitentem; &, propter continuam applicationem æqualem, tantundem singulis momentis dementem; continuè minuetur: ablatis rectis α β, α β, triangulum α β B complentibus; relictis b β, residuos celeritatis gradus repræsentantibus; donec tandem, ita crescentibus α β, ut fiat α B ipsi A α æqualis, tota Vis sursum tendens exhauriatur; adeóque in temporis puncto B desinat Ascensus. Sed, crescente porro ob Gravitatem impetu; non modò non feretur sursum, sed incipiet descendere, (Vi deorsum jam præpollente;) & quidem (ob continuè crescentem impetum æquabiliter) motu æqualiter accelerato, (ut crescunt c β, c β, rectæ, triangulum B C β complentes;) donec, facto B β C triangulo, ipsi A α B æquali, tantundem descenderit quantum ascenderat prius: atque adhuc ultra nisi quis Obex impediat.

SCHOLIUM.

PRopositionem hanc Hypotheticè proponimus: quoniam non inter omnes constat, vel quænam sit Gravitatis Causa, vel etiam secundum quam Regulam agat, (variis varias Gravitatis Hypotheses excogitantibus.) Neque nobis hic in animo est, illam in Physicis quæstionem determinare, in cujuscunque præjudicium. Sed, stante illâ Hypothesi Physicâ, (quam vel reapse veram esse, vel ad veritatem quam proximè accedere, Experimenta testantur;) Theorema Mathematicum, ostensum est.

PROP.

PROP. IV.

Eædem obtinent accelerandi & retardandi rationes, dum fertur Grave per rectam Inclinatam, ſeu in plano Inclinato; atque per rectam ad Horizontem Perpendicularem: Sed celeritatibus variis pro variâ declivitate.

Hinc ſequitur; Eodem tempore per quamlibet circulo inſcriptam, diametro Perpendiculari (in Circulo Erecto) vel perpendiculari Succedaneæ (in circulo Inclinato) conterminam, ferri Grave; quo per illam Diametrum.

Item; Eandem celeritatem deſcendendo acquiri, & aſcendendo deperdi, in rectâ inclinatâ; atque in perpendiculari æque alta: Adeóque & eundem utrobique impetum, & percuſſionem eandem.

NAm per prop. 26. Cap. 2. Obliquitas Plani in eâdem ratione minuit omnium in eo deſcenſuum celeritates; nempe in eâ quam poſtulat plani declivitas: Hoc eſt (per prop. 25. ejuſdem) celeritates erunt in declivitatum ratione, ſeu in reciprocâ rectarum æquè altarum. Adeóque quæ erant in A P B perpendiculari, ut 1, 2, 3, 4, &c. erunt in inclinatâ A O, ſi hæc ſit illius dupla, ut $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{2}$, &c. ſi tripla; ut $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{3}$, &c. & ſimiliter in aliis proportionibus. Fig. 292.

Vel etiam, idem ab origine demonſtrabitur ut in prop. 2, 3. hujus. Nempe ſi, quod in A B gravitat ut 1, idem in A O (propter obliquitatem) gravitet, verbi gratiâ, ut $\frac{1}{2}$; unde momento primo, ſeu tempore exiguo, acquiratur celeritas ut $\frac{1}{2}$: ejuſdem applicatione continuâ tempore ſecundo, acquiretur alterum $\frac{1}{2}$; tertio, tertium; &c. adeóque (prioribus permanentibus) celeritates erunt, ut $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{2}$, &c. eadem ratione cum ipſis 1, 2, 3, 4, &c.

Atque hinc colligitur Galilæi propoſitio illa; Eodem tempore percurri A O, vel O B, ſubtenſas quaſlibet circuli Diametro perpendiculari A B conterminas, quo ipſam A B diametrum. Cum enim (per ante demonſtrata) celeritates omnes in A O, ad reſpectivas in A P B, ſint

sint in reciprocâ ratione rectarum æquè altarum; hoc est, ut A P ad A O; hoc est (propter similia triangula) ut A O ad A B, (longitudines transactæ ad invicem:) eodem tempore percurrentur A O, A B. Idémque similiter ostendetur de O B, seu huic parallelâ, (adeóque æquali & pariter inclinatâ) A β.

(Quódque de A B perpendiculo in circulo erecto ostensum est; similiter obtinet de A B perpendiculi succedaneo, in circulo inclinato: propter omnes in eodem plano descensus in eâdem ratione impeditos, per prop. 26. Cap. 2.)

Cúmque (ut jam ostensum est) celeritates in A O, ad respectivas in A B, sint ubique proportionales; sintque eodem tempore percursæ A O, A B; erit celeritas in O (lati per A O,) ad celeritatem in B (lati per A B,) ut A O, ad A B. Sed & ita est celeritas in P ad eandem celeritatem in B (lati per A P B.) Nam (per prop. 2, 3, hujus,) transactæ longitudines sunt in duplicatâ ratione temporum; adeóque & celeritatum, utpote quæ sunt temporibus à principio sumptis proportionales. Adeóque Celeritas in P, ad celeritatem in B, in subduplicatâ ratione A P ad A B; hoc est, (propter A P, A O, A B, continuè proportionales,) ut A O ad A B. Eadem igitur est celeritas in O, quæ in P. (Idémque similiter obtineret, ob rationem modò dictam, si fuerit A P O planum inclinatum, & A P perpendiculi succedaneum.) Adeóque & Impetus utrobique æqualis (cum idem sit utrobique tum Pondus tum Celeritas;) & æqualis Ictus seu Percussio: ut in Capite de Percussione ostendetur.

Quæque de Descensuum Accelerationibus hîc ostensa sunt: eadem similiter de Ascensuum Retardationibus ostendentur. Quippe Obliquitas Plani eâdem ratione Ascensum adjuvat quâ impedit Descensum. per prop. 25. Cap. 2.

PROP.

PROP. V.

Si, in Motu continuè Accelerato, Celeritates (ab initio computandæ) ſint in Temporum ratione Duplicatâ: Longitudines emenſæ, erunt in Temporum ratione Triplicatâ.

Adeóque, ſumptis temporibus, ut 1, 2, 3, 4, &c. longitudines tranſactæ erunt, ut 1, 8, 27, 64, &c. numeri Cubi.

Si Celeritates ſint in Temporum ratione Triplicatâ, Quadruplicatâ, &c. Longitudines emenſæ, erunt in Temporum ratione Quadruplicatâ, Quintuplicatâ, &c. Unâ ſemper vice plus multiplicatâ, quam Celeritates.

Adeóque, ſumptis temporibus ut 1, 2, 3, 4, &c. longitudines erunt, ut 1, 16, 81, 256, &c. numeri Biquadrati: vel, ut 1, 32, 243, 1024, &c. numeri Surdeſolidi. Et ſic deinceps.

Longitudinéſque, continuis temporibus æqualibus tranſactæ, ut illorum Cuborum, Biquadratorum, Surdeſolidorum, &c. differentiæ.

INtelligatur enim, Motu ab A inchoato, in Temporis A b B momentis b, B, Celeritates eſſe in duplicatâ ratione rectarum A b, A B; hoc eſt, ut ipſarum A b, A B, Quadrata: Putà, ut rectæ b β, B β, complentes A B β complementum Semiparabolæ. Erunt itaque Longitudines temporibus A b, A B, emenſæ, (per modò demonſtrata ad prop. 2. hujus,) ut ipſa Complementi plana A b β, A B β; hoc eſt (propter trilinea A b β, A B β, ſubtripla Parallelogrammorum A b β, A b B, per prop. 6. Cap. 5.) ut ipſa A b β, A b B, rectangula ſeu parallelogramma. Sunt autem, propter altitudines ipſis A b, A B, vel æquales vel ſaltem proportionales; baſéſque b β B β, in earundem ratione duplicatâ; Parallelogramma ipſa (utpote in ratione ex Baſium & Altitudinum rationibus compoſitâ) erunt in earundem ratione Triplicatâ. Fig. 293.

Et

Et propterea, sumptis ab initio temporibus A b, A b, &c. ut 1, 2, 3, 4, &c. respectivæ Celeritates erunt, ut 1, 4, 9, 16, &c. & longitudines ab initio transactæ, ut 1, 8, 27, 64, &c. Adeóque, temporibus æqualibus, continuè à principio sumptis, 1, 7, 19, 37, &c. Cuborum differentiæ.

Similiter ostendetur; sumpto Complemento Paraboloidis Cubicalis (in quo rectæ b β, B β, sunt in rectarum A b, A B, ratione Triplicatâ;) Longitudines emensas (trilineis A b β, A B β, proportionales,) esse in earundem ratione Quadruplicatâ.

Atque sic deinceps, pro potestatibus aliis, si sumantur Paraboloides respectivè conformes. Constat itaque propositum.

PROP. VI.

Si Mobile, ob duas causas Motrices, duos concipiat directos impetus; putà secundum duas rectas positione datas, angulum facientes; Celeritatibus in se æqualibus, ad invicem verò eisdem rectis, ut parallelogrammi lateribus longitudine datis, proportionalibus: feretur Mobile per Parallelogrammi diagonium, eâ celeritate quæ sit ad datas, ut diagonium illud ad respectiva latera.

Adeóque tantundem est, lationem quod spectat, sive feratur Mobile motu ex duobus composito qui directiones habeant secundum Parallelogrammi latera, & celeritates ipsis proportionales; sive Motu simplici, secundum ejusdem diagonium, & celeritate proportionali. Quippe, utrovis modo, eodem tempore, per eundem tramitem, eâdem celeritate feretur.

Idémque Motui ex pluribus composito similiter accommodabitur; sive Directiones habeant in eodem plano omnes, sive secus.

Potéstque idem propterea Motus infinitis modis componi.

Fig. 294. INtelligatur A Mobile, ob causam aliquam Motricem, Impetum concipere secundum Directionem A α; aliúmque, ob causam aliam Mo-

Motricem, secundum Directionem A B: sitque illius Celeritas ad Celeritatem hujus, ut A α recta ad rectam A B. Et compleatur parallelogrammum, cujus Diagonium sit A β.

Manifestum est, quo tempore A, secundum directionem A α, feratur ad rectam α β; eodem ferri secundum directionem A B, ad rectam B β; adeóque fore in puncto β. (Et sic ubique.) Et, propter eandem ubique celeritatum rationem, adeóque eandem ubique rationem laterum A α, A B, & communem Directionum Angulum A; similia fore inter se omnia A β parallelogramma. Et propterea in eâdem rectâ fore omnia β puncta. Cúmque eodem tempore per A β rectam feratur A mobile; quo simul ferri intelligatur tum secundum directionem A α, Celeritate A α; tum secundum directionem A B, celeritate A B: Celeritas motûs per A β, ad celeritates illas respectivè sumptas; erit ut recta A β (diagonium) ad ipsas A α, A B, rectas, latera parallelogrammi. Adeóque tantundem erit, lationem quod spectat, sive feratur motu simplici secundum directionem A β celeritate A β; sive motu composito, secundum directionem A α celeritate A α, atque secundum directionem A B celeritate A B, simul. Quippe eodem tempore, eâdem celeritate, atque in eodem tramite, feretur Mobile ab A ad β.

Cúmque eadem A β recta, possit esse Diagonium Parallelogrammorum infinitis modis variatorum, totidem Motuum Compositiones innuentium, quarum singulis æquipollet (per jam demonstrata) idem Motus simplex: Manifestum est eundem posse Motum infinitis modis componi. Quod etiam ulteriùs patebit, ex casibus sequentibus.

Intelligatur deinde, idem A mobile, ob totidem Causas Motrices, secundum tres in eodem Plano Directiones A α, A B, A C; celeritatibus ipsis A α, A B, A C, proportionalibus. Ostendetur, ut priùs, motum ex duobus illis secundùm A α & A B compositum; tantundem esse atque motum simplicem secundum A β celeritate A β. Sed & similiter ostendetur, motum compositum ex hoc (duobus æquipollente) atque ex eo secundum AC celeritate A C, tantundem esse atque simplicem per Diagonium A γ celeritate A γ. Ergo, qui ex tribus illis per A α, A B, A C, (cum suis respectivè Celeritatibus,) componitur; æquipollet simplici per A γ Celeritate A γ. Fig. 295.

Idem similiter ostendetur, si intelligantur tres illæ Directiones A α, A B, A C, non in eodem plano omnes, sed in diversis; puta, ut tria ejusdem Parallelepipedi Latera communi puncto angulari coeuntia, (quo Casu A γ erit Parallelepipedi Diagonium;) ut etiam, si plures adhuc fuerint Directiones, utcunque ab eodem A communi puncto prodeuntes, secundum quas A Mobile feratur. Constat itaque propositum. Fig. 296.

SCHOLIUM.

Quæ de Motibus per A α, A B, A C, æquabilibus ostensa sunt; similiter ostenderentur si essent illæ omnes similiter Accelerati vel similiter Retardati; non autem si dissimiliter.

PROP. VII.

Si Motus Æquabilis, cum Accelerato vel Retardato componatur; vel Motus Accelerati aut Retardati, sed dissimiliter, componantur: Alia atque alia linearum species emerget, per quam feretur Mobile, pro variâ compositionum ratione.

Exempli gratiâ. Si Motus Æquabilis, cum Æqualiter (seu in ratione Temporum) Accelerato componatur; (adeóque motus acceleratus in duplicatâ ratione motûs æquabilis:) Latio erit in Curva Parabolica: Et (si Motuum Directiones sint ad invicem rectæ) longitudines emensæ, erunt ut respectiva plana Hyperbolica, Curvæ & conjugato Axi interjecta.

Si Motus Æquabilis componatur cum Accelerato in temporum ratione Duplicatâ, (ut hic sit ad illum in ratione Triplicata:) Latio erit in Curvâ Paraboloidis Cubicalis: Et Longitudines emensæ, ut respectivæ istius curvæ particulæ, seu spatia plana ipsis proportionalia.

Si Motus Æqualiter Acceleratus (seu acceleratus in ratione Temporum) hoc est, qui sit in Duplicatâ ratione temporum, cum motu qui sit in Temporum ratione Triplicatâ (seu accelerato in temporum ratione Duplicatâ,) componatur: Latio erit in Curvâ Paraboloidis Semi-Cubicalis: Et (si Motuum Directiones sint ad invicem rectæ) Longitudines emensæ, ut respectiva Spatia Parabolica, Axi & Curvæ interjecta.

Simi-

Similéque in aliis casibus Calculo determinabitur.

INtelligatur A T T recta, secundùm quam, Vi aliquâ Motrice, propellatur A mobile, Motu Æquabili; adeóque, sumptis temporibus ut 1, 2, 3, 4, &c. emensæ longitudines A T, A T, &c. erunt item ut 1, 2, 3, 4, &c. per prop. 26. Cap. 1. Fig. 297, 298.

Atque intelligatur idem Mobile, aliâ Vi Motrice, impelli, secundùm directionem A D, motu æqualiter accelerato; adeóque, sumptis temporibus ut 1, 2, 3, 4, &c. emensæ longitudines A D, A D, &c. erunt ut 1, 4, 9, 16, &c. eorum quadrata. per prop. 2, 3. hujus.

Si itaque; dum, motu illo, fertur A mobile, Longitudine A T; hoc est, ab A D ad huic parallelam T O; feratur, motu hoc, longitudine A D; hoc est, ab A T ad D O; & sic ubique: Erunt ubique A D, A D; hoc est, T O, T O; in rectarum A T, A T; hoc est, D O, D O; ratione duplicatâ. Adeóque (propter naturam Parabolæ) quæ, per omnia O, O, puncta, transit Curva, (quæ est Lationis via, utpote in quâ mobile semper erit,) est Parabola. Quod demonstrandum erat.

Atque hoc perinde obtinet sive ad angulum rectum coeant in A rectæ A T, A D, (ut ubi A est vertex Axis,) sive ad alium quemvis (ut ubi A vertex est cujusvis alterius diametri:) Et quicunque fuerit utrobique Celeritatis gradus; hoc est, quodcunque habeat Parabola illa Latus Rectum. Quippe semper erunt T O, T O, rectæ, in rectarum A T, A T, ratione duplicatâ; ob naturam Parabolæ.

Si verò A sit Vertex Axis, erunt longitudines A O, A O, per quas fertur mobile; Spatiis Hyperbolicis, Curvæ & Conjugato Axi interjectis, respectivè sumptis proportionales. Per ea quæ alibi, in Tractatu *de Curvarum* Ἐυθυνσει, demonstravimus; ubi de Parabolæ Ἐυθύνσει agitur. Fig. 297.

Similiter; positis A T, A T, (pro motu æquabili) in ratione Temporum; & (pro motu accelerato in Duplicatâ ratione Temporum) A D, A D, in earundem ratione Triplicatâ, (per prop. 5. hujus;) Ostendetur, curvam A O O fore Paraboloidem Cubicalem; Propter T O, T O, hoc est A D, A D, in rectarum A T, A T, hoc est D O, D O, ratione Triplicatâ. Quod itidem demonstrandum erat. Fig. 297, 298.

Et Curvæ particulis A O, A O, plana proportionalia exhibentur, per ea quæ generaliter ostendimus in Schol. prop. 38. *Arithmeticæ Infinitorum.*

Idemque aliis Accelerationum speciebus accommodabitur, sumptis Paraboloidibus aliis, prout res postulaverit.

Intelligantur demum rectæ AT, AT, non in ipsâ Temporum ratione, sed (pro motu æqualiter accelerato, per prop. 2. hujus) in Temporum ratione Duplicatâ; adeóque Tempora in earundem ratione Subduplicatâ: Item rectas A D, A D, (pro motu accelerato in Duplicatâ ratione temporum,) in temporum ratione Triplicatâ, (per prop. 5. hujus;) adeóque in rectarum A T, A T, ratione Subduplicatæ-Triplicatâ. Erit (propter istius paraboloidis naturam) Curva A O O, paraboloides quam *Semi-cubicalem* appello; cujus Index seu Exponens sit $\frac{3}{2}$. (Puta, in quâ rectæ A D, A D, hoc est, T O, T O; sint in rectarum A T, A T, hoc est D O, D O, ratione Subduplicatæ-Triplicatâ.) Per illam itaque Curvam feretur Mobile, quod Motu ex sic acceleratis composito fertur. Quod item erat demonstrandum.

Istius autem Curvæ partes A O, A O, spatiis Parabolicis proportionales esse, demonstratum est in Tractatu modò memorato, de *Curvarum* 'Εὐθύνσει, ubi de *Curvâ Semiparaboloidis Cubicalis* agitur, cui æqualem rectam exhibemus.

Eodem modo de aliis Motuum Compositionibus judicandum erit (mutatis mutandis) Curvâ sic positâ ut Calculus indicaverit.

PROP. VIII.

Motus Projectorum (exclusâ consideratione resistentis Medii) est in rectâ Parabolicâ.

Intellige; Nisi fiat Projectio illa vel directè Sursum, vel directè Deorsum: Quo casu motus erit in lineâ Rectâ; Sursum, Retardatus; Deorsum, Acceleratus.

Fig. 197. Sequitur ex præcedente. Esto enim Vis à Projectore impressa, secundum directionem A T T; Mobile impellens Motu Æquabili, adeóque eâdem ubique Celeritate: per prop. 11. Cap. 1. Interea dum Gravitas motum imprimit deorsum, putà secundùm directionem A D D, æqualiter acceleratum: per prop. 3. hujus. Adeóque, qui ex utrisque componitur, est per A O O Curvam Parabolicam: per præcedentem.

Sin fieri intelligatur projectio directè sursum, vel directè deorsum: degenerabit Parabola in lineam Rectam; (propter projectionis motum, & motum gravitationis, in eâdem rectâ;) in quâ fiet motus vel Retardatus sursum, vel Acceleratus deorsum; de quibus supra dictum est.

SCHO-

SCHOLIA.

HUc ſpectant motus projectorum ex Bombardis, Arcubus, Baliſtis, aliiſque Machinis projicientibus, aut ex projicientis manu, aliâve Vi quâlibet, ubi projecta Gravia, poſtquam à projiciente ſeparantur, impreſſo Impetu feruntur.

Dico autem, *excluſâ conſideratione reſiſtentis medii:* Quoniam, ob hanc reſiſtentiam, Motus ſecundum directionem projicientis, qui ſupponitur Æquabilis, reverà minuitur, & ſenſim extinguitur, ob continuam cum medio reſiſtente luctam: & propterea ſenſim deficit à linea Parabolica.

Atq; hinc fit, quod Globuli ex Bombardis, in majori diſtantiâ minùs feriunt. Si enim, reverâ, eâdem celeritate procederet latio ſecundum rectam A T, (quicquid ſit de motu deſcenſûs ſecundum A D,) eâdem violentiâ feriret objectum Murum (cui AT recta ſit) ſive longiùs, ſive in propinquo poſitum: (per prop. 21. Cap. 1.) contrà quàm experientiâ compertum eſt.

CAP.



CAP. XI.

De Percussione.

PROP. I.

Si Grave motum, tanquam perfectè Durum consideretur; atque in Obicem sive Obstaculum firmum directè impingat, quod itidem perfectè Durum sit; Sítque Vis Gravi sic moto æquipollens, Minor quàm est Vis Obstaculi motui resistentis, vel etiam ipsi Æqualis: Motus sistitur.

Sin Major fuerit: continuatur motus, superato Obice; sed eâ ratione tardatus seu diminutus, quam exigit Obicis resistentia; quam Calculus indicabit.

Nempe, Si ex Momento (quod ex Pondere & Celeritate componitur) tantundem auferatur quantum Obici amoliendo æquipolleat; residuúmque, si quod sit, per Pondus dividi intelligatur: prodibit gradus Celeritatis residuæ.

Fig.299. Esto Gravis Moti A, perfectè Duri, Pondus mP, Celeritas rC, cui æquipolleat Momentum seu Vis $mrPC$, per prop. 27. Cap. 1. Atque Obstaculum B cui directè impingit, Vim resistendi habeat, ut $nsPC$.

Si Minor sit $mrPC$, quàm $nsPC$; præpollebit Impedimentum: Sin Æqualis; saltem æquipollebit Impedimentum: Et Motus utroque casu sistitur. (Erit utique, si æquales sint, $mrPC - nsPC = mrPC - mrPC = 0PC$, vis nulla: Si Impedimentum præpolleat, pro impedimento reputandum est.) Per prop. 10, 11. Cap. 1.

Sin

Sin Major sit $mrPC$, quàm $nsPC$; præpollebit Vis; adeóque superabitur Impedimentum; Motúsque continuabitur, sed Diminutus. per prop. 10, 11. Cap. 1.

Quantus autem deinceps futurus sit Motus, & quanta Celeritas; Calculo sic colligitur. Vis præpollens, $mrPC$; unà cum Impedimento contrario, $nsPC$; tantundem valet atque Vis $mrPC - nsPC$, per prop. 10. Cap. 1. (Absumitur utique in Obice rumpendo, prosternando, seu utcunque amoliendo, tantundem Virium seu Momenti, quantum Obicis Firmitati seu resistendi Vi æquipolleat: reliquúmque, si quod est, Ponderi ultrà ferendo impenditur.) Estque Gravis Moti pondus (idem quod prius) mP: Ergo Celeritas futura (ut quæ oritur ex Momento per Pondus diviso) $\frac{mr - ns}{m}C$; per prop. 27. Cap. 1.

SCHOLIUM.

PErfectè Durum, appello, quod ictui nequaquam cedit; Adeóque nec Molle, nec Elasticum.

Molle, appello, quod ictui ita cedit ut pristinam figuram amittat: Ut Lutum, Cera, Plumbum, aliáque similia quæ ictu deformantur; aut etiam Corpora Fluida. Ubi enim hoc contingit, Virium pars aliqua in deformando Corpore absumitur, nec tota in Obstaculum impenditur: Cujus itaque seorsum est habenda ratio.

Elasticum appello, quod, utut ictui aliquantisper cedat, se tamen in pristinam formam suopte marte restituit: ut sunt Elateres Chalybei, Lignei, aut cujuscunque materiæ; (nostrates *Springs* appellant;) & Corpora istiusmodi quæ pressa resurgunt, aut quocunque modo a situ debito detorta vim habeat semet restituendi. Quâ de re post agetur Cap. 13. ubi de Resititione agetur.

Addi etiam hic poterit, ut non tam Fragile sit aut Friabile Corpus Motum, ut ictu frangatur. Quippe tum, Virium pars aliqua frangendo Corpore absumitur.

Eadémque, quam hic supponimus, Durities, etiam in propositionibus sequentibus intelligenda est. Quod hic monitum esto, ne opus sit sæpius id repetere.

Sin objiciat quis (quod & fortasse verum est) ejusmodi corpus nullum esse, quod nihil habeat vel Mollitiei vel Elasticitatis; neque tam firmum aliquod Obstaculum quod ictu vel levissimo non aliquantulum loco moveatur; quasi Lapilli quantumvis exigui ictu, modicâ Vi jacti, Alpina rupes loco nonnihil dimoveretur, aut etiam quæ huic con-juncta

juncta est, ipsa Telluris moles; utut tantillum id sit ut sensu percipi nequeat. Hoc neutiquam obest præsenti negotio. Quotcunque enim fuerint hujusmodi accidentia in complexo subjecto; id nihil impedit, quin abstractione mentis separari possint; atque hæc quæ præ manibus est consideratio, quasi ea non essent, tractari; eáque, si tanti sint ut negligi non debeant, seorsum considerari poterunt.

Directè impingere, hîc dicimus, cùm recta secundum quam movetur, per moti Corporis Centrum-Gravitatis & punctum Contactûs ducta, sit, superficiei corporis in quod impingitur, perpendicularis: aut etiam, si non in puncto, sed linea vel superficie se tangant mutuò, cùm recta illa sit huic communi seu lineæ seu superficiei perpendicularis. Si autem Obliquè vel Indirectè impingat; sive ideo fiat quòd recta secundum quam movetur, per Centrum gravitatis transiens, ad punctum tactûs non pertingat; sive quòd, quæ sic pertingit, superficiei corporis in quod impingitur non sit perpendicularis; advocanda hic erunt in considerationem quæ suprà de Motuum obliquitate traduntur Capite II.

PROP. II.

Si Grave motum, Gravi Quiescenti directè impingat, sed ita constituto ut aliunde ne moveatur non impediatur: utrumque junctim movebitur, eâ celeritate quam Calculus (Ponderum rationibus & pristinâ Celeritate ritè computatis) indicabit.

Nempe; si Momentum (ex Moti Gravis Pondere & Celeritate compositum) per utriusque simul Pondus dividatur; habebitur futura Celeritas.

Seu (quod eodem recidit) ut simul utriusque Pondus, ad Pondus priùs moti; sic pristina Celeritas, ad post futuram.

(Et quidem, si Quiescens Moto sit pondere æquale, ferentur deinceps celeritate dimidiâ.)

Quæ quidem Celeritas futura, in utriusvis Pondus ducta, exhibebit istius momentum pòst futurum.

Fig.300. ESto A, Grave motum, secundum rectam A A ipsius Centro-gravitatis descriptam, quæ ad Quiescentis B (cui directè impingat) Centrum

Centrum Gravitatis pertingat; (nam & hoc requirimus quò Gravia junctim movenda dicantur directè impingere.) Sitque Gravis A, pondus mP, celeritas rC adeóque Momentum seu Vis impellens $mrPC$: Et Gravis B, pondus nP, (celeritas, utpote quiescentis, nulla in utramvis partem;) Adeóque simul utriusque pondus $mP+nP$. Movenda autem deinceps erunt utraque eâdem celeritate. Quippe B segniùs moveri non poterit, propter insequens A: Sed neque celeriùs; cùm non moveri aliunde intelligatur quàm quòd ab A sequente propellatur: (Et siquod aliud accedat quod celeriùs propellat; ut Vis Elastica, de quâ alibi dicetur, aut aliud quidpiam; id non est hujus considerationis, sed alterius loci.) Cúm itaque Vi $mrPC$, movendum sit Pondus $mP+nP$; id fiet celeritate $\frac{m}{m+n}rC$: (diviso scilicet Momento $mrPC$, per Pondus $mP+nP$:) per prop. 27. Cap. 1. Quod erat propositum. (Et quidem si pondera sint æqualia, hoc est $m=n$, erit $\frac{m}{m+n}rC=\frac{1}{2}rC$, ut patet.)

Momentum itaque Ponderis nP, priùs quiescentis, jam moti celeritate $\frac{m}{m+n}rC$, erit $\frac{m}{m+n}nrPC$ seu $\frac{n}{m+n}mrPC$; Ponderisque mP, priùs moti celeritate rC, jam verò celeritate $\frac{m}{m+n}rC$; jam fit $\frac{m}{m+n}mrPC$. Adeóque momentum hinc demptum (gravi priùs quiescenti collatum) est $mrPC-\frac{m}{m+n}mrPC=\frac{mn}{m+n}rPC$.

SCHOLIUM.

Manifestum hinc est, ex quovis minimo cujusvis exigui Gravis impulsu, etiam maximo cuivis quiescenti, motum inferri posse; Uti etiam ex sequentibus patebit, etiam maximi Gravis motum, cujusvis exigui objectu, quadantenus impediri posse seu retardari; vel etiam hujusmodi accessu, quadantenus accelerari.

Verùm hoc tantillum esse potest, ut omnem sensuum perceptionem fugiat: adeóque negligi soleat. Unde fit, ut pro absolutè quiescentibus reputentur, aut immobilibus, quæ, si secundum Mathematicum rigorem æstimanda forent, dicenda forsan essent aliquantillum moveri. Dato enim, quòd tota Telluris moles fluido Æthere suspensa, cùm saltu pulicis percussa sit, dicenda esset loco suo tantillum dimoveri; aut etiam

etiam translato de loco in locum (quod sæpe fit) acervo satis gravi, Tellurem totam, propter mutatum Centrum Gravitatis, similiter mutare sedem; (quod quidni fieri possit haud facilè dixeris; nedum ubi majores terrenæ molis concussiones seu mutationes contingunt:) Cùm tamen hæc tantilla sint ut sensum omnem fugiant; minimè mirandum est, si, hisce non obstantibus, immota censeatur. Præsertim cùm ipsa Aeris sive Densitas sive Gravitas (utut sensui non planè imperceptibilis) negligi non raro soleat in motibus æstimandis.

PROP. III.

Si Grave subsequens, segniùs secundum eandem rectam præcedenti, directè impingat: utriusque deinceps eadem erit celeritas; quæ calculo exquiretur.

Nempe; si simul utriusque Momentum, per simul utriusque Pondus dividatur; habebitur communis utriusque futura Celeritas.

(Et quidem, si pondera sint æqualia; erit semi-summa utriusque Celeritatis.)

Eáque Celeritas futura, in utriusvis pondus ducta, exhibet ejusdem momentum pòst futurum.

Fig. 301. SI Grave A, segniùs præcedenti B directè impingat; (*segniùs* dico, nam si B eâdem celeritate præcederet, subsequens A non illud esset assecuturum; nedum si velociùs fugiat B, quàm insequatur A;) sitque Gravis A, Pondus mP, Celeritas rC, adeóque Momentum $mrPC$; Gravis B, Pondus nP, Celeritas (minor) sC, adeóque Momentum $nsPC$; Adeóque simul utriusque Momentum $mrPC + nsPC$: Diviso hoc per summam Ponderum $mP + nP$, habebitur communis utriusque futura Celeritas $\frac{mr + ns}{m + n}C$: per prop. 27. Cap. 1. (Et quidem si pondera, sint æqualia; hoc est, $m = n$; erit $\frac{mr + ns}{m + n}C = \frac{r + s}{2}C$.) Quod erat propositum.

Ideóque, præcedentis nP momentum, quod priùs fuerat $nsPC$, jam

fit

fit $\frac{mr+ns}{m+n} nPC$; & subsequentis mP momentum, quod fuerat $mrPC$, jam fit $\frac{mr+ns}{m+n} mPC$. Adeóque Momentum hinc demptum, & sequenti collatum, est $mrPC - \frac{mr+ns}{m+n} mPC = \frac{nr-ns}{m+n} mPC = \frac{mr-ms}{m+n} nPC = \frac{r-s}{m+n} mnPC$.

PROP. IV.

Si duo Gravia, secundum eandem rectam, contrariis motibus occurrentia, sibi mutuò directè impingant: eâdem deinceps celeritate, atque ad easdem partes ferentur; quas calculus indicabit.

Nempe; Si Momentorum Differentia (quoniam ad contrarias partes) per Summam Ponderum dividatur; habebitur communis utriusque Celeritas pòst futura; & quidem ad eas partes ad quas tendebat Vis præpollens.

Et quidem, si pondera sint æqualia; erit Celeritatum Semidifferentia.

Sin æquipolleant contraria Momenta, (propter æqualia invicem tum Pondera, tum Celeritates; aut has illis reciprocè proportionales:) ad neutras partes ferentur; sed quiescent utraque.

Futura autem celeritas, in utriusvis pondus ducta, exhibet ejusdem momentum post futurum.

SIt Gravis A, Pondus mP, Celeritas $+rC$, adeóque Momentum $+mrPC$ (prorsum:) cui occurrat motu directè contrario Grave B, cujus pondus nP, celeritas $-sC$, adeóque Momentum $-nsPC$ (retrorsum:) & utriusque simul Momentum (seu Momentorum, utpote ad contrarias partes, Differentia,) $mrPC-nsPC$, (prorsum vel retrorsum, prout signum $+$ vel $-$ prævaluerit; per prop. 8. Cap. 1.) Hoc itaque per summam ponderum $mP+nP$ divisum, exhibet communem Fig. 302.

munem utriusque celeritatem deinceps futuram, $\frac{mr - ns}{m + n} C$ (prorsum vel retrorsum, prout signum + aut — prævaluerit:) per prop. 27. Cap. 1. (Adeóque, si Pondera sint æqualia; erit, propter $m = n$, celeritas $\frac{r - s}{2} C$: Si verò tum $m = n$, tum $r = s$; vel m, n, ipsis r, s, reciprocè proportionales; quò fiat $mr = ns$: nulla futura erit in utramvis partem celeritas; sed se mutuò sistent æquales vires contrariæ.) Quod erat propositum.

Ideóque Gravis A momentum, quod priùs fuerat $mrPC$, jam fit $\frac{mr - ns}{m + n} mPC$; & Gravis B momentum, quod fuerat $nsPC$, jam fit $\frac{mr - ns}{m + n} nPC$. Adeóque momentum ex præpollente demptum & in reliquum collatum, est $mrPC - \frac{mr - ns}{m + n} mPC = \frac{nr + ns}{m + n} mPC = \frac{mr + ms}{m + n} nPC = \frac{r + s}{m + n} mnPC$.

PROP. V.

Ictûs magnitudo æquipollet duplo momenti ablati in directè impingentium (si quod sit) fortiori.

SI intelligatur enim Motorum (si quod sit) fortius, (vel, si sint momentorum æqualium, utrumvis,) ut Percutiens; reliquum ut Percussum: Quantum Momenti Percutienti decidit, Percussum recipit, (puta; Vel resistendo seu sustinendo Vim; ut, si firmus Obex sit, cedere nescius; aut motum contrario impetu æquali: Vel suscipiendo novum impetum; ut, si priùs quiesceret; aut in easdem partes moveretur: Vel denique partim hoc, partim illud; ut, si occurrat motu contrario debiliori: quæ singulatim suis locis ostendentur:) quorum cùm utrumque sint effectus Ictûs, Ictus utrique æquipollet; hoc est, duplo momenti ablati in fortiori. Quod erat propositum.

Designo autem Ictûs magnitudinem, per momentum fortiori ablatum; quoniam effectus ictûs in fortiori, uniformis est, (nempe sola semper momenti deperditio,) adeóque facilius & simpliciùs verbis exprimitur:

exprimitur: effectus autem in reliquo est, nonnunquam impetûs deperditio, nonnunquam acquisitio novi impetûs, nonnunquam utrumque; sed, quicquid sit; æquipollet motui in fortiori deperdito.

PROP. VI.

Si Grave motum firmo Obici directè impingat: Ictus æquipollet duplo momento gravis impingentis.
Sin Obex minùs firmus sit quàm ut sustinendo valeat: Ictus æquipollet duplo Vis restitivæ in Obice.

PUtà; si Gravis moti A, pondus sit mP, celeritas rC; adeóque Momentum seu Vis impellens $mrPC$: huic æqualis est in Obice Resistentia (utpote quæ Vim totam impactam immota sustinet atque hanc solam:) Cúmque utraque sint ab Ictu, Ictus utrique simul æquipollet, hoc est, duplo momenti impingentis, seu $2mrPC$. Quod propositum erat. Fig. 299.

Dico autem, Vi impellenti æqualem esse *Resistentiam*, potiùs quàm *Vim Restitivam*. Quippe Vis Restitiva major esse potest; nempe, si Obex majori vi impingenti sustinendæ par sit: sed quicquid virium superest, est hìc inutile, (uti & vis tota esset si nihil impingeret;) quò enim sustineatur vis impacta, sufficit vis æqualis; nec motum alteri inferri potest, quoniam resistit tantùm per modum impedimenti, non vis agentis contrariæ. per prop. 11, 12. Cap. 1.

Similiter ostendetur propositionis pars altera. Quippe quantacunque sit Obicis infirmi vis restitiva, puta $nsPC$; tanta impenditur ei amoliendo vis impellens; (&, quæ superest, est hìc superflua:) adeóque utriusque aggregatum (qui est effectus ictûs) $2nsPC$, duplum vis restitivæ, est Ictûs magnitudo. Quod itidem erat propositum.

Aliter.

Idem ostendi posset (sed mutato propositionum ordine) ex prop. seq. Quippe Obex firmus, ictum quod spectat, tantundem resistit quantum directè occurrens impetu æquali, (utrobique enim sistitur impingens Grave:) verùm illic ictus æquipollet utriusvis duplo; per prop. seq. Ergo & hìc.

Similiter.

Ostendetur idem ex prop. 14. Nempe, si duo Gravia utcunque inæqualia, quibuscunque celeritatibus, directè occurrant; ostenditur

ictûs magnitudo $\frac{r+s}{m+n} 2mnPC$: adeóque si intelligatur Obicis celeritas $sC = oC$ (quippe nulla;) seu quantumvis exigua; adeóque pondus $nP = \infty P$ infinitum (nam nisi hoc ponatur, propter $s = o$, momentum $nsPC$ non sustinebit vim impactam,) erit $\frac{r+s}{m+n} 2mnPC$ $= \frac{\infty}{\infty + m} 2mrPC = 2mrPC$ (nam propter ∞ infinitum, tantundem erit $\frac{\infty}{\infty + m}$ atque $\frac{\infty}{\infty} = 1$:) hoc est, vis impingentis duplum. Quod erat propositum.

PROP. VII.

Si duo Gravia Æqualia, æqualibus celeritatibus; vel Inæqualia, celeritatibus reciprocè proportionalibus; sibi mutuò directè occurrant: Ictûs magnitudo æquipollet momentis simul utriusque; seu utriusvis duplo.

Fig. 302. PUtà, si sit Gravis A, pondus mP, celeritas rC, adeóque momentum $+mrPC$ (prorsum:) atque Gravis B, pondus item mP & celeritas $-rC$; vel pondus rP & celeritas $-mC$; adeoque (utrovis casu) momentum $-mrPC$ (retrorsum:) Cùm, quod Ictus hoc in casu efficiat, sit (propter æquales impetus contrarios) utriusque sublatio, per prop. 4. hujus; erit Ictûs magnitudo $2mrPC$ (momentis simul utriusque æquipollens) per prop. 5. hujus.

PROP.

PROP. VIII.

Si duo Gravia communi aliquo motu ferantur; tantundem est, quantum ad Ictûs magnitudinem, atque si utrobique abesset.

Adeóque communis motus, additus vel demptus, Ictûs magnitudinem non immutat.

Si enim B præcedens eâdem celeritate fugiat (aut etiam majori) quâ sequitur A, nulla fit motûs obstructio seu impeditio, utut conjuncta fuerint A B, (nedum si disjuncta;) adeóque nullus Ictus. Si verò A celeriùs sequatur, putà celeritate $rC = sC + tC$; & B præcedat segniùs, putà Celeritate sC: saltem quantum ad celeritatem utrique communem sC, nulla fit impeditio; quippe eatenus se subducit antecedens, ictum declinans; totúmque illud motûs cui ulla fit obstructio, est quod ex tC celeritatis excessu oritur. (Idémque eâdem analogiâ ostendetur de aliis motibus communibus.) Adeóque ob additum vel demptum communem motum (utpote qui, hoc respectu, nullius instar est) nulla fiet Ictûs immutatio. Fig. 301.

SCHOLIUM.

Hinc est, quòd duorum in eâdem Navi placidè latorum alter alterum eâdem vi percutit acsi uterque in littore staret; motu navis, utpote utrique communi, ictum nec adjuvante nec impediente. Item, projectionum & percussionum Phænomena eadem contingunt omnia apud nos in terrâ positos, sive cum terrâ junctim ferantur omnia communi motu, sive cum terrâ unà quiescant; quippe communis eorum cum terrâ sive motus sive quies hæc Phænomena non immutat, sed projectiones & percussiones æstimandæ sunt ab iis motibus qui rebus hîc in terrâ existentibus peculiares sunt, & non cum ipsâ terrâ communes. Adeóque, quæ afferri solebant objectiones à projectionibus inæqualibus eâdem vi faciendis, prout vel ad Orientem ad Occidentem fierent; atque inæqualibus percussionibus à Tormento Bellico globulum emittente futuris, prout in has aut illas partes explosio fieret; & quæ sunt hujusmodi; etiam ipsis nunc dierum fatentibus qui motum Terræ negant,

negant, nihil in utramvis partem probant sive de Quiete Terræ sive de Motu. Hinc item qui ictum Gladii quadantenus declinans accipit, minori vulnere afficitur, quàm si immotus acciperet, nedum si obviam iret. Aliáque multa hujusmodi.

PROP. IX.

Si Grave motum, æquali quiescenti, (non impedito,) directè impingat: Ictûs magnitudo, momento gravis moti æquipollet.

Fig. 300. Esto Gravis moti A, pondus mP, celeritas rC, adeóque momentum $mrPC$; quod in æquale B quiescens directè impingat; ferentur deinceps utraque celeritate dimidiâ, $\frac{1}{2}rC$; adeoque momentum A quod prius fuerat $mrPC$, jam propter pondus mP, fiet $mP \times \frac{1}{2}rC = \frac{1}{2}mrPC$, amisso momenti dimidio $\frac{1}{2}mrPC$; & momentum B, quod priùs (utpote quiescentis) nullum erat, jam, propter itidem mP pondus, fiet $mP \times \frac{1}{2}rC = \frac{1}{2}mrPC$, de novo acquisitum; per prop. 2. hujus. Cùm itaque deperdat A momentum $\frac{1}{2}mrPC$, atque acquirat B momentum itidem $\frac{1}{2}mrPC$, utriusque aggregato $mrPC$ (quod momentum fuerat gravis A) æquipollet Ictûs magnitudo, per prop. 5. hujus.

Idem Aliter.

Esto, ut priùs, Gravis A, pondus mP, celeritas rC, adeóque momentum $mrPC$, quod in æquale B quiescens directè incurrat. Atque intelligatur utrique accedere communis motus celeritate $-\frac{1}{2}rC$ (retrorsum.) Quo casu feretur A celeritate $rC - \frac{1}{2}rC = \frac{1}{2}rC$ (prorsum) & B celeritate $0C - \frac{1}{2}rC = -\frac{1}{2}rC$ (retrorsum;) Eritque Ictûs magnitudo $2mP \times \frac{1}{2}rC = mrPC$, per prop. 7. hujus. Sed eadem erit (per prop. præced.) Ictûs magnitudo, dempto illo qui addebatur communi motu; qui est casus propositus. Ergo, & hic, Ictûs magnitudo est $mrPC$; ut priùs.

PROP.

PROP. X.

Si duo Gravia Æqualia, celeritatibus Inæqualibus, in easdem partes ferantur; & sequens antecedenti directè impingat: Ictus æquipollet momento utriusvis, Celeritatum Differentiâ lati.

SIt Gravis A, pondus mP, celeritas $rC = sC + tC$, adeóque momentum $mrPC$; quod in æquale B, celeritate sC præcedens (cujus itaque momentum $msPC$) directè impingat. Ferentur deinceps utraque (per prop. 3. hujus) celeritate $\frac{r+s}{2}C$; adeóque utriusvis momentum (propter utriusque pondus mP) $\frac{1}{2}mrPC + \frac{1}{2}msPC$. Deperdit itaque A (propter s minorem quàm r) momentum $mrPC - \frac{1}{2}mrPC - \frac{1}{2}msPC = \frac{1}{2}mrPC - \frac{1}{2}msPC = \frac{1}{2}mtPC$. Atque tantundem Gravi B acquiritur, propter $\frac{1}{2}mrPC + \frac{1}{2}msPC - msPC = \frac{1}{2}mrPC - \frac{1}{2}msPC = \frac{1}{2}mtPC$. Ergò, utriusque Aggregatum $mtPC$ est (per prop. 5. hujus) Ictûs magnitudo. Hoc est, momentum ponderis utriusvis mP, celeritatum differentiâ tC lati, (per prop. 27. Cap. 1.) quod erat propositum. Fig. 301.

Aliter.

Sit, ut priùs, Gravis A, pondus mP, celeritas $rC = sC + tC$; quod in æquale B celeritate sC præcedens directè impingat. Tantundem erit (ictum quod spectat) atque si (sublato utrobique communi sC) ferretur A celeritate tC, in B quiescens, (per prop. 8. hujus.) Adeóque (per prop. præced.) ictûs magnitudo $mtPC$, ut priùs.

PROP. XI.

Si duo Gravia Æqualia, celeritatibus utcunque Inæqualibus, ad contrarias partes lata, ſibi mutuò directè occurrant: Ictus æquipollet momento utriuſvis, Aggregato celeritatum lati.

Fig. 392. SIt Gravis A, pondus mP, celeritas $+rC$ (prorſum,) adeóque momentum $+mrPC$; & huic æqualis B, celeritas $-sC$ (retrorſum,) adeóque momentum $-msPC$, ſitque $r+s=z$; atque intelligatur $mrPC$ momentum præpollens. Erit (per prop. 4. hujus) utriuſque deinceps celeritas $\frac{r-s}{2}mP$; adeóque utriuſvis momentum $\frac{1}{2}mrPC-\frac{1}{2}msPC$. Deperdit itaque A, momentum $mrPC-\frac{1}{2}mrPC+\frac{1}{2}msPC=\frac{1}{2}mrPC+\frac{1}{2}msPC=\frac{1}{2}mzPC$. Et Grave B (propter A præpollens) deperdit totum ſuum momentum retrorſum $msPC$; ſed & acquirit momentum prorſum $\frac{1}{2}mrPC-\frac{1}{2}msPC$: Quæ duo ſimul ſumpta ſunt $msPC+\frac{1}{2}mrPC-\frac{1}{2}msP=\frac{1}{2}mrPC+\frac{1}{2}msPC=\frac{1}{2}mzPC$. Ergo, omnium Aggregatum, $mzPC$ eſt (per prop. 5. hujus) ictûs magnitudo. Hoc eſt momentum ponderis utriuſvis mP, celeritatum aggregato zC lati.

Aliter.

Sit, ut prius, Gravis A, pondus mP, celeritas $+rC$ (prorſum;) & huic æqualis B, celeritas $-sC$ (retrorſum;) ſitque $r+s=z$. Intelligatur utrique conferri motus communis celeritate $+sC$ (prorſum:) Unde fiet celeritas A, $rC+sC=zC$; & celeritas B, $-sC+sC=0C$. Hoc eſt, feretur A, celeritate zC in B quieſcens. Eritque ictûs magnitudo (per prop. 9. hujus) $mzPC=mP\times zC$. Tantúſque erit ictus in caſu propoſito, per prop. 8. hujus.

PROP.

PROP. XII.

Si Grave motum, Gravi quiescenti, utcunque inæquali, directè impingat: Erit Ictûs magnitudo, ad momentum Gravis moti, ut quiescentis pondus duplum ad ponderis utriusque aggregatum.

SIt Gravis A moti, pondus mP, celeritas rC, adeóque momentum $mrPC$; quod directè impingat in quiescens B, cujus pondus nP, (momentum, utpote quiescentis, nullum.) Erit (per prop. 2. hujus) celeritas deinceps utriusque $\frac{mr}{m+n}C$: Adeóque momentum A (propter pondus mP,) $\frac{mr}{m+n}mPC$; & momentum B (propter pondus nP.) $\frac{mr}{m+n}nPC$. Deperdit itaque A, momentum $mrPC - \frac{mr}{m+n}mPC = \frac{mnr}{m+n}PC$. Atque tantundem (ut ostensum est) acquirit B, (utpote cujus momentum prius nihil erat.) Ergo (per prop. 5. hujus) utriusque aggregatum $\frac{2mnr}{m+n}PC$ est ictûs magnitudo. Est autem illud ad $mrPC$ expositum momentum gravis moti, ut $2n$ ad $m+n$; hoc est, ut duplum pondus expositi quiescentis, ad simul utriusque pondus. Quod erat propositum. Fig.300.

Aliter.

Sit, ut prius, Gravis A, pondus mP, celeritas rC, adeóque momentum $mrPC$; quod directè impingat in B quiescens, cujus pondus nP. Intelligatur celeritas rC in duas partes dividi, ponderibus reciprocè proportionales; puta, $\frac{n}{m+n}rC$, quæ respiciat pondus mP; & $\frac{m}{m+n}rC$, quæ respiciat pondus nP. Atque conferatur utrique motus communis celeritate $-\frac{m}{m+n}rC$ (retrorsum:) quò fiat celeritas A, $rC - \frac{m}{m+n}rC = \frac{n}{m+n}rC$ (prorsum;) & celeritas

B, $o\,C - \frac{m}{m+n} r\,C = - \frac{m}{m+n} r\,C$ (retrorsum;) adeóque celeritates ponderibus reciprocè proportionales, ad partes contrarias; ictûsque magnitudo (per prop. 7. hujus) $m\,P \times \frac{n}{m+n} r\,C + n\,P \times \frac{m}{m+n} r\,C = \frac{2\,mn}{m+n} r\,P\,C = \frac{2\,n}{m+n} \times m\,r\,P\,C$; quod itaque est ad $mrPC$ expositum momentum moti A, ut $2\,n$ ad $m+n$, (ut priùs:) Tantúsque erit ictus in casu proposito, per prop. 8. hujus.

PROP. XIII.

Si duo Gravia, vel æqualia vel inæqualia, celeritatibus quibuscunque, ad easdem partes ferantur, & Sequens Antecedenti directè impingat: Erit Ictûs magnitudo, ad momentum gravis Sequentis celeritatum differentiâ lati; ut duplum ponderis Antecedentis, ad simul utriusque pondus; ad momentum verò Antecedentis eadem celeritatum differentiâ lati, ut duplum Sequentis, ad simul utriusque pondus; hoc est, ad momentum utriusvis differentiâ celeritatum lati, ut duplum reliqui ad simul utriusque pondus.

Fig. 301. ESto Gravis A Sequentis, pondus $m\,P$, celeritas $r\,C$, adeóque momentum $m\,r\,P\,C$; Antecedentis B, pondus $n\,P$, celeritas (minor) $s\,C$, adeóque momentum $n\,s\,P\,C$; sitque $r = s + t$. Erit (per prop. 3. hujus) utriusque deinceps celeritas $\frac{mr + ns}{m+n} C$; adeóq; momentum A (propter pondus $m\,P$,) $\frac{mr+ns}{m+n} m\,P\,C$; & momentum B (propter pondus $n\,P$,) $\frac{mr+ns}{m+n} n\,P\,C$. Deperdit itaque A, momentum $m\,r\,P\,C - \frac{mr+ns}{m+n} m\,P\,C = \frac{mnr - mns}{m+n} P\,C$. Atque tantundem acquirit B, propter $\frac{mr+ns}{m+n} n\,R\,C - n\,s\,P\,C =$

$\frac{mnr - mns}{m + n} PC.$ Adeóque (per prop. 5. hujus) utriusque aggregatum est ictûs magnitudo. Hoc est $\frac{2mnr - 2mns}{m + n} PC = \frac{r - s}{m + n} 2mnPC = \frac{2mn}{m + n} tPC = \frac{2n}{m + n} mPtC = \frac{2m}{m + n} nPtC$: Hoc est, ad momentum Sequentis mP celeritatum differentiâ tC lati, ut $2n$ ad $m + n$; hoc est, ut duplum pondus Antecedentis ad simul utriusque pondus: atque ad momentum Antecedentis nP eâdem differentiâ tC lati, ut $2m$ ad $m + n$; hoc est, ut duplum pondus Sequentis ad simul utriusque pondus. Hoc est, ad momentum utriusvis, celeritatum differentiâ lati, ut reliqui pondus duplum ad simul utriusque pondus. Quod erat propositum.

Aliter.

Esto, ut priùs, Gravis A sequentis, pondus mP, celeritas rC; atque antecedentis B, pondus nP, celeritas sC; sitque $r = s + t$. Intelligatur autem, motu communi, utrique detracta celeritas sC. Quo facto, B ad quietem redigitur, propter $sC - sC = oC$; eique impingit A, tanquam quiescenti, celeritate $rC - sC = tC$. Eritque ictûs magnitudo (per prop. præced.) $\frac{2mn}{m + n} tPC = \frac{2n}{m + n} mtPC = \frac{2m}{m + n} ntPC$, ut prius. Idémque erit ictûs magnitudo in casu proposito, per prop. 8. hujus.

PROP. XIV.

Si duo Gravia, æqualia vel inæqualia, quibuscunque celeritatibus, motibus contrariis sibi mutuò directè occurrant: Erit ictûs magnitudo, ad momentum alterutrius gravium, celeritatum Aggregato lati, ut reliqui pondus duplum ad simul utriusque pondus.

Sit Gravis A, pondus mP, celeritas $+ rC$ (prorsum,) adeóque momentum $+ mrPC$; & Gravis B, pondus nP, celeritas $- sC$ (retrorsum,) adeóque momentum $- nsPC$; quæ sibi mutuò directè impingant; sitque $r + s = z$; atque intelligatur momentum $mrPC$ Fig. 302.

præpollens.

præpollens. Erit (per prop. 4. hujus) utriusque deinceps celeritas $\frac{mr - ns}{m + n} C$: Adeóque gravis A (propter pondus mP) momentum $\frac{mr - ns}{m + n} mPC$; & gravis B (propter pondus nP) momentum $\frac{mr - ns}{m + n} nPC$. Deperdit itaque A momentum $mrPC - \frac{mr - ns}{m + n} mPC = \frac{nr + ns}{m + n} mPC$. Et B deperdit (propter A præpollens) totum quod habuerat momentum retrorsum $nsPC$; & simul acquirit momentum prorsum $\frac{mr - ns}{m + n} nPC$; quæ duo simul sumpta sunt $nsPC + \frac{mr - ns}{m + n} nPC = \frac{mr + ms}{m + n} nPC = \frac{nr + ns}{m + n} mPC$, (quantum scilicet deperderat A.) Adeóque omnium aggregatum $\frac{r + s}{m + n} 2mnPC = \frac{2mn}{m + n} zPC = \frac{2m}{m + n} nzPC = \frac{2n}{m + n} mzPC$, est (per prop. 5. hujus) ictûs magnitudo. Quod itaque est ad $mzPC$ ut $2n$ ad $m + n$, & ad $nzPC$ ut $2m$ ad $m + n$; hoc est, ad momentum alterutrius gravium aggregato celeritatum lati, ut reliqui pondus duplum ad simul utriusque pondus. Quod erat propositum.

Aliter.

Sit, ut priùs, Gravis A, pondus mP, celeritas $+ rC$ (prorsum;) & Gravis B, pondus nP, celeritas $- sC$ (retrorsum;) quæ sibi mutuò directè occurrant; sitque $r + s = z$. Intelligatur autem utrique addi, motu communi, celeritas $+ sC$ (prorsum:) Quo fiat gravis A celeritas $rC + sC = zC$; & B quiescens (propter $-sC + sC = 0C$;) Adeóque ictûs magnitudo (per prop. 12. hujus) $\frac{2n}{m + n} mzPC = \frac{2m}{m + n} nzPC$; ut priùs. Idémque est ictûs magnitudo in casu proposito, per prop. 8. hujus.

PROP.

PROP. XV.

Percussiones particularum Gravis percutientis, pro variâ ejusdem Figurâ & Positione; calculo æstimantur. Adeoque & *Centrum Virium*, seu *Percussionis*. Quod ipsum est Punctum Percussionis maximæ.

Intelligatur A B, Pertica, Cylindrus, Prisma, aut istiusmodi corpus quodpiam; parallelo motu latum: Erunt ejus Partes infinitesimæ, (secundum longitudinem æquales,) ut 1, 1, 1, 1, &c. series Æqualium: Earúmque respectivæ Celeritates (utpote æquales, propter motum parallelum,) item ut 1, 1, 1, 1, &c. series Æqualium: Adeoque &, quæ inde resultant, Momenta seu Vires, erunt itidem ut 1, 1, 1, 1, &c. series Æqualium. Et propterea, si per mediam longitudinem secetur Axis in V; erit utrinque tantundem Virium. & in distantiis Æqualibus. Adeóque V, *Centrum Virium*, seu Percussionis. Fig. 303.

Quod quidem non aliter differt à Centro Æquilibrii, (de quo Cap. 3. dictum est,) quàm quod (sumpto Axe prismatis pro Librâ) momenta, seu Libræ Gravamina, sunt illic (potissimùm) nuda Pondera (quamquam nec alia gravamina ibidem excludantur,) hic verò Pondera cum Impetu, ex celeritate contracto.

Idem similiter obtinet quæcunque sit figura Gravis A B, parallelo motu lati: Nempe, Centrum Virium V, idem esse atque Centrum Gravitatis figuræ. Quippe cum Celeritates sint series Æqualium; eadem erit Virium series quæ Ponderum: per Schol. prop. 1, 2. Cap. 5. Fig. 304.

Intelligatur deinde idem Cylindrus seu Prisma A B, circa Axis extremum A rotari. Cujus itaque Particulæ (ut priùs) erunt ut 1, 1, 1, 1, &c. seu 1 *P*, 1 *P*, 1 *P*, 1 *P*, &c. series Æqualium. Celeritates autem respectivæ, (ab A centro Motus inchoando) ut Arcus B B, & huic paralleli, sectorem B A B complentes; (quippe, propter æqualia Tempora, Celeritates erunt ut transfactæ Longitudines; per prop. 23. Cap. 1.) hoc est, ut eorum Radii, seu Distantiæ ab A; hoc est, ut Rectæ Triangulum A B C complentes, (ipsi B C parallelæ:) Nempe, ut 1, 2, 3, 4, &c. seu 1 *C*, 2 *C*, 3 *C*, 4 *C*, &c. series Primanorum. Adeóque, propter Pondera invicem æqualia, Vires itidem erunt ut Fig. 305.

series Primanorum; puta ut 1 *P C*, 2 *P C*, 3 *P C*, 4 *P C*, &c. seu ut eædem rectæ Triangulum complentes. Quæ itaque si ad A B latus Trianguli, tanquam ad Libram, applicari intelligantur; quæ per Trianguli Centrum gravitatis applicatur V C recta, designat in A B librâ Centrum Æquilibrii V. Et propterea, si similiter in V secetur A B axis Cylindri seu Prismatis; erit V Centrum Virium: Quippe quæ Rectis illis sunt proportionales.

Fig. 306. Sin Cylindrus idem seu Prisma, Centro Motûs M, in Axe ultra A continuato rotari intelligatur: Pondera erunt (ut priùs) ut 1 *P*, 1 *P*, 1 *P*, 1 *P*, &c. series Æqualium: Celeritates autem, ut Arcus descripti, seu eorum Radii; hoc est, ut Distantiæ ab M; seu rectæ complentes Trapezium A C C B: puta ut *a C*, *a C* + 1 *C*, *a C* + 2 *C*, *a C* + 3 *C*, &c. Series Æqualium aucta Serie Primanorum. Adeóque Momenta, seu Vires, aut libræ Gravamina, (propter Pondera invicem æqualia,) ut *aCP*, *aCP* + 1 *CP*, *aCP* + 2 *CP*, *aCP* + 3 *CP*, &c. series item Æqualium aucta serie Primanorum; seu ut eædem rectæ Trapezium complentes. Per cujus itaque Centrum gravitatis si ad A B latus trapezii ut Libram applicetur V C; erit V Centrum Æquilibrii: Et similiter, in V, secto axe A B, erit V Centrum Virium; utpote rectis illis proportionalium.

Fig. 307. Intelligatur demum A B Cuneus, seu Asserculus Triangularis (æquabiliter crassus:) Cujus itaque (ab acie A computando) particulæ (secundum longitudinem in axe A B æstimatam æquales) sunt ut 0 *P*, 1 *P*, 2 *P*, 3 *P*, &c. series Primanorum: Celeritates (rotatione circa A factâ) ut 0 *C*, 1 *C*, 2 *C*, 3 *C*, &c. (distantiis ab A proportionales) series itidem Primanorum: Vires itaque (in ratione ex utrisque compositâ) ut 0 *P C*, 1 *P C*, 4 *P C*, 9 *P C*, &c. series Secundanorum; seu ut rectæ complentes A B C complementum Semi-parabolæ: (aut Plana Conum seu Pyramidem complentia.) Per cujus itaque Centrum gravitatis si ad Libram A B applicetur V C; atque similiter, in V, secetur A B axis Cunei; erit V Centrum Virium; utpote rectis illis proportionalium.

Si autem circa rectam B (basin trianguli) rotetur Triangulum vel Cuneus A B: distantiæ à B erunt rectis huic parallelis, æqualiter à medio distantibus, reciprocè proportionales; adeóque respectiva Momenta (utpote in ratione ex magnitudinum & distantiarum rationibus compositâ) invicem æqualia; & propterea Centrum Virium in axis AB medio.

Si verò intelligatur A B grave, ultra A (Centrum motûs) continuari; id non impedit quin V ut priùs sit Centrum virium seu percussionis (ad partes B faciendæ;) sed vis augebitur ab impetu partium ultra A. Et similiter alibi.

Sin ſit M Centrum Motûs ſeu Rotationis in axe ultra A protracto: Fig. 308.
Erunt Pondera (ut priùs) ut $0P, 1P, 2P, 3P$, &c. ſeries Primanorum: Celeritates autem (diſtantiis ab M proportionales,) ut aC, $aC+1C, aC+2C, aC+3C$, &c. ſeries Æqualium ſerie Primanorum aucta. Et propterea Vires, ſeu Momenta, aut libræ Gravamina, ut $0aPC, 1aPC+1PC, 2aPC+4PC, 3aPC+9PC$, &c. ſeries Primanorum aucta ſerie Secundanorum. Putà, ut rectæ complentes Trilineum A B C, ex Triangulo A B T (quæ ſeries eſt Primanorum,) & ſemi-parabolæ Complemento A T C (quæ eſt ſeries Secundanorum,) ritè comparatis, compoſitum. Per cujus itaque Trilinei Centrum gravitatis quæ ad Libram applicatur V C, deſignat in A B librâ Centrum Æquilibrii V: & ſimiliter, in V, ſecto axe ſolidi, habetur Centrum Virium; utpote rectis illis proportionalium.

Intelligatur demum A B Conus ſeu Pyramis: Cujus itaque Parti- Fig. 307.
culæ (ab A vertice numeratæ) erunt ut $0P, 1P, 4P, 9P$, &c. ſeries Secundanorum: Celeritates autem (rotatione Centro A factâ) ut $0C, 1C, 2C, 3C$, &c. ſeries Primanorum: Adeóque Momenta ſeu Vires, ut $0PC, 1PC, 8PC, 27PC$, &c. ſeries Tertianorum: Putà ut rectæ complentes Semi-paraboloidis Cubicalis Complementum ABC. Per cujus itaque Centrum gravitatis ſi applicetur (ut priùs) V C; habebitur (ut ſupra) V Centrum Virium.

Sin M Centrum Motûs ſeu Rotationis ſit in axe ultra A protracto: Fig. 308.
Pondera erunt (ut priùs) ut $0P, 1P, 4P, 9P$, &c. ſeries Secundanorum: Celeritates verò (diſtantiis ab M proportionales) ut aC, $aC+1C, aC+2C, aC+3C$, &c. ſeries Æqualium ſerie Primanorum aucta. Et propterea; Vires, ut $0aPC, 1aPC+1PC, 4aPC+8PC, 9aPC+27PC$, &c. ſeries Secundanorum aucta ſerie Tertianorum: Putà, ut rectæ complentes Trilineum A B C, ex A B T complemento Semi-parabolæ, & A T C complemento Semi-paraboloidis Cubicalis, (ſic invicem aptatis ut caſus poſtulaverit,) compoſitum. Per cujus itaque Trilinei Centrum gravitatis ductâ V C; habebitur V Centrum Virium, ut prius.

Atque ad eandem formam mutatis mutandis, procedendum erit, quæcunque fuerit figura Gravis moti, (ſive ordinata, ſive utcunque inordinata,) & ubicunque ponatur Centrum Rotationis. Nempe, quæcunque fuerit Magnitudinum ſeu Ponderum ſeries; cum eâ componenda erit ſeries Celeritatum (utcunque acquiſitarum;) ut habeatur ſeries Virium ſeu Momentorum. Atque hæc momenta, ſi conſiderentur ut Libræ Gravamina; eiſdem legibus hic exquirendum erit Centrum Virium; quibus, in Cap. 3. Centrum Æquilibrii; &, in Cap.

Centrum Gravitatis. Nos casus aliquot ex simplicioribus selegimus quæ speciminum instar sint; & in quibus Axis solidi saltem Rectam determinat in quâ sit illud Centrum Virium; ut nihil hîc opus sit aliud quam ut datæ Libræ (momentis virium gravatæ) Centrum Æquilibrii inquiratur, secundum tradita Cap. 3. Si verò illud non esset; determinanda esset ea recta, eisdem methodis quibus determinandus est Axis Æquilibrii (in ordine ad Centrum Gravitatis inquirendum) Cap. 5. Atque in eo tandem Centrum Virium. Sed singulis casibus immorandum non erat.

Denique; Quod in Centro Virium sit maxima Percussio; sequitur ex prop. 8. & 18. Cap. 3. (ampliato sensu expositis.) Quippe Centrum Virium, est Libræ sic gravatæ (non nudis Ponderibus, sed Ponderibus cum Impetu) Centrum Æquilibrii; in quo si sustineatur Libra (quod hîc fit à corpore percusso) totarum Virium impetus sustinetur; (quippe, propter Æquilibrium, in neutram partem rotando feretur;) si verò extra hoc Virium Centrum (à percusso) sustineatur; ad eas partes rotando propendebunt Vires quâ est Virium Centrum; adeoque nec totus impedietur Motus: sed eâ saltem sui parte quâ Rotando minus procedit Centrum Virium seu Æquilibrii, quam si (non impeditum) rectè procederet. Quod, locis citatis, generali demonstratione ostenditur.

Si verò, percussione non in V puncto factâ, manu tenentis, putâ in A, impediatur ne fiat Rotatio circa punctum ictus in corpore percusso: Res referenda erit ad Vectem cum duobus Fulcris. Quippe motus Virium (seu, quod tantundem est, Centri Virium, per prop. 9. Cap. 3. vel prop. 16. Cap. 4.) partim Corpore Percusso, partim Manu Percutientis, tanquam duobus Fulcris, (utroque inferius posito, si Centrum Virium sit inter illa duo Fulcra; vel, si extra; altero inferius altero superius posito;) sustinetur: Secundum leges Cap. 6. (de Vecte duobus Fulcris sustento) traditas.

SCHOLIUM.

MOnendum hîc non incommodum duxi; processum à dato corporis percutientis Centro Gravitatis, ad ejusdem (circa Axem datum rotati) Centrum Virium inquirendum; alium non esse quàm à dato plani Centro gravitatis ad Ungulæ eidem insistentis (datam in eodem plano aciem habentis) Centrum gravitatis inquirendum. Quippe, ut illic, cum serie magnitudinum in Plano, componenda erit series altitudinum super istius plani respectivas particulas, (quæ quidem altitudinum

tudinum series alia non est quàm Distantiarum ab illâ Acie datâ,) & seriei compositæ commune Centrum inveniendum; (quod est Ungulæ Centrum gravitatis:) ita hîc, cum serie magnitudinum in corpore percutiente, componenda erit series Celeritatum in respectu istius corporis particulis, (quæ quidem series alia non est quàm Distantiarum à dato Rotationis axe,) & seriei compositæ commune Centrum (quod est Centrum Virium) inveniendum. Quo pacto autem Seriei Distantiarum cum serie Magnitudinum compositio fiat, ut seriei compositæ Centrum habeatur; ostenditur (tum alibi, in casibus simplicioribus; tum, in obstrusioribus,) ad prop. 10. Cap. 5. Quæ sæpiùs in Ungularum Centris gravitatis inquirendis (per totum illud caput) in auxilium advocatur; atque hic, pro inquirendis Centris Virium, similiter (ubi opus fuerit) advocanda erit. Quod generatim monuisse sufficiat; ne sit necesse ad particulares casus descendere (quod longum esset, & tædii plenum;) quos cujusque industriæ, ubi res postulaverit, calculo determinandos permitto, & ad generalem Methodum exigendos.

Notandum porro; cum Centrum Virium, uti illud jam determinavimus, sit (ut plurimum saltem) intra ipsum Solidum; Percussio autem, à Solido illo facta, sit in superficiei puncto aliquo: Si quis quærat, in quo superficiei puncto (pro hoc aut illo solidi percutientis situ) id contingat: Dicimus, in eo superficiei puncto contingere quod est in ipsâ Directione Centri Virium in ictûs instanti. Hoc est, si Centrum illud per rectam feratur, in eâ rectâ per quam fertur: si verò per curvam, in rectâ curvam illam (in ipso Virium Centro) tangentem, eo instanti quo fit Ictus; (putà, in rectâ V T, seu V C, fig. 307. quæ curvam V V tangat in V:) eandem enim directionem esse Curvæ cujusvis (pro dato in eâ puncto) atque Rectæ ibidem tangentis; ostendimus ad prop. 15. Cap. 2.

Moneo etiam (quod & supra insinuatum est,) Quâ ratione Grave (Ponderationem si spectes) perinde se habere acsi totum ibidem esset ubi est ipsius Centrum Gravitatis, per Schol. prop. 16. Cap. 4. Eâdem & (Percussionem quod spectat) perinde se habere Corpus percutiens, acsi totum ibidem esset ubi est Centrum Virium.

Atque hinc ad Funipendula æstimanda, via patet: Nempe, cujuscunque figuræ sit suspensum solidum, (putà Cylindricum, Conicum, aliúdve,) tantæ longitudinis (vibrationem quod spectat) reputandum esse, quanta est distantia à suspensionis puncto ad Centrum Virium. Adeóque, verbi gratiâ, (dato quod Funipendula ejusdem longitudinis, æqualibus temporibus vibrent,) si Conus vertice suspensus (cujus Cen-

trum Virium ut ex Calculo superiùs insinuato, à vertice distat, $\frac{4}{5}$ totius Axis seu Altitudinis,) cum Globulo ex tenuissimo filo (cujus itaque consideratio hic non habetur) suspenso, cujus longitudo sit (à puncto suspensionis ad Globuli Centrum Virium) ad longitudinem seu altitudinem Coni, ut 4 ad 5 ; æqualibus temporibus vibrabitur uterque : utpote quorum Centrum Virium æqualiter à puncto suspensionis distant. Atque similiter in aliis judicandum erit.

CAP.

CAP. XII.

De Cuneo.

DEFINITIONES.

DEF. I.

Cuneum, *plerumque adhibent, ex Ferro seu duriorum aliquo metallo; formâ Prismatis (non admodum alti) cujus oppositæ Bases sint Triangula Æquicrura Acutangula: Quorum utriusvis Altitudinem, appello* Altitudinem Cunei, *(non, Prismatis;) ejusdem Basem,* Cunei Crassitiem *appello; Rectámque quæ Triangulorum illorum Æquicrurorum Vertices conjungit,* Cunei Aciem: *quódque eorum Bases conjungit Parallelogrammum;* Cunei Dorsum.

II.

Malleum, *seu* Tuditem, *adhibent plerumque ex Ligno duriore, formâ* Cylindricâ *(vel ad eam proximè accedente,) adjuncto ad Latus* Manubrio, *cujus ope Percussor Ictum infligit.*

III.

Eodem etiam referenda sunt, Malleus Ferreus *quo Clavos adigimus;* Ascia, *vel* Securis, *quibus Ligna Dolamus, aut Dissecamus; prægrandes* Tudites, *seu* Arietes, *quibus Pila, Palos, Sudes, (aliáque similia,) in Terram adigimus: aliáque non absimilia Organa innumera.*

PROP.

PROPOSITIONES.

PROP. I.

Datis Mallei Pondere & Celeritate Cuneum percutientis, Cuneíque Formâ: Vis Cunei, sic percussi, Calculo æstimabitur.

Fig. 309. INtelligatur Ligni Tenacitas seu Firmitudo, Cuneo divellenda; aut quorumvis Obicum dirimendorum Resistentia, ut *O*.

Dico primo; si adhibeatur in Cunei Dorso D, vis *V* quæ sit ad *O*, ut C C cunei Crassities, ad ejusdem Altitudinem D A; (puta, ut *c* ad *a*;) Vis illa in D, æquipollebit Obici; Adeóque, aucta superabit. Cum enim, per prop. 5. Cap. 2. Motus in ea ratione polleant quæ ex rationibus Virium Motricium, & Progressuum Regressuumve secundum lineam directionis suæ componitur; Sitque amolitio Obicis (contra directionem suam) ad progressum Virium (secundum directionem suam) in C C ad D A, seu ut *c* ad *a*; (quippe dum detruditur Cuneus per totam suam Altitudinem D A, dirimitur Obex per totam ipsius Crassitiem C C, & in toto processu proportionaliter;) Si vires *V*, *O*, sint ipsis *a*, *c*, (progressibus suis,) reciproce proportionales; æquipollebunt motus; (propter ex Reciprocis compositam rationem Æqualitatis, per prop. 6. Cap. 1.) Hoc est, si sit ut *a* ad *c* sic *O* ad *V*; seu $V = \frac{c}{a} O$. Adeóque, si *V* major sit, movebit: per prop. 9. 11. Cap. 1.

Dico secundo, si sit Mallei ferientis Pondus, *P*, Celeritas, in percussionis instanti utcunque acquisita, *C*; (puta, sive id fiat ob Gravis motum naturaliter Acceleratum, sive etiam ob porro additam a Percussore vim;) adeóque Mallei Momentum seu vires *P C*; sitque $PC = V = \frac{c}{a} O$: Vis Mallei Cuneo directe applicata, Obici æquipollebit; adeóque aucta movebit.

Et quidem (ob eandem causam) eousque amovere seu amoliri perseverabit, donec sic impensa Vis *P C*, particulis Cuneo propioribus rumpendis aut flectendis per æquipollentiam absorbeatur.

Idémque Momentum secundò adhibitum, tantundem præstabit; & tertiò, tantundem: atque sic porro prout opus fuerit.

SCHO-

SCHOLIUM.

Sunt qui Cuneum, ad geminum Vectem referunt: quibus Vis in C, C, applicetur: Fulcra autem alii in O, O, ponunt; Oneráque in A utrinque protrudenda. Alii potius Fulcrum commune in A ponunt, & Onera in O, O; (eò potissimùm quòd, in Lignis aliisve diffindendis, Cunei Acies non semper rem diffindendam attingit uspiam, sed medio suspensa pendet; adeoque non potest ibidem dici onus depellere.) Ego verò (ut alia taceam incommoda) rem simpliciùs exponendam duxi ex ipsis Motuum Elementis: uti factum est.

PROP. II.

Eadem similiter accomodari poterunt, *Malleo ferreo*, Clavum adigenti; *Tuditi prægrandi* Pila, Sudes, Palosve præacutos in Terram altiùs defigenti; *Asciæ*, *Bipenni*, aut *Securi*, Ligna aliáve dolanti, dividenti, aut dissecanti; aliisve Instrumentis non absimilibus.

Quippe *Clavi*, *Pila*, *Sudes*, *Palive* præacuti, Cunei sunt: qui Malleo vel Tudite adiguntur. *Ascia*, *Bipennis*, *Securis*, & similia, sunt Malleus cum Cuneo connexo. Atque de aliis istiusmodi simile fiet judicium. Eadémque quæ ad prop. præced. habetur Demonstratio, pariter & hanc valebit.

CAP.



CAP. XIII.

De Elatere, & Resilitione seu Reflexione.

DEFINITIONES.

DEF. I.

Vim Elasticam *appello, eam quâ Corpus de figurâ suâ Vi detrusum, seipsum in figuram pristinam Restituere satagit.*

II.

Elaterem *appello, Corpus (aut etiam Partem Corporis) eâ Vi præditum.*

VIs ἐλαστικὴ, ab ἐλαύνω, *Agito, Abigo, Excutio, Expello,* descendit: ut & (ejusdem originis) ἐλατήρ. Vim eam insinuantes quâ Corpus, resiliendo, alia ab se Abigit.

Latinis (quantum scio) deest Vox propia quâ hoc significetur: unde factum est ut Vocabula Græca in usum sint recepta.

Elaterem Nostri *a Spring* vocant; à Verbo *to spring*, eâ significatione quâ *Salire* seu *Exsilire* significat, (ut Germanicum & Danicum *Springen*, Belgicum *Springhen,*) quæ est Vocis illius significatio primaria. Significat etiam (& fortè frequentiùs) sensu Metaphorico, *Germinare*; eò quòd Germina de surculo quasi *Exsiliant*: Atque hinc tempus Vernum *the Spring* dicitur; quo scilicet potissimum omnia Germinant. Sed & Aquæ Fons seu Scaturigo (Aqua Saliens dicta) *a Spring* dicitur; ob salientem Aquam. Item, *to spring a Mine*, dicimus, quando Cuniculum, pulvere pyrio instructum, admoto igne accendimus, & *Exsilire* facimus.

Hinc Corpus Elasticum, *a springy body* dicimus; hoc est, Corpus Elatere instructum: &, Vim Elasticam, *Springyness*.

Unde

Unde sit in Corporibus hæc Vis Elastica; non hic inquiro: Sed neque ipsius Naturam suscipio me ita explicaturum, ut vel Lectori, vel mihi ipsi, per omnia satisfaciam. Neque enim id necesse est ad rem præsentem. Sufficit ut, undecunque fuerit, Vim istiusmodi in rerum naturâ esse certum sit: Cùm & pressa resurgere; Corporáque suo nisu restituta, ab se alia abigere, nemo non videat. Atque de hac Vi, undecunque fuerit, jam agimus.



PROPOSITIONES.

PROP. I.

Si Grave motum, in firmum Obicem, directè impingat; sitque vel alterum vel utrumque Corpus Elasticum: Eâdem celeritate resiliet, seu repercutietur, quâ advenerat; & per eandem rectam.

Esto enim A Grave (cujus pondus $m\,P$, celeritas $r\,C$, adeóque momentum $m\,r\,P\,C$,) quod, per A A rectam, in firmum Obicem B directè impingat. Sítque non ita perfectè Durum; ut nullâ ratione ictui cedat, vel Corpus latum, vel Obex. Sed neque ita Molle, ut figuram pristinam ictu deperdat (quod in Cerâ, Plumbo, Luto, aliisque ejusmodi Corporibus vel fragilibus vel ductilibus fieri solet,) sed vim habeat Elasticam (alterum vel utrumque Corporum) quâ se restituere valeat in figuram pristinam, quamprimum Vis Comprimens cessaverit. Fig. 299.

Atque intelligatur Obicis pars percussa, Vi Corporis impellentis introrsum pressa; quæ itaque insitâ Vi Elasticâ se restituere conabitur.

Dico primò; Pressionem hanc eousque continuò fieri, donec Vis Elastica, compressioni adversa, Vi Comprimenti æquipolleat. Quippe quamdiu Vis Comprimens, fortior est quàm Elateris Resistentia, etiamnum Elaterem flectere seu comprimere perseverabit. per prop. 12. Cap. 1.

Est autem ea Vis comprimens, dupla momenti Gravis impingentis. Nam vis ab impingente Gravi illata, est ipsius momento æqualis (utpote cujus motus totus sistitur,) putà *mrPC*. Sed &, propter æqualem Obicis resistentiam, (quæ tantundem ad compressionem confert acsi æqualis vis contraria occurreret,) tantundem inde advenit, putà alterum *mrPC*; (sed cujus hic minor habenda ratio, utpote quod aliunde compensatur:) Adeóque vis tota compressiva, 2*mrPC*.

Dico porro; Vim Impellentem seu Comprimentem, ubi ad Æquipollentiam res redigitur, cessare; (utpote quæ tota flectendo Elatere impensa est.) Vis enim extrinsecus impressa, qualem supponimus Impellentem, (secùs quàm Vis insita, qualis est Gravitas, & Vis Elastica compressa,) ubi semel ad quietem redigitur, perit; neque valet seipsam restituere: ut neque se accelerare, ubi retardatur. Utut enim Corpus in motu, nisi impediatur, eo ipso perseverat: non acceleratur tamen, aut ex quiete in motum reducitur, absque causâ positivâ. per prop. 11. Cap. 1.

Dico itaque tertio; cessante (ut dictum est) motu Impellente, seu Comprimente, Vim Elasticam, jam liberam, & (ut modò demonstratum est) Vi pridem comprimenti æqualem, æqualiter utrinque se explicare nitentem, vim dimidiam seu alterum *mrPC* in Obicem impendere (utut irrito conatu,) alterum verò *mrPC* in advectum Grave. Quod itaque eâdem Vi, adeóque & eâdem Celeritate, Corpus A repellit, quâ advectum fuerat. (Nempe, Vi *mrPC*; adeóque, propter pondus *mP*, Celeritate *rC*.) Nam Vis Æqualis, eidem Ponderi applicata, eâdem Celeritate movet; per prop. 27. Cap. 1.

Dico denique; per eandem rectam repercussum iri. Cum enim à corpore directè impingente introrsum flectatur Elater, idémque Vi Elasticâ in figuram pristinam se restituat, per def. 1. hujus, (adeóque eâdem viâ redeat quâ premebatur,) eandem Directionem Corpori repercusso impertit quam inde acceperat, nisi quòd sit ad partes contrarias. Quod itaque per eandem rectam redibit.

Quódque jam demonstratum est, positâ in Obice Vi Elasticâ: perinde obtinet si Vis illa sit in Corpore impingente; vel etiam in utroque. Quippe illud utcunque obtinet; Non priùs sisti Vim Impellentem, quàm æquipolleat Elateris (sive Singularis, sive Gemini,) adversa Resistentia; sed neque ultra perseverare. Unde reliqua sequuntur.

Idem

Idem aliter.

Si Elater nullus esset; sisteretur motus A, ad quietem redactus: per prop. 1. Cap. 11. Totus igitur qui deinceps est motus, est ab Elateris Vi restitutivâ. Ea verò semper æqualis est Ictûs Vi, (Cap. 11. prop. 5. & seqq. traditæ.) Vis enim Elateri illata, Ictui (quem totum sustinet) æqualis est: quæ itaque Elaterem eousque comprimit donec hujus resistentia illi æquipolleat. Et quidem si resisteret ut nudum Impedimentum; quiesceret adhuc advectum Grave: Cùm verò Elater resistat, non ut nudum Impedimentum, sed ut Vis contraria, & quidem tantundem renitendo agens quantum compressus pateretur; sitque hoc quod patitur, Ictui seu Vi illatæ æquipollens: etiam eidem æquipollet Vis restitutiva. (Quod & in propositionibus sequentibus non minùs locum habet, adeóque & ibidem pro demonstrato habeatur.) Est autem, hoc casu, (posito Gravis A, pondere mP, & Celeritate rC,) Ictûs magnitudo (per prop. 6. Cap. 11.) $2mrPC$: tanta igitur erit Vis Elateris restitutiva: Quæ itaque cum utrinque se explicare satagat, adeóque Vi dimidiâ seu $mrPC$ in Obicem, utut irrito conatu; & in advectum A, vi item dimidiâ $mrPC$ repellendo: Erit, propter pondus mP, Celeritas (retrorsum) rC. Quod erat propositum.

Adhuc aliter.

Cùm nullus fortè sit tam firmus Obex quin aliquatenus percussioni cedat; utut tam exigua possit esse ea cessio ut omnem sensum fugiat, adeóque meritò negligatur & pro nullâ habeatur, & Obex pro immobili; (ut, verbi gratiâ, si musca vel pulex in telluris molem in aere pendulam insultum faceret:) Si res ita concipiatur; demonstrabitur idem (mutato propositionum ordine) ex prop. 8. hujus: Ubi supponitur A motum, in B quiescens, sed non impeditum, impingere. Quippe si illic sit A, ponderis mP (exigui) cum celeritate rC; B verò ponderis nP (immensè magni) quiescens: Erit impingentis A celeritas post contactum $\frac{m-n}{m+n} rC$ prorsum, (per prop. 8. hujus;) hoc est, (propter prævalentiam signi $-$, ponitur enim nP multo majus quàm mP,) $\frac{n-m}{m+n} rC$ retrorsum; quod (propter exiguam & planè contemnendam ponderis mP magnitudinem respectu immensi ponderis nP) tantundem erit, hoc casu, atque $\frac{n}{n} rC = rC$ retrorsum: Reliqui autem gravis B (per eandem prop. 8.) celeritas post contactum

$\frac{2m}{m+n} rC$; quæ (propter exiguam & planè contemnendam rationem m seu $2m$, ad n nedum ad $m+n$,) instar nullius erit; ut non immeritò dici possit B immotum quiescere.

Sin ea suppositio non admittatur, sed Obex B censeatur planè immobilis; censenda erit ejus firmitas æquipollere ponderi quiescenti sed non impedito nP, infinito, (pondus enim finitum non impeditum, nonnihil saltem movebitur, per eandem prop. 8.) Adeóque impingentis A, Celeritas post contactum (ibidem exhibita) $\frac{n-m}{m+n} rC$ retrorsum, erit $\frac{\infty - m}{m+\infty} rC$; quod tantundem est (propter finiti m ad infinitum ∞, rationem infinitè exiguam sive nullam,) ac $\frac{\infty}{\infty} rC = rC$. Et quiescentis pridem B, Celeritas post contactum $\frac{2m}{m+n} rC$, erit $\frac{2m}{m+\infty} rC$; quod tantundem est (propter m finitum, & n infinitum) atque $\frac{2m}{\infty} rC$, seu $\frac{0}{\infty} rC$, celeritas nulla; quare & B etiamnum quiescet. Prout alias ante demonstratum fuerat.

SCHOLIUM.

NOn ignoro; plerosque Mechanicorum Vim nescio quam in Motu incepto ponere, quâ (si procedere non possit) mutatâ directione (etiam absque novâ causâ) resiliat. Cùm verò hoc gratis dictum videatur, (ut novus motus absque novâ causâ incipiat,) & Postulatum, atque multis porro incommodis urgeri possit: Id me potissimum movet, quòd, utut nudum Impedimentum Motui tollendo sufficiat, (adeóque inceptum motum impedire valeat ne procedat;) quo tamen contrarius ponatur, Vi Positivâ videtur Opus: (per prop. 11, 12. Cap. 1.) Cúmque ea in Vi Elasticâ præsto sit, cur illam respuamus non video. (Præsertim cùm in Molli Corpore, vel etiam Fluido, in Solidum impacto, motum Sisti videamus, sed non Reflecti.)

Si tamen istiusmodi Corpus sit, ut nec ita Molle sit quin aliquid habeat Elasticæ Virtutis; nec ita interim Elasticum planè quin fractis Elaterum fibris aliquot (nec tamen omnibus) figuram quadantenus immutari patiatur: Resilitio quidem fiet, sed imperfecta. (Supponit enim Demonstratio, tam Validam esse Vim Elasticam, ut Vi Impellenti sustinendæ

sustinendæ par sit, absque aliquâ sui ruptione.) Sed & idem quadantenus accidit ob Medii resistentiam: quæ Motum tum Directum, tum Reflexum, sensim imminuit. Item, ob naturalem gravium Descensum; qui se cum reliquis motibus sensim inmnuabit. Sed eas considerationes, & (si quæ sint) extrinsecas alias, hic secludimus.

Notandum etiam; utut Vim Impellentem, quasi totam extrinsecùs Impressam supponamus; adeóque cessare totam ubi ad Æquipollentiam res redigitur: Fieri tamen posse, ut ea partim naturalis sit, à Gravitate orta; uti cùm deorsùm projicitur corpus impactum, aut etiam deorsum cadens motu naturaliter accelerato eum acquirit Impetum quo in Obicem impingit. Quod ubi contingit, moderatione opus erit. Separanda utique est Vis extrinsecus impressa, ab eâ quæ Gravitatis est simpliciter consideratæ: Eáque tota perit; dum hæc permanet, & Vim Elasticam eatenus obtundit, quò Resilitio imperfectior evadat & minori cum celeritate; Quin & tanta esse potest ut Elasticam Vim ita superet, ut quamvis aliquantulum resurgat (ob sublatam Vim extrinsecùs impressam, quâ etiam primitùs comprimebatur,) non valeat tamen impactum corpus ab se abigere.

Sed & qui accelerando acquiritur Celeritatis gradus, separandus erit à nativâ gravitate: Quippe Grave acceleratùm, ubi Objecto Obice ne procedat impeditur, nativam quidem Gravitatem retinet, sed acquisitam Celeritatem deperdit; atque deinceps tanquam à Quiete incipiens procedit, nullâ ratione habitâ Celeritatis pridem-acquisitæ sed jam deperditæ.

Sin (contra hanc de Vi Elasticâ hypothesin) objiciatur; Omnia omnino Corpora Dura, hujusmodi Resilitionem seu Reflexionem admittere; & quidem ea fortiùs quæ Duriora sunt & firmiora: Fieri quidem id omnino potest, nec interim adversari huic de Vi Elasticâ doctrinæ; Nempe, si & illa omnia Dura Corpora, sint etiam Elastica. Quod quidni dicendum sit, non video. Et quamquam quò Duriora sunt, eò minùs pressui cedant: cedunt tamen; &, quò minus cedunt, eò fortiùs resistunt, adeóque & repercutiunt. Et quamquam Cap. 11. (ubi de Percussione agitur) Duritiem præclusâ Elasticitate consideremus; (ut quid inde sequeretur demonstremus si nulla esset Vis Elastica:) Non tamen id volumus ut Vim Elasticam de Duris simpliciter negemus; cum nulla forsan sint Corpora ita simpliciter-Dura ut illam non habeant: (Utut, ita Mollia, forsan esse possint.) Et quidem ego (ut dicam quod res est) omnino existimo; Vel nulla esse Dura Corpora, quæ non sint Elastica; vel saltem (siqua sint) ea, invicem commissa, nullam Reflexionem pati; sed observare leges

Capitis

Capitis XI. Et quidem in Marmore, Vitro, Ligno, Fictilibus, Metallis durioribus, aliisque duris innumeris, Vim Elasticam inesse; non tantum ex sono edito (Bombo vel Tinnitu, prout repercussio tardior est vel expeditior,) auribus percipimus; sed Oculo, & Tactu, observare licet, ob tremorem utique notabilem.

PROP. II.

Si Grave motum, in firmum Obicem Obliquè impingat; sitque vel Alterum vel utrumque Elasticum: Resilitio, eâdem Celeritate (& in eodem Plano) ita fiet, ut Angulus Reflexionis sit angulo Incidentiæ æqualis.

Fig. 310. INtelligatur, in A B C planum firmum, per O B rectam obliquam, impingens Grave; Angulum Incidentiæ faciens O B A. Componetur hic motus Obliquus per O B, ex duobus motibus (per prop. 6. Cap. 10.) altero Parallelo, ut O P seu A B; altero Perpendiculari, ut P B. Quorum quidem ille (utpote parallelus) in A B C planum neutiquam offensat, neque ob eo impeditur: adeóque eâdem Celeritate quâ priùs procedet; putà, quo tempore ferebatur ab O A ad P B, eodem vel æquali feretur (æquali longitudine) à P B ad Q C. Altero verò (utpote perpendiculari) per P B in A B C planum directè impingit: adeóque, propter Vim Elasticam (sive alterius sive utriusque Corporis) in B puncto Incidentiæ, eâdem Vi, adeóque & eâdem celeritate, directè repercutitur per B P. per prop. præced. Hoc est, eodem seu æquali tempore feretur ab A C ad O Q quo ab O Q ad A C ferebatur; hoc est, eodem quo à P C ad Q C. Adeóque per rectam B Q. per prop. 6. Cap. 10. Et propterea, propter O P ipsi P Q æqualem, & P B seu B P communem, (omnesque æquali tempore transactas,) erit B P O triangulum triangulo B P Q simile & æquale, (& quidem, propter O P Q unam rectam, in eodem plano utraque:) Adeoque tum P B Q angulus æqualis angulo P B O, tum (reliquus ad rectum) Q B C angulus Reflexionis, (reliquo item ad rectum) O B A angulo Incidentiæ, æqualis. Quæ erant demonstranda.

SCHO-

SCHOLIUM.

Siquis autem ex Tyronibus (aut alius quispiam tyrone major) quiritet, Cur simplicissimum motum rectum OB, ex duobus compositum affirmem Gratis? Aut etiam, si compositum esse velim; cum tamen mille modis aliis, æquo jure, dici possit componi; cur ego, reliquis posthabitis, hoc præ cæteris modo compositum, affirmem Gratis; (nec Probem, tum Compositum esse, tum hoc non alio modo compositum?) Respondeo, Nullum ita simplicem esse motum posse, quin in plures componentes resolvi possit. Dum autem hunc præ cæteris modum seligo; utor ego meo jure, qui (cum quamlibet possim) eam adhibeo compositionem quæ præsenti negotio sit accommoda. Neque probandum erit, Compositionem hanc unicam, esse possibilem; sed, ex multis unam. Liberum utique est, pro suo cujusque constructoris arbitrio, ex Veris innumeris ea seligere quæ ad rem præsentem conducant.

Atque hoc perinde obtinet (ut aliis compositionibus rem illustrem) in aliis atque in præsenti casu. Notum utique est, numerum 12, componi ex 3 × 4, sed & ex 2 × 6, item ex 1 × 12, (aliisque modis innumeris per numeros fractos.) Si itaque exponatur numerus 12, dato Divisore 2 dividendus, & quæratur Quotiens: Afferam ego protinus, numerum 12 ex 2 × 6 compositum; adeóque sumpto Divisore 2, Quotiens erit 6. Sin oggerat aliquis, Numerum hunc Duodenarium de quo fit sermo, nullâ hujusmodi compositione constructum fuisse; sed nudâ Unitatum collectione; (putà, si totidem homines viritim collecti fuerint.) Cur itaque velim ego, numerum (additione merâ constructum) multiplicando compositum affirmare Gratis? Et quidem, si velim esse multiplicando compositum, cur sic compositum (ex 2 × 6) affirmem Gratis, cùm possit eodem jure ex 3 × 4, vel 1 × 12, &c. componi dici? nec probem, eo potiùs modo fuisse compositum? Num audiendus, inquam, est hic Objector? Annon reponendum statim videas, Non eò minùs numerum 12 ex factoribus 2 × 6 compositum esse, vel in eos resolubilem, quod fuerit (hac vice) additione constructus? Quippe cùm constitutus est numerus, utcunque constituatur, non ideo deperdit proprias affectiones. Quod autem non dixerim ex 3 × 4, vel 1 × 12, Compositum, (utut hæc vera sint, atque aliàs, ubi opus fuerit, dicenda,) sed ex 2 × 6: ratio in promptu est: Nempe, non quòd reliquæ compositiones non sint veræ, sed quòd ad præsens negotium sint inutiles. Quippe non

quærebatur

quærebatur numerus qui cum 1, vel 3, vel 4 compositus, sed qui cum 2 compositus, constituat 12.

Similiter; cùm possit Ratio *A* ad *B*, mille modis componi; putà ex *A* ad *C* & *C* ad *B*; vel ex *A* ad *D* & *D* ad *B*; vel ex *A* ad *E* & *E* ad *B*; &c. Si tamen datis rationibus *A* ad *B* (puta 1 ad 2) & *A* ad *C* (putà 1 ad 3) quæratur, quæ sit ratio *C* ad *B*: Dicendum erit, non quidem rationem *A* ad *B* compositam esse ex *A* ad *D* & *D* ad *B*; aut ex *A* ad *E* & *E* ad *B*; (quippe hæ compositiones, utut veræ sint, ad rem præsentem non faciunt;) sed, ex *A* ad *C* & *C* ad *B*: Adeóque, si ex ratione *A* ad *B* eximatur (altera componentium) *A* ad *C*, habebitur (reliqua) *C* ad *B*; (puta 3 ad 2.)

$$\frac{A}{B}=\frac{A}{C}\times\frac{C}{B}=\frac{A}{D}\times\frac{D}{B}=\frac{A}{E}\times\frac{E}{B}\ \&c.\qquad \frac{A}{C}\Big)\frac{A}{B}\Big(\frac{C}{B}.\qquad \frac{1}{3}\Big)\frac{1}{2}\Big(\frac{3}{2}.$$

Siquis autem quærat; cur velim ego rationem simplicissimam, 1 ad 2, compositam esse gratis affirmare? Et quidem, Cur sic compositam, cùm aliis mille modis non minùs componi possit? Omnino imprudenter atque imperitè hoc quæritur: Cùm nulla sit tam simplex ratio quæ non possit in plures resolvi: Neque, cur, reliquis posthabitis, hanc selegerim compositionem; aliam reddendam esse causam, quàm quòd hæc sit præsenti negotio reliquis accommodatior.

Pariter; si expositi Gravis, datum sit Momentum $mrPC$, & datum Pondus $2mP$, quæratur autem Celeritas: Respondendum, non quidem $mrPC=mP\times rC$, vel $=rP\times mC$ (quæ quidem vera sunt, & alias dicenda, sed nihil ad rem præsentem,) sed $mrPC=2mP\times\frac{1}{2}rC$; (adeoque Celeritatem quæsitam esse $\frac{1}{2}rC$:) Non utique quærebatur, quâ Celeritate pondus mP, seu rP, sed quâ $2mP$ ferendum sit ut momentum habeatur $mrPC$.

Atque similiter omnino in casu præsenti. Quippe cùm constet motum O B, eundem esse cum eo qui componitur ex O P & P B, (neque enim hoc negabitur;) quidni dicam motum O B ex O P & P B componi, aut (quod tantundem est) in hos resolubilem esse? (eodem jure quo, si constet numerum 12 eundem esse cum eo qui componitur ex 3 × 4, dixerim 12 ex 3 × 4 componi?) Et quamquam multis adhuc aliis modis componi possit; dum hunc præ cæteris seligo ut negotio præsenti accommodum; utor ego meo jure: Eodem usurus, si, exposito plano alio, aliam selegero compositionem. Quippe si pro A B C exponeretur planum $\alpha B \gamma$; eundem O B motum, compositum dicerem (non, ex O P & P B, sed) ex O π & π B. Adeóque, propter æquales O π, π χ, in eâdem parallelâ rectâ; & B π ipsi

π B

π B vel æqualem vel eandem ; Reflexionem futuram esse in B χ recta ; Angulúmque Reflexionis χ B γ, angulo Incidentiæ O B α æqualem. Has autem (respectivè) compositiones adhibeo, non quasi aliæ non essent veræ ; sed quod, ex veris multis, ea seligenda sit (utrobique) quæ ad rem propositam conducat. Id autem hic loci est ; ut totum illud motûs Obliqui O B cui adversatur planum A B C, vel α B γ, ab eo separem cui non adversatur : quod non aliter obtinetur, quam resolvendo motum obliquum in Parallelum est Perpendicularem.

Estque res hæc tam Clara, ut nullâ illustratione putaverim indiguisse, si non hoc ipsum seriò objectum viderim à Viro cum tyronibus non numerando.

PROP. III.

Si duo Gravia invicem Æqualia, æquali Celeritate sibi mutuò directè occurrant ; sintque (alterum vel utrumque) Corpora Elastica :

Aut etiam, si Gravia illa sint Inæqualia, sed Celeritates habeant reciprocè proportionales, (quo saltem Momenta sint Æqualia :)

Resiliet utrumque eâdem Celeritate quâ accesserat, & per eandem rectam.

INtelligantur, sic occurentia, A, B, gravia : quorum utriusque Pondus sit mP, Celeritas rC : Vel, illius quidem Pondus mP, Celeritas rC ; hujus verò Pondus rP, Celeritas mC : Adeóque (utrovis casu) Momentum utriusvis $mrPC$, & simul utriusque $2mrPC$. Quorum cùm utriusque Vim sustineat Elater (sive singularis sive geminus,) nec priùs flecti cesset quam hujus resistentia eorum utrique æquipolleat, (per demonstrata ad prop. 1. hujus ;) tum verò Vis impellens (ad quietem redacta, adeóque destructa,) urgere cesset : Elater Vi suâ (impellentibus æquali) æqualiter utrinque se expedire satagens, utrinque eâdem Vi (totius dimidiâ) $mrPC$ repellit gravia ; hoc est, eâdem quâ advehebantur ; adeóque & eâdem respectivè Celeritate ; per prop. 27. Cap. 1. Hoc est, si utrinque sit pondus mP, celeritate utrinque rC, (sed ad contrarias partes :) Sin secùs ; pondus mP Celeritate rC, & pondus rP celeritate mC : (propter $mrPC = mP \times rC$ = Fig. 302.

$= rP \times mC$:) Hoc est, eâdem Celeritate utrumque quâ advenerat. Et quidem per eandem rectam (contrariis motibus) propter Elaterem eâdem Directione redeuntem quâ premebatur; utpote ad figuram pristinam se restituere satagentem. Quod & in sequentibus propositionibus pariter intelligendum erit; adeóque & ibidem pro demonstrato habeatur.

Idem aliter.

Si Elater nullus esset; sisteretur motus uterque, ad quietem redactus; per prop. 4. Cap. 11. Adeóque totus qui deinceps est motus, est ab Elateris Vi restitutiva: Quæ tanta semper est quanta est Vis Ictûs; (ut ad prop. 1. hujus, ostensum est:) Hoc est, in casu præsenti, (per prop. 7. Cap. 11.) $2mrPC$. Quæ utrinque æqualiter se expedire satagens, agit utrobique ut $mrPC$: Adeóque repellit Pondus mP celeritate rC, & pondus rP celeritate mC: ut priùs.

PROP. IV.

Si duo Gravia Elastica (non ab invicem compressa) vel quiescant utraque; vel utraque per eandem rectam ad easdem partes æquali celeritate ferantur; vel denique Antecedens Celeritate majore; (sive invicem contigua sint, sive disjuncta:) Nullus Impulsus fiet, aut Elateris compressio; adeóque nulla propterea motuum immutatio.

Quare &, si, Gravibus aliàs motis, communis addatur (vel auferatur) Celeritas; nulla fit inde impulsûs mutatio, (aut quæ hinc sequuntur:) sed perinde est (Impulsum quod spectat, aut Elateris compressionem,) sive adsit sive absit communis illa celeritas.

PRopositio patet. Quippe, si utraque quiescant, nulla Vis utrivis infertur, nullus obstruitur motus, neutrum impellit reliquum, nulláque fit quæ ab impulsu esset Elateris compressio, aut quæ ab utrovis procederet motuum immutatio, (putà, quæ vel Celeritatem spectet, vel Directionem,) utut contigua fuerint ea Gravia; nedum si disjuncta.

Similiter, si ferantur utraque ad easdem partes eadem Celeritate.

Quippe,

Quippe, si disjuncta sint, manebunt adhuc disjuncta, (& quidem eodem intervallo,) propter eandem utriusque Celeritatem; adeóque ne quidem se contingent mutuò, nedum impellent. Sin contigua sint; dum tamen Antecedens eâdem Celeritate fugit quâ sequitur Insequens; utcunque nulla Vis infertur nulla motûs obstructio; adeóque nullus impulsus, nulla compressio, nulláque inde motûs immutatio.

Sin Antecedentis Celeritas sit major: tantum abest ut à segniùs Insequente prematur, ut hoc à tergo relinquatur, facto intervallo si fuerint contigua, & aucto ubi disjuncta fuerint.

Addo tamen, *modò ne sint ab invicem compressa:* Quippe, si hoc contigerit, Vis Elastica, quamprimum poterit, se exseret, motûsque immutationem efficiet.

Atque eâdem ratione constabit Corollarium. Quippe, quâ Celeritate fugit Antecedens, adeóque se subducens declinat ictum; eatenus sequenti non obstat, ejúsve motum obstruit, unde sequeretur impulsus vel compressio, (non magis utique quàm ubi sequenti contiguo se subducit antecedens;) sed tota Vis impulsiva seu compressiva, æstimanda est, ab excessu Celeritatis sequentis supra Celeritatem antecedentis ad easdem partes moti; qui idem utcunque erit quicunque vel addatur vel auferatur motus utrique communis.

Aliter.

Vel sic; Ob motum communem, nullus fit Ictus, vel ictûs immutatio; per prop. 7. Cap. 11. Ergo, nulla Elateris compressio (aut quæ hinc sequuntur) ut quæ Ictui æquipollet; per demonstrata ad prop. 1. hujus.

PROP. V.

Si Grave motum, Æquali Quiescenti (nec impedito tamen) directè impingat; sitque vel alterum vel utrumque Elasticum: Motum quiescet; & Quiescens movebitur, eâ Celeritate quæ fuerat priùs moti.

Esto Gravium hujusmodi invicem æqualium, A, B, pondus utriusvis *mP*. Quorum B quiescat; eique directè impingat A, Celeritate *rC*, adeóque Momento seu Impetu $mrPC = mP \times rC$. Vim huic æquipollentem Imprimeret Elateri, (eâdem seipsum exuens) quâ (retentâ) Elater post repelleret ipsum A (ad quietem redactum,) modò B fir- Fig. 300.

mum esset: per prop. 1. hujus. (Ut taceam id quod est ab Obice atque in Obicem rependitur.) Sed, propter non impediti B cessionem, quam ab A recipit Vim Elater, eandem cedenti B protinus impertit, (nec in se retinet, ut in casu prop. 1. quò possit A pòst repellere.) Unde factum est, ut impellens A (vi suâ destitutum quam in Elaterem impenderat) Quiescat; eâque Vi $mrPC$ (Elateris interventu in B collatâ) propellatur B; adeóque (propter mP pondus) Celeritate rC (prorsum,) quæ fuerat impellentis.

Demonstratio alia.

Sunto hujusmodi Gravia æqualia A, B, quorum utriusvis Pondus sit mP. Atque, in B quiescens, directè impingat A, Celeritate rC; adeóque Momento seu Impetu $mrPC$. Quo itaque, propter cessionem non impediti B, utraque junctim ferenda essent (si Vis Elastica abesset) Celeritate dimidiâ, $\frac{1}{2}rC$ prorsum, (propter $mrPC = 2mP \times \frac{1}{2}rC$;) per prop. 2. Cap. 11. Sed (propter Vim Elasticam) Elateri imprimitur Vis restitutiva ipsi $mrPC$ æquipollens. (Nam quamdiu Elateris flexio faciliùs fiat quàm utriusque Gravis processus, Elater porro flectitur; & quâ Vi flectitur, eâdem propter Vim Elasticam se restituit.) Elater itaque, utrinque se explicare satagens (diremptis invicem Gravibus) Repellit A, Vi $\frac{1}{2}mrPC$; atque eâdem Vi $\frac{1}{2}mrPC$ Propellit B; Adeóque (propter pondus utrobique mP,) A quidem Celeritate $-\frac{1}{2}rC$ (retrorsum;) B verò, Celeritate $+rC$ (prorsum.) Sed ferendum erat A alio nomine (ut dictum est) Celeritate $+rC$ (prorsum;) Ergo, cùm hoc nomine accedat Celeritas $-rC$ (retrorsum;) quiescet A (seu nullâ in utramvis partem Celeritate movebitur) propter $+\frac{1}{2}rC - \frac{1}{2}rC = 0C$. Ferendum autem erat B alio nomine (ut item ostensum est) Celeritate $\frac{1}{2}rC$ (prorsum;) sed & hoc nomine propellitur item Celeritate (prorsum) $\frac{1}{2}rC$: Ergo, tota Celeritas est $\frac{1}{2}rC + \frac{1}{2}rC = rC$ (prorsum;) hoc est, ea quæ fuerit prius moti A.

Vel sic brevius.

Positis ut priùs; ferenda essent utraque si Elater nullus foret, Celeritate $\frac{1}{2}rC$ prorsum; adeóque utrumvis momento seu Vi $\frac{1}{2}mrPC$; per prop. 2. Cap. 11. Est autem (per prop. 9. Cap. 11.) Ictûs magnitudo $mrPC$; atque huic æqualis Vis Elateris restitutiva, (per demonstrata ad prop. 1.) quæ se utrinque explicare satagens, dimidiâ Vi tum Repellit A, tum Propellit B; adeóque ipsi A impertit Vim $-\frac{1}{2}mrPC$ (retrorsum,) & B, Vim $+\frac{1}{2}mrPC$ (prorsum:) quæ si priùs positis respectivè addantur, fiet Vis in A $\frac{1}{2}mrPC - \frac{1}{2}mrPC = 0PC$; quod itaque quiescet; in B verò $\frac{1}{2}mrPC + \frac{1}{2}mrPC = mrPC$; (prorsum;)

(prorſum ;) quod itaque (propter pondus $m P$) feretur prorſum Celeritate rC quæ fuerat ipſius A.

Adhuc alia.

Sunto ea Gravia æqualia (ut priùs) A, B ; & quieſcenti B, directè impingat A, Celeritate rC prorſum. Intelligatur autem utrique ſuperaddi motus communis, Celeritate $-\frac{1}{2}rC$ (retrorſum ;) quò fiat Gravis A Celeritas $rC - \frac{1}{2}rC = \frac{1}{2}rC$ (prorſum,) & Gravis B Celeritas $-\frac{1}{2}rC$ (retrorſum.) Quo caſu, ferretur A, poſt contactum Celeritate $-\frac{1}{2}rC$ (retrorſum,) & B Celeritate $+\frac{1}{2}rC$ (prorſum,) per prop. 2. hujus. Sed (propter communem motum nullius inſtar, impulſum quod ſpectat, per prop præced) idem erit impulsûs effectûs in caſu præſenti. Si itaque in ſtatum priſtinum reſtituantur, demptâ utrinque quæ addebatur Celeritate $-\frac{1}{2}rC$, (ſeu, quod eodem recidit, additâ Celeritate $+rC$ prorſum,) habebitur Gravis A Celeritas $-\frac{1}{2}rC + \frac{1}{2}rC = 0C$; & Gravis B, Celeritas $+\frac{1}{2}rC + \frac{1}{2}rC = +rC$. Hoc eſt, quieſcet A, & feretur B prorſum, eâ Celeritate quæ fuerat ipſius A.

SCHOLIUM.

PLures hîc demonſtrationes congeſſi (ut & in aliis propoſitionibus,) non quòd diffidam ſingulis (velimque numero ſupplere quod Vi deeſt,) ineſt enim ſingulis ſua Vis : Sed, cùm pro vario lectorum guſtu modò hic modò ille demonſtrandi modus placeat magis, ut quam magis velit Lector eligat. Prima quidem, aut etiam ſecunda (ut ad prop. 1. & 3. Phyſicam rei cauſam magis explicant ; quam tamen in ſequentibus parciùs proſequor, ut quæ ab his dependent. Penultima (quæ ex Vi quæ foret ſi Elater nullus eſſet, eâque quæ ex Elateris Vi reſtitutivâ, ictui ſemper æquali, colligit Vim integram,) meis hypotheſibus Cap. 11. traditis maximè accommodata eſt, & demonſtratio Geometrica (uti mihi videtur) maximè genuina. Adjunxi tamen ultimam, in eorum præſertim gratiam quæ hypotheſibus illis meis (vix dum receptis) difficiliùs forſan ſint aſſenſuri. Eâ quippe methodo (quam, unà cum præcedente, ſequentibus item propoſitionibus accommodo,) miſſis aliis, ex ſolis prop. 3. & 4. hujus admiſſis (quas alii poſtulant, potiùs quàm probant, tanquam per ſe claras, aut experimentis Phyſicis ſatis comprobatas) ſequentes ſolo calculo elicit : ut (quicquid ſit de illis hypotheſibus, quas tamen ego maximè genuinas exiſtimo) nullus ſit de propoſitionum illarum veritate dubitandi locus ; ut quæ non aliter à meis hypotheſibus dependeat, quàm quod ego inde probem propoſitionem tertiam hujus, quam alii gratis poſtulant. Sed & exiſtimavi

istimavi non abs re fore, utriusque methodi consensum indicare: Adeóque Phænomena Motuum in Hypothesi nostra, (utut sint ex aliis principiis deducta; ipsáque Hypothesis nostra, in *Transactionibus Philosophicis* postmodum vulgata, *Societati Regiæ* prius fuerit exhibita & Regestis inserta, quam eorum vel vulgatæ fuerit vel exhibitæ;) eadem planè sint cum Phænomenis Hypothesium D. *Christophori Wrenni* nostri, & D. *Christiani Hugenii* Batavi. Id utique interest; quod, quæ illi vel postulant vel ex observatis nullâ habitâ Elateris ratione supponunt; nos, Elateris ope, ex primis Principiis deducimus: Phænomenis interim quæ nos inde ratiocinando colligimus, iisdem provenientibus quæ ex factis Experimentis observarunt ipsi. Ut inde minùs dubitandum sit, (cum singuli, clam reliquis, à diversis principiis, & diversis methodis ad eadem Phænomena pervenerimus,) quin in veritate Phænomenûn consentiamus omnes.

PROP. VI.

Si duo Gravia (Elastica) invicem æqualia, ferantur (per eandem rectam ad easdem partes) Celeritatibus inæqualibus, & consequens (majori Celeritate latum) antecedenti directè impingat: Ferentur, post contactum, ad easdem partes utraque, celeritatibus alternatis, seu invicem permutatis.

SIt Gravium illorum æqualium A, B, utriusvis pondus mP; celeritas illius, $rC = sC + tC$; hujus sC: adeóque momentum illius, $mrPC$; hujus, $msPC$; prorsum utraque. Eritque propterea Vis Elateris restitutiva (utpote Ictui æqualis, per demonstrata ad prop. 1.) $mrPC - msPC = mtPC$; per prop. 10. Cap. 11. Quæ æqualiter utrinque se explicare nitens, vi dimidiâ $\frac{1}{2}mtPC$, tum Repellit A, tum Propellit B; adeóque (propter pondus utrobique mP) confert illi celeritatem $-\frac{1}{2}tC = -\frac{r-s}{2}C$ (retrorsum;) huic, $+\frac{1}{2}tC = +\frac{r-s}{2}C$ prorsum. Sed & aliunde (si Elater nullus esset) ferendum

rendum erat utrumque Celeritate $\frac{r+s}{2}C$; per prop. 3. Cap. 11. Quâ utrobique additâ, fit Gravis A, celeritas $-\frac{r-s}{2}C+\frac{r+s}{2}C$ $=sC$; & Gravis B, celeritas $+\frac{r-s}{2}C+\frac{r+s}{2}C=rC$: Hoc est, prorsum utraque & celeritatibus permutatis.

Aliter.

Sint Gravia illa æqualia A, B; sitque antecedentis B, celeritas sC; insequentis A, celeritas (major) $rC=sC+tC$. Cum itaque sit utrique communis celeritas sC, tantundem est (compressionem quod spectat) atque si utrobique abesset; (per prop. 4. hujus.) Adeóque sequens A, celeritatis excessu tC, impingeret in B quiescens. Quo casu ferretur B, post contactum, celeritate tC (quæ fuerat insequentis A,) A verò (quiescens utique) celeritate $0C$; per prop. 5. hujus. Si itaque utrique restituatur, quæ communis fuerat, celeritas sC (modò dempta;) habebitur celeritas A, $0C+sC=sC$; & celeritas B, $tC+sC=rC$: Hoc est, ferentur utraque ad easdem partes, celeritatibus permutatis.

PROP. VII.

Si duo Gravia (Elastica) invicem æqualia, Celeritatibus inæqualibus (per eandem rectam ad contrarias partes) sibi mutuò directè occurrant: Ferentur deinceps ad partes contrarias, Celeritatibus invicem permutatis.

Sit Gravium æqualium A, B, utriusvis pondus mP; illius verò celeritas, rC (prorsum;) hujus verò $-sC$ (retrorsum;) sitque $r+s=z$. Erit momentum illius, $+mrPC$; hujus, $-msPC$: Adeóque Elateris (qui utrumque sustinet) Vis restitutiva (Ictui æqualis) $mrPC+msPC=mzPC$: per prop. 11. Cap. 11. Quæ, æqualiter se utrinque explicans, vi dimidiâ $\frac{1}{2}mzPC$ utrumque repellit; adeóque, propter pondus mP utrobique, confert Gravi A celeritatem $-\frac{1}{2}zC$ $=-\frac{r+s}{2}C$ (retrorsum;) & Gravi B celeritatem $+\frac{1}{2}zC$ Fig. 302.

=

$=+\frac{r+s}{2}C$ (prorſum.) Sed & ferenda erant utraque (ſi Elater nullus eſſet) celeritate $\frac{r-s}{2}C$; per prop. 4. Cap. 11. Quæ ſi utrobique addatur; habebitur celeritas A, $-\frac{r+s}{2}C+\frac{r-s}{2}C=-sC$ (retrorſum;) B verò, $+\frac{r+s}{2}C+\frac{r-s}{2}C=+rC$ (prorſum:) Hoc eſt, ad partes contrarias, celeritatibus permutatis.

Aliter.

Sit Gravis A celeritas (prorſum) $rC=sC+tC$; & Gravis B (eidem æqualis) celeritas $-sC$ (retrorſum;) quæ ſibi mutuò directè occurrant. Cúmque habeatur utrinque celeritas sC, ſed ad contrarias partes; ferrentur poſt contactum (propter has celeritates) A quidem, celeritate $-sC$ (retrorſum;) B verò, celeritate $+sC$ (prorſum;) per prop. 3. hujus. Sin demi intelligantur celeritates hæ; relinquetur Gravi A, celeritas tC, quâ feratur in B ut quieſcens: Et, propter hanc celeritatem, ferretur B (prorſum) celeritate tC; & A (quieſcens) celeritate oC: per prop. 5. hujus. Quæ ſi priùs memoratis reſpectivè addantur; habebitur Celeritas A, $-sC+oC=-sC$ (retrorſum;) & celeritas B, $+sC+tC=+rC$ (prorſum;) Hoc eſt, ad contrarias partes, celeritatibus permutatis.

Adhuc aliter.

Sint Gravia æqualia A, B, quæ ſibi mutuò directè occurrant; A quidem celeritate $rC=sC+tC$ prorſum; & B, celeritate $-sC$ (retrorſum.) Intelligatur autem utrique conferri (motu communi) celeritas $+sC$ prorſum; quò fiat Celeritas A, $rC+sC$ (prorſum;) B verò, $-sC+sC=oC$: (ut feratur A celeritate $rC+sC$, tanquam in B quieſcens.) Quod ſi ponatur; erit, poſt contactum, celeritas A, oC; B verò $rC+sC$ (prorſum;) per prop. 5. hujus. Sed & idem erit (impulſum quod ſpectat) in caſu propoſito. Si itaque utrinque dematur (quæ adjecta fuerat) celeritas $+sC$: habebitur ipſius A celeritas $oC-sC=-sC$ (retrorſum;) & B, celeritas $rC+sC-sC=rC$ (prorſum:) Hoc eſt, ad contrarias partes, celeritatibus permutatis.

PROP.

PROP. VIII.

Si Grave motum, quacunque Celeritate, in Grave quieſcens (æquale vel inæquale) directè impingat; (ſintque Elaſtica, alterum vel utrumque:)

Celeritas, poſt contactum, Gravis Impingentis, ad eam quæ priùs fuerat, eſt, ut differentia ponderum, ad eorundem ſummam; (& quidem prorſum vel retrorſum, prout Pondus impingentis majus eſt aut minus Pondere quieſcentis; ſin ea ſint æqualia, quieſcet:)

Celeritas autem Quieſcentis, fiet (poſt contactum) ad eam quæ fuerat Impingentis, ut duplum ponderis impingentis ad eandem ponderum ſummam. Adeóque ſi pondera fuerint æqualia, eâ celeritate quæ fuerat priùs moti.

ESto Gravis A moti, Pondus mP, Celeritas rC, adeóque Momentum $mrPC$: Et quieſcentis B (cui directè impingit A) Pondus nP. Erit Elateris vis reſtitutiva (ictui æqualis) $\frac{2mn}{m+n}rPC$, per prop. 12. Cap. 11. Quæ æqualiter utrinque ſe explicans, Celeritate dimidiâ $\frac{mn}{m+n}rPC$ tum Repellit A, tum Propellit B; adeóque confert illi (propter pondus mP) Celeritatem $-\frac{n}{m+n}rC$ (retrorſum;) huic (propter pondus nP) Celeritatem $+\frac{m}{m+n}rC$ (prorſum.) Sed & aliunde ferenda erant utraque (ſi Elater nullus eſſet) communi Celeritate $\frac{m}{m+n}rC$ (prorſum;) per propoſ. 2. Cap. 11. Quæ ſi utrinque addatur, habebitur Celeritas A, $-\frac{n}{m+n}rC+\frac{m}{m+n}rC=\frac{m-n}{m+n}rC$ (prorſum vel retrorſum prout m vel n majus fuerit; neutrà verò ſi fuerint æqualia, propter Fig. 300.

$m - n = 0$:) & Celeritas B, $+ \frac{m}{m+n} rC + \frac{m}{m+n} rC = \frac{2m}{m+n} rC$: Et quidem, si $m = n$, Celeritate rC. Quæ demonstranda erant.

Aliter.

Sit Gravis A, pondus mP; & Gravis B, pondus nP: atque intelligatur A, Celeritate rC, directè impingere in B quiescens. Intelligatur item dividi Celeritas rC, in partes ponderibus reciprocè proportionales; Nempe, $\frac{n}{m+n} rC$, quæ respondeat ponderi mP; & $\frac{m}{m+n} rC$, quæ respondeat ponderi nP. Atque intelligatur porro utrique subtrahi Celeritas (quæ B respicit) $\frac{m}{m+n} rC$, seu tantundem retrorsum addi; (Quæ communis vel additio vel subductio impulsûs valorem non immutat, per prop. 4. hujus:) Quò fiat Celeritas A, $rC - \frac{m}{m+n} rC = \frac{n}{m+n} rC$; & Celeritas B, $0C - \frac{m}{m+n} rC = -\frac{m}{m+n} rC$; quæ itaque sunt Ponderibus reciprocè proportionales. Repercutientur itaque (per prop. 3. hujus) eisdem Celeritatibus utraque quibus accesserant: Hoc est, A, Celeritate $-\frac{n}{m+n} rC$, (retrorsum;) & B, Celeritate $+\frac{m}{m+n} rC$ (prorsum.) Idémque erit impulsûs ratio in Casu præsenti. Adeóque si restituatur utrobique (quæ modò ablata est) Celeritas $\frac{m}{m+n} rC$ prorsum: habebitur Gravis A futura Celeritas $-\frac{n}{m+n} rC + \frac{m}{m+n} rC = \frac{m-n}{m+n} rC$ (prorsum vel retrorsum prout m vel n majus fuerit; neutrà vero si sint æqualia;) & Gravis B, Celeritas $\frac{m}{m+n} rC + \frac{m}{m+n} rC = \frac{2m}{m+n} rC$ (prorsum.) Ut priùs.

PROP.

PROP. IX.

Si duo Gravia (Elaſtica) utcunque vel Æqualia vel Inæqualia, & quibuſcunque Celeritatibus, ferantur utraque per eandem rectam, ad eaſdem partes; (ita tamen ut Inſequens, majore Celeritate latum, in Antecedens directè impingat:) Ferentur utraque, poſt contactum, eis Celeritatibus, & ad eas partes, quas ſubjectus Calculus indicabit.

Sit Antecedentis B, pondus nP, Celeritas sC prorſum: Sequentis A, pondus mP, Celeritas (major) $rC = sC + tC$. Erit Elateris Vis reſtitutiva (Ictui æqualis) $\frac{2mn}{m+n}tPC$; per prop. 13. Cap. 11. Quæ utrinque ſe æqualiter explicans, adeóque vi utrinque dimidiâ, $\frac{mn}{m+n}tPC$; Gravi A, propter pondus mP, Celeritatem confert $-\frac{n}{m+n}tC$ (retrorſum;) & Gravi B, propter pondus nP, Celeritatem $+\frac{m}{m+n}tC$ (prorſum.) Sed & aliunde ferenda erant (ſi Elater nullus eſſet) Celeritate communi $\frac{mr+ns}{m+n}C$, per prop. 3. Cap. 11. Quæ itaque ſi utrobique addatur; habebitur Gravis A futura Celeritas, $-\frac{n}{m+n}tC + \frac{mr+ns}{m+n}C = \frac{mr+ns-nt}{m+n}C$ $= \frac{mr-nr+2ns}{m+n}C$ (prorſum vel retrorſum, prout ſignum + vel − prævaluerit, adeóque neutrà ſi æquipolleant;) & Gravis B, Celeritas $\frac{m}{m+n}tC + \frac{mr+ns}{m+n}C = \frac{mt+mr+ns}{m+n}C = \frac{2mr-ms+ns}{m+n}C$ prorſum. Quod oſtendendum erat. Fig. 301.

Aliter.

Sit Gravis A, pondus mP; Gravis B, pondus nP: & ferantur utraque per eandem rectam ad eaſdem partes; putà, prorſum utraque:

B quidem, Celeritate sC; A verò, Celeritate (majore) $rC = sC + tC$, atque in B directè impingat. Intelligatur autem, motu communi, utrique detracta Celeritas sC, (Quæ, cùm communis sit, impulsum non mutabit, per prop. 4. hujus.) Quo facto, B ad quietem redigetur (propter $sC - sC = cC$;) eique directè impinget A, Celeritate $rC - sC = tC$. Quo casu, ferretur post contactum A Celeritate $\frac{m-n}{m+n} tC$ (prorsum vel retrorsum prout m vel n major fuerit) B verò Celeritate $\frac{2m}{m+n} tC$ (prorsum;) per prop. præced. Cùm itaque eadem sit ratio (impulsum quod spectat) in casu præsenti: Si restituatur utrobique, quæ modò ablata est, Celeritas sC prorsum; habebitur futura Celeritas Gravis A, $\frac{m-n}{m+n} tC + sC = \frac{mt+ms-nt+ns}{m+n} C = \frac{mr-nr+2ns}{m+n} C$ (prorsum vel retrorsum, prout signum + vel — prævaluerit, adeóque neutrà si æquipolleant;) & Gravis B, Celeritas $\frac{2m}{m+n} tC + sC = \frac{2mt+ms+ns}{m+n} C = \frac{2mr-ms+ns}{m+n} C$ prorsum. Ut priùs.

PROP. X.

Si duo Gravia (Elastica) utcunque vel Æqualia vel Inæqualia, & quibuscunque Celeritatibus, per eandem rectam, sibi mutuò directè occurrant: Ferentur utraque, post contactum, eis Celeritatibus, & ad eas partes, quas calculus indicabit.

Fig. 302. SIt Gravis A, pondus mP, Celeritas $+rC$ (prorsum;) & Gravis B, directè occurrentis, pondus nP, Celeritas $-sC$ (retrorsum;) sitque $r + s = z$. Erit Elateris Vis restitutiva (utpote Ictui æqualis) $\frac{2mn}{m+n} zPC$; per prop. 14. Cap. 11. Quæ æqualiter utrinque se explicare satagens, utrinque destribuit Vim dimidiam

$\frac{mn}{m+n}zPC$. Adeóque Gravi A, propter pondus mP, celeritatem confert $-\frac{n}{m+n}zC$ (retrorſum;) & Gravi B, propter pondus nP, celeritatem $+\frac{m}{m+n}zC$ (prorſum.) Sed aliunde ferenda erant utraque (ſi Elater nullus eſſet) celeritate $\frac{mr-ns}{m+n}C$, per prop. 4. Cap. 11. Quæ itaque ſi utrobique addatur; habebitur Gravis A futura celeritas $-\frac{n}{m+n}zC+\frac{mr-ns}{m+n}C=\frac{mr-nz-ns}{m+n}C=\frac{mr-nr-2ns}{m+n}C$ (prorſum vel retrorſum prout ſignum + vel — prævaluerit, adeóque neutrà ſi æquipolleant;) & Gravis B, celeritas $\frac{m}{m+n}zC+\frac{mr-ns}{m+n}C=\frac{mr+mz-ns}{m+n}C=\frac{2mr+ms-ns}{m+n}C$ (prorſum item vel retrorſum, prout prævaluerit ſignum + vel —, adeóque neutrà ſi æquipolleant.) Quod oſtendendum erat.

Aliter.

Sit Gravis A, pondus mP; Gravis B, pondus nP; quæ ſibi mutuò directè occurrant: A quidem celeritate rC (prorſum,) B verò celeritate $-sC$ (retrorſum:) ſitque $r+s=z$. Intelligatur autem (motu communi, qui itaque impulſum non immutabit, per prop. 4. hujus,) addita utrique celeritas $+sC$ (prorſum;) quò redigatur B ad quietem (propter $-sC+sC=oC$;) cui ut quieſcenti impingat A celeritate $rC+sC=zC$. Quo caſu ferretur, poſt contactum, A celeritate $\frac{m-n}{m+n}zC$; B verò, celeritate $\frac{2m}{m+n}zC$, per prop. 8. hujus. Adeóque, demptâ utrobique, quæ modò addebatur, celeritate sC; habebitur Gravis A, futura celeritas $\frac{m-n}{m+n}zC-sC=\frac{mz-ms-nz-ns}{m+n}C=\frac{mr-nr-2ns}{m+n}C$ (prorſum vel retrorſum prout ſignum + vel — prævaluerit; neutrà ſi æquipolleant:) & Gravis B, celeritas $\frac{2m}{m+n}zC-sC=\frac{2mz-ms-ns}{m+n}C=\frac{2mr+ms-ns}{m+n}C$ (prorſum item vel retrorſum, prout ſignum + aut — præpolleat; neutrà ſi æquipolleant.) Quod oſtendendum erat.



CAP. XIV.

De Hydrostaticis.

PROP. I.

A. Si Grave Fluidum (à latere ex omni parte & fundo ne effluat, conclusum; & ab aliâ Vi liberum;) supernè vel non prematur, vel æqualiter prematur ubique: Retinebit illud, supernam superficiem quod spectat, situm Horizontalem, seu potiùs Sphæricum, Telluri

B. concentricum: (quæ hic pro eodem habentur.) Atque, inde deturbatum, suapte se Gravitate eò restituet.

C. Sin supernè prematur Inæqualiter, (plus alibi, alibi minùs;) eâ parte quâ majori pressu urgetur, Descensus fiet; partibus ita pressis, alias, quæ vel non pressæ sunt, vel minùs pressæ, loco suo detrudentibus; quæ itaque, pro illo descensu, assurgent.

D. Quódque de Superficie supremâ dictum est; alii cuivis (intra fluidum) parallelæ, similiter accommodabitur.

A. Fig. 311. ESto Gravis Fluidi (vase conclusi, & ab aliâ Vi liberi,) superficies AB plana Horizontalis, (considerato scilicet Terræ Centro tanquam in infinitâ distantiâ, adeóque rectis perpendicularibus ut invicem parallelis;) seu potiùs Sphærica Telluri concentrica, (quæ hic pro eodem habentur,) quò partes ejus omnes sint æqualiter altæ, seu à Terræ Centro remotæ, (per prop. 3. Cap. 2.) Sítque supernè vel non pressa, vel æqualiter ubique pressa. Cùm itaque partes infernè positæ sursum (propter Gravitatem suam) non nitantur, (per pr. 1. Cap. 2.) quo possit superficiei hujus pars ulla elevari; nec locus infra sit (utpote qui æquè gravibus jam occupatus est) quò possit descendere; neque sit quod supernè deprimat, si non prematur; vel saltem quod hic magis quàm alibi deprimat

deprimat, si æqualiter prematur; nullúsque ea propter fiat motus, (per prop. 8. Cap. 2.) nihil est quod superficiem illam deturbet, quin retineatur.

Et quidem, si extra hunc situm, externâ Vi, deturbetur; ut sit pars alia, putà D, cæteris altior: se ipsum, ad situm debitum, gravitate suâ reducet Fluidum. Quippe pars illa D, partim deprimet (cum gravis sit) subjectas partes (ut post dicetur,) partim (cum fluida sit) diffluet in partes humiliores (propter Descensum qui sic obtinebitur, nec à partium connexione impeditur, utpote fluidum) per prop. 1. Cap. 2. Atque hoc (ob eandem causam) quamdiu pars ulla manet reliquis altior. Redigetur igitur ad situm Horizontalem, seu (quem diximus) Sphæricum. B.

Sin aliquid hic accidentarium contingat, sive propter Fluidi tenacitatem seu lentorem; sive quòd supernè premens non ita commodè se possit omnibus partibus accommodare, (quæ causa esse potest cur Hydrargyrum in vase vitreo protuberet;) sive ejusmodi aliud: id hujus loci non est; sed à præsenti consideratione præcludendum.

Si quâ verò sui parte præ cæteris magis prematur, ut in C; putà propter incumbens D Grave (quod saltem gravius sit quàm tantundem incumbentis Aeris, aliúsve quicquid sit æqualiter prementis,) aut aliam utcunque vim adhibitam: deprimentur fluidi partes in C, surgentibus alibi aliis, quò locus fiat depressis. per prop. 8. Cap. 2. C.

Quódque de superficie AB ostensum est, similiter ostendetur de quavis aliâ intra fluidum eidem parallelâ, ut EF; quæ scilicet sit Sphærica Terræ concentrica, seu (quod nobis hìc tantundem significat, ut & in sequentibus,) Planum Horizontale, (considerato scilicet Terræ centro tanquam in infinitâ distantiâ.) Nempe, si æqualiter ubique prematur, (à fluidi parte superiore, & siquod aliud est supernè, vel intra fluidum, vel fluido innatans,) situm retinebit; sicubi vero magis premitur, putà in G, ab incumbente H, (quod gravius sit quam Fluidi tantundem cujus locum occupat,) ibi deprimetur, surgentibus partibus minùs pressis. per prop. 8. Cap. 2. ut priùs. D.

Atque hinc, ut totidem Corollaria, inferuntur propositiones sequentes.

PROP.

PROP. II.

Fig. 311. Si Grave D, summæ fluidi superficiei A B horizontali, in C incumbens, æquè gravitet atque tantundem Aeris circumpositi, (aut quicquid sit quod Aeris instar est, æqualiter prementis;) retinebit A B situm horizontalem.

(Quod de Aere hic dicitur, & similiter in sequentibus, similiter intelligendum erit de alio quovis quod Aeris instar est; putà si Aquæ super natet Oleum, vel Spiritus vini, vel horum aliquod Hydrargyro, aut aliquod simile; nam & hic eadem est ratio.)

Sequitur ex præcedente. Quippe cùm C tantundem præcisè prematur ab incumbente D, acsi hoc sublato tantundem Aeris circumpositi (aut quod Aeris instar est) eundem locum occuparet; æqualiter ubique premitur.

PROP. III.

Fig. 311. Sin illud D minùs gravitet quàm tantundem circumpositi Aeris, aut quod Aeris instar sit, (nec avolet tamen, aut ab Aere circumposito sursum pellatur;) Assurgent subjectæ partes C, (utpote minùs pressæ,) subsidentibus aliis.

Qui quidem Ascensus partium C subjectarum, eousque perseverabit (nec diutiùs) donec fluidi partes sic ascendentes compensant ipsius D levitatem, ut aggregatum ipsius D partiúmque sic ascendentium æquè gravitet atque tantundem Aeris, aut quod Aeris instar est.

Fig. 312. Sequitur ex primâ hujus. Quippe dum (propter incumbens D leviùs quàm tantundem Aeris, aut quod Aeris instar est, ut ad prop.

prop. præced. expositum est,) minùs premitur C quàm superficiei A B partes reliquæ; assurgent partes C subjectæ, utpote minùs pressæ: (per prop. 1. hujus;) subsidentibus aliis. Idque eousque donec quod fluidi sic ascendit, ut K, unà cùm D, tantundem simul gravitent, quantum circumpositi Aeris (aut quicquid aliud sit ita circumpositum) tantum, quantum utriusque locum impleret. Donec enim id fit, minùs premitur; tum vero, æqualiter cum cæteris ipsius A B partibus premetur.

Dico autem, *Si non avolet D, aut ab Aere circumposito sursum pellatur.* Quoniam si à circumposito aere non aliquo modo defendatur, D levius sursum feretur, (sive à levitate suâ, ut dici solet; sive à circumposito aere sursum pulsa, quod potiùs dicendum est;) deserens eam cui incumbebat superficiem A B; neque propterea sic ascendent fluidi partes subjectæ, Aere ipso (depulso D) æquilibrium restituente. Si verò ita ab aere circumposito defensum intelligatur D ne hoc fiat; demonstratio locum habet.

PROP. IV.

Si illud D plùs gravitet quàm tantundem circumpositi Aeris (aut quod Aeris instar est,) minùs autem quàm tantundem fluidi subjecti: innatabit D; sed depressis eousque partibus C subjectis, donec eum situm obtinuerit D, ut æquigravitet aggregato Aeris & subjecti Fluidi quorum locum occupat. Fig. 311.

SEquitur item ex prop. 1. hujus. Deprimentur enim partes C subjectæ, quia (propter D gravius quàm tantundem Aeris) magis premuntur, assurgentibus quæ minùs premuntur, utpote ab his depulsis: idque eousque donec situm assignatum obtineat; quippe tamdiu minùs premuntur subjectæ partes. Ubi verò eousque perventum est ut ipsum D æquè gravitet atque tantundem subjecti Fluidi quantum impleret locum immersæ partis K, atque tantundem circumpositi Aeris quantum impleret locum partis eminentis I: non ultra subsidet, sed innatabit; quippe jam contigua superficies horizontalis E F, tantundem premitur in G, atque si locum I occuparet Aer, & locum K subjectum Fluidum; adeóque superficies E F est æqualiter ubique pressa. Fig. 313.

PROP. V.

Si illud D, vel H, non modò plùs gravitet quàm tantundem circumpositi Aeris, sed & quàm tantundem subjecti Fluidi: Mergetur penitus, ad fundum usque subsidens.

Fig.311. SEquitur & hoc ex prop. 1. hujus. Sive enim in summo intelligatur, ut D premens partes C; sive intra fluidum ubivis, ut H premens partes G; utcunque deprimet partes subjectas. Nempe partes C, quoniam gravius est quàm tantundem aeris; & partes G (in quacunque fluidi profunditate) quoniam gravius est quàm tantundem istius fluidi; adeóque C vel G magis premitur quàm si abesset D vel H ejúsq; locum suppleret tantundem fluidi; & propterea magis quàm superficiei E F partes aliæ. Atque hoc, donec ad ipsum fundum pervenitur.

SCHOLIUM.

FIeri quidem potest, (si fluidum illud non sit in omnibus sui partibus æquè grave, sed prope fundum gravius quàm prope summum,) ut non ad fundum usque mergatur H; utpote gravius quàm fluidum in summo, sed levius quàm fluidum in imo. Verùm hoc demonstrationem non turbat, quoniam ubi eò pervenitur, non jam plus gravitat H quàm tantundem *subjecti* fluidi. Idémque alibi intellige ubi opus erit; aut quod huic æquipolleat: ne opus sit istiusmodi sæpiùs insinuare.

PROP. VI.

Si immersum H, minùs gravitet quàm tantundem fluidi cui immergitur; magis autem quam tantundem aeris (seu quod instar est:) Sursum propelletur; idque eousque donec eum obtinuerit situm, ut æquè gravitet atque tantundem Fluidi & tantundem superpositi Aeris (seu quod hujus instar est,) quorum respectivè locum obtinet simul sumpta. Fig.311.

Sin præcisè quantum tantundem Aeris (seu quod hujus instar est,) aut eo minùs: assurget ad fluidi summam superficiem, aut etiam altiùs.

SEquitur item ex prop. 1. hujus. Dummodo enim immersum H, minùs Gravitat quàm tantundem circumpositi fluidi; minùs premitur G quam superficiei contiguæ E F partes aliæ; adeóque partes ad G, simul cum H, sursum pellentur à partibus plus pressis. Atque hoc eousque donec ad situm assignatum pervenitur; quoniam tamdiu minùs premitur G. Ubi verò eò perventum est, ut ipsius H seu D, pars extra fluidum ita emineat, ut totum simul tantum præcisè gravitet quantum tantundem Fluidi istius cujus locum occupat pars immersa K, & tantundem Aeris cujus locum occupat pars emersa I, (qui casus est propositionis quartæ;) ibi perstabit: quippe jam, superficiei E F contiguæ, partes omnes æqualiter premuntur. Fig.313.

Sin æquè gravitet atque tantundem incumbentis aeris, (aut quod aeris instar est:)feretur ad summam fluidi superficiem,ibique consistet; (qui est casus prop.2.) nam eousque minùs premuntur partes subjectæ.

Sin minus adhuc gravitet: aut avolabit, aut sursum pelletur: per prop. 3. hujus.

SCHOLIUM.

NOtandum interim erit; id tantum hic in considerationem venire quod ex Gravitate simpliciter consideratâ provenit, non verò quod aliunde ex Impulsu seu præconcepto Impetu oritur. Si enim id in considerationem veniat,res omnino secus erit. Quippe Grave,utut levius

levius quàm est tantundem subjecti fluidi; si Vi dejiciatur aut deprimatur, vel, propter acceleratum gravium descensum, vim cadendo conceperit; non statim in fluidi superficie hærebit, sed altiùs immergetur, pro impetu quo priùs ferebatur. Et similiter, si submersum Grave, utut levius sit quàm tantundem fluidi, & gravius quàm tantundem superpositi aeris; dum tamen vel Vi sursum pellitur, vel, propter inceptum motum, impetum conceperit; etiam extra superficiem fluidi altiùs in aerem prosiliet. Sed eam Impetûs considerationem hic loci præcludimus; ut & in sequentibus. Quanquam enim certum sit rem ita fore; tamen, post vibrationes aliquot hinc inde ab impetu factas, ubi ad quietem redacta res est, eum situm obtinebit quam indicamus; & quem, si impetus ascititius abesset, statim assequeretur.

PROP. VII.

Si immersum H, æquè gravitet atque tantundem Fluidi cui immergitur: situm quem habet retinebit, absque vel ascensu vel descensu.

Fig. 311. SEquitur item ex prop. 1. hujus. Quippe cùm tantundem gravitet acsi, eo absente, locus fluido suppleretur; subjecta superficies neque magis premitur in G, quò hic ab H deprimeretur; neque minùs, quò hic assurgeret ipsúmque H propelleret.

SCHOLIUM.

SEcundum has leges; reddenda erit ratio variorum in Experimento, *Torricelliano* dicto, Phænomenûm. Et quidem, in eam causam, hæc olim scripta erant, & *Societati Regiæ Londini* exhibita, Augusti 13 & 20. 1662. quò plurium Experimentorum, ibidem tum temporis agitatorum, ratio Statica redderetur: Qualia sunt quæ sequuntur.

PROP.

PROP. VIII.

Sit Hydrargyri, subjecto vase contenti, superficies Horizontalis A B externo Aeris pressui exposita, atque Tubus C D, (clausus in D, & apertus in C,) hydrargyro impleatur, & dein invertatur, immerso ejus Orificio C infra superficiem subjecti hydrargyri A B, (obturato aliquandiu orificio C donec sic immergatur, ne Hydrargyrum invertendo effluat, atque tum recluso;) atque in eo situ sustineatur. Quibus positis.

Si Hydrargyrum tubo contentum, quod superficiei A B eminet, plùs gravitet in subjectas partes C, quàm pressus incumbentis aeris in reliquas ejusdem A B partes; fiet descensus in C, depulsis quæ à latere sunt partibus minùs pressis, etiamsi à pressu superincumbentis aeris, clauso in D tubo, defendatur Hydrargyrum tubo contentum.

Qui quidem descensus eousque perseverabit; donec, effluente Hydrargyri parte (relicto intra tubum spatio D I vacuo Hydrargyri,) & surgentibus (propter hunc effluxum) superficiei A B partibus reliquis; quod in Tubo reliquum est I C tantundem premat C quantum Aer partes reliquas ipsius A B: eúmque situm retinebit.

PAtet ex præcedentibus. Quippe dum Hydrargyrum tubo contentum (utut ab Aere supernè defensum) plus premat C quàm ab aere premuntur partes reliquæ, deprimetur C (hydrargyro effluente:) ubi verò eò perventum est ut hydrargyri reliquum C I tantundem premat C, quantum premuntur ab aere partes reliquæ; (propter æqualem ubique pressum,) situm illum retinebit. per prop. 1. hujus. Fig. 314.

SCHO-

SCHOLIUM.

Dico autem, *Spatium* DI *vacuum Hydrargyri*: non enim hîc libet (neque opus est ad præsens negotium) disputare, num sit simpliciter vacuum, necne. Siquis enim vel gratis afferat, vel aliunde probatum eat, materiâ aliquâ repletum esse, quod vel pondus nullum habeat vel nullum quod in sensuum nostrorum observationem incurrat; nobis illud hac in re neque obest neque prodest.

Dico etiam *plus gravitat*, & *tantundem gravitat*, potiùs quàm plus aut æquè Grave est: Quoniam quæ in se æquè gravia sunt, possunt tamen pro vario situ inæqualiter gravitare.

Fig.315. Atque hìc occurrit primò expedienda difficultas; Cur, si Tubus erectus DC, in situm obliquum reclinetur ut GE, Hydrargyrum nihilominùs inibi contentum EF in situ obliquo, in eâdem altitudine perpendiculari consistet atque CI in situ erecto; cùm tamen (propter FE longiorem quam CI) suspensum Hydrargyrum FE plus sit (adeoque gravius) quam CI.

Hæc autem difficultas facilè solveretur si non subesset latentior alia. Quanquam enim verum sit, Cylindrum reclinatum FE majorem esse erecto CI, & plus Hydrargyri continere: tamen non minùs interim verum est, Basin etiam ampliari; nam ejusdem Cylindri sectio Obliqua E (Elliptica) longior est (nec latior tamen) quàm sectio recta (circularis) C; adeoque basin E in eâdem ratione majorem esse base C, quâ recta E (ellipseos Axis major) longior est, quam C recta, Circuli diameter, eademque Ellipseos axis minor.

Sed & (quod mox demonstrabimus) in eâdem ratione prolongatur C in E, quâ prolongatur CI in EF: Ut non sit mirum super majore base (ellipticâ) plus hydrargyri sustineri (& quidem in eâdem ratione plus) quàm super minore (circulari) C; utut C & E sint ejusdem Cylindri sectiones. Si autem intelligatur, super eâdem base E, Cylindrus EK; invenietur ejus portio æquè alta EH, tantundem hydrargyri continere atque EF; propter Cylindros (aut Prismata,) super eâdem base æquè altos, invicem æquales. At verò jam, Cylindrus (seu Prisma) EH (propter majorem basin) major erit quàm CI; atque in eâdem ratione major, quâ basis base major est.

Fig.316. Quòd autem eandem rationem habeat C ad E, quam CI ad EF, sic ostenditur. Intelligatur Cylindrus CD situ erecto sectionem horizontalem habens LCM Circularem, obliquam verò NCO elliptical:

cam: atque reclinetur Cylindrus hic in situm E G, ut sectio illa N C O jam fiat in situ N E O horizontalis, cui insistat Cylindrus E F inclinatus erecto E H æqualis (propter eandem utrobique tum basin tum altitudinem,) ipsique C I æquè altus. Manifestum est (demissâ, in N E O rectam, perpendiculari F C,) propter æquales angulos F E C, L N E, adeóque similia triangula rectangula F E C, E N L; eandem habere rationem E F ad F C, hoc est, ad C I; quam habet N E ad E L, seu N O ad L M; hoc est, quam habet basis E ad basin C. Quod demonstrandum suscepimus.

Sed nova hinc suboritur difficultas. Quippe cùm super eâdem base E, Cylindrus E H in situ erecto, tantundem contineat Hydrargyri quantum in situ obliquo E F; quidni magis in basin illam gravitet E H quàm E F, propter Descensum illic Decliviorem, (gravitant autem æqualia Pondera in ratione Declivitatum, seu reciprocâ rectarum æquè altarum, per prop. 19. Cap. 2.) adeóque, quidni basis E in situ obliquo E F plus hydrargyri sustinere valeat (& propterea Cylindrum altiorem) quàm in situ erecto E H.

Verùm & hîc paria paribus compensanda sunt. Quippe, ut Hydrargyrum per descensum obliquum F E minùs deorsum premit quàm per F C vel H E (perpendicularem) premeret; sic & vis sursum in E (quæ Hydrargyrum sustinet) minus premit sursum per E F quam per E H premeret; & quidem in eâdem utrobique ratione, propter eundem utrobique obliquitatis angulum E F C seu F E H. Adeóque non minùs valet Vis sursùm in E secundum directionem suam E H directè sursum premens, sustinere pondus Hydrargyri secundum directionem suam H E deorsum prementis, quàm Vis eadem per E F directioni suæ E H obliquam, pondus idem F E directioni suæ F C pariter obliquam deprimens sustinere; propter vires utrobique in eâdem ratione diminutas.

Vel sic idem explices. Quâ ratione impeditur descensus hydrargyri, rectà tendentis deorsum, à latere M O (producto) pondus illud partim sustinente, eâdem ratione impeditur ascensus vis rectà sursum tendentis in E, à latere (producto) N L eundem partim coercente supernè; (propter eandem utrobique obliquitatem;) adeóque eadem, quæ priùs erat, manebit ratio pressuum contrariorum.

Superest adhuc alia difficultas expedienda, quæ non tam ex Situ, quam ex Figurâ tubi seu vasis superpositi oritur. Consideravimus enim hactenus Tubos superpositos tanquam Cylindros seu Prismata, ejusdem

ejusdem ubique Crassitiei; (quod erat necessarium ubi de mole seu pondere suspensi hydrargyri agebatur:) Potest autem superponi Tubus seu Vas cujuscunque figuræ, quod vel plus vel minus hydrargyri continebit quam Cylindrus seu Prisma super eâdem base æquè altum; altitudo tamen suspensi hydrargyri in omnibus eadem erit.

Fig. 317. Verbi gratia; In tubo Capitato C H, atque in Acuminato C K, eadem erit Hydrargyri C I altitudo, atque in Cylindro illic inscripto hic circumscripto.

Causa est, quòd illud Hydrargyri quod in C H extra Cylindrum est, non tam à C sustinetur quàm à tubi partibus seu lateribus sibi subjectis, quippe quibus sic manentibus non poterit illud nisi à latere latum iri quò descendat: Ne autem ad latus ferantur Hydrargyri partes, (sive quæ in Cylindro C H, sive quæ extra illum,) se mutuis occursibus & contrario nisu impediunt, ut nihil à C sustineatur præterquam quod est intra Cylindrum C H. Dummodo enim quod intra Cylindrum est ab æquipollente Vi in C sustineatur ne decidat; & quod extra est, similiter à Tubi lateribus: perinde est acsi solido fundo, sed minimè plano, coercerentur utraque; quo posito, superficiem supernam Horizontalem fore ad prop. 1. hujus ostensum est.

Simili modo; quanquam, in tubo Acuminato C K, minus contineatur Hydrargyri in trunco C I quàm in Cylindro huic circumscripto; attamen non altius ascendet in illo quàm in hoc Hydrargyrum. Quippe, quantum ad eas basis partes ubi libero ascensui locus patet, ad justam altitudinem ascendet C I; non ultra tamen, ne quæ subjectæ sint superficiei A B partes plus cæteris premerentur, & pressæ descenderent donec ad justam altitudinem perveniretur: quantum verò ad eas ipsius C partes quibus convergentia tubi latera liberum ascensum non permittunt, quod deest in pondere hydrargyri supereminentis, suppletur à coercentibus tubi lateribus; quippe quæ, utut non deprimant ut vis contraria, coercent tamen ut impedimentum, ne altiùs possit à vi infernè sursum premente Hydrargyrum protrudi.

Atque simile in aliis casibus fiet judicium.

Si verò vasa superposita, non tantum figurâ sint diversâ à Cylindricâ seu Prismaticâ, quod hic supponitur; sed etiam obliquo situ ponantur, quod supponebatur in difficultate priori: quæ utrobique reposita sunt; hic, conjuncta, locum obtinebunt: adeóque quæcunque sit vasis forma, & quocunque situ ponatur, ad eandem semper altitudinem (quatenus coercentia vasis latera non impediunt) hydrargyrum ascendet.

Nos autem tum hic tum in sequentibus (præsertim ubi moles suspensi hydrargyri

hydrargyri conſideratur aut calculo ſubjicitur) Cylindricam tubi formam potiſſimum ſpectamus: Inde autem, vi illorum quæ in hoc Scholio tradidimus, utut non quo ad eandem molem ſeu pondus, quo ad eandem tamen altitudinem ſuſpenſi hydrargyri, ad vaſa cujuſcunque formæ, utcunque inclinata eadem transferentur.

PROP. IX.

Poſitis ut priùs; Si Tubus ſic inverſus vel ex ſe tam brevis ſit, vel Orificium infra ſuperficiem A B tam altè immerſum habeat, vel denique ita inclinetur tubus, ut quod inibi (ſupra A B) continetur Hydrargyri minùs gravitet in partes ſubjectas, quàm aer in reliquas: Non effluet Hydrargyrum. Fig.318.

Sed &, ſi (manu vel aliàs) Tubus elevetur, aſcendet etiam intùs Hydrargyrum; idque donec ad eam ſtationem perveniat, ut tantundem in partes ſibi ſubjectas gravitet quantum in reliquas Aer.

Si verò non aliunde elevetur Tubus; non ab Hydrargyro propelletur ſurſum: ſed deprimetur potiùs (ſi locus infra ſit quo recipiatur) ab incumbente aere; niſi aliunde ab aeris vi defendatur.

SI enim tubus E brevior ſit, vel ita immergatur orificium ejus ut quod ſupereſt C E brevius ſit, quàm ut inibi Contentum Hydrargyrum tantundem premat ſubjectum C quantum ab aere premuntur partes reliquæ; vel etiam, ſi tubus F, utut ſatis Hydrargyri continere cenſeatur, ita tamen inclinetur ut non ſatis gravitet: Non deprimentur partes ſubjectæ, utpote non magis preſſæ quàm reliquæ; (ſupponimus enim Tubos manu vel aliàs ita ſuſtentos ut ab Aere Tubis incumbente nulla vis hydrargyro inferatur.)

Quinimo ſi elevetur tubus; aſſurget inibi Hydrargyrum, (loco jam facto quo recipiatur,) propter partes ſubjectas minùs preſſas quàm quæ aeri exponuntur. Idque eouſque donec ad altitudinem C I pervenitur, (quâ ſtatione ſupponimus partes ſubjectas æquè cum reliquis preſſas;) quippe tamdiu minùs premuntur, adeóque Hydrargyrum à partibus plus preſſis intro pellitur.

Si verò altiùs elevetur tubus, ut ad D; illud tubi quod est supra I manebit hydrargyro vacuum; quippe, cum partes subjectæ jam æquè cum reliquis premantur, cessabit illa sursum protrusio; (nec ob decantatam olim Fugam Vacui sursum altiùs trahi, experimentis nunc dierum ubique gentium notis abundè comprobatum est.)

Similiter si tubus F inclinatus, erigatur; ascendet simul Hydrargyrum, tubum replens: ita tamen ut si altiùs erigatur quàm est C I; quod superest, ut I G, manebit hydrargyro vacuum; ob causas modò dictas.

At verò si tubus ille brevior, ut E, sibi permittatur; non tamen ab Hydrargyro ascensum moliente sursum propelletur; sed, contrà, detrudetur ad fundum usque; (nisi quatenus ob Tubum minùs gravem quàm tantundem Hydrargyri impeditur.) Non quod Hydrargyrum alibi ab aere pressum non valeat illud in tubo & sustinere & sursum pellere; sed quoniam (nisi tubus aliàs sustineatur aut ab externo aere defendatur,) non tantùm ab eminente hydrargyro, sed & à supereminente aere tubum cum hydrargyro deprimente, premuntur partes subjectæ; adeóque fortiùs quàm reliquæ, propter hydrargyrum in tubo plùs gravitans quàm tantundem aeris: Quamdiu autem manu vel aliàs sustinetur tubus; eo impeditur aer ille (ob tubum in summo clausum) ne gravitet in partes tubo inclusas aut illi subjectas.

Sin aliàs, quocunque modo, defendatur tubus ille brevior à superno aere; non modò sustinebitur, sed & sursum propelletur (donec ad Altitudinem I perveniat) ab hydrargyri partibus reliquis plùs pressis quàm quæ Tubo subjiciuntur; propter superficiem A B eò loci minùs pressam.

Tota demonstratio dependet ex prop. 1. hujus, variè pro variis casibus applicatâ.

PROP.

PROP. X.

Positis ut priùs; Si tubi sic inversi altitudo (supra AB planum) CD, tanta sit quanta est CI, aut eâ major; quò Hydrargyrum inibi contentum tantundem gravitet in partes subjectas quantum aer in reliquas: non minori Vi sustinebitur tubus, nedum elevabitur, (sive id manu fiat; sive librâ, positis ponderibus in adversâ lance; sive utcunque aliàs;) quàm quæ potis sit sustinere seu elevare (præter ipsum tubi pondus) totum superincumbentem aerem, seu (quod eodem recidit) tantundem hydrargyri quantum æquet Cylindrum CI.

Dummodo enim tanta sit tubi intùs altitudo ut retinere possit tantum hydrargyri quantum valeat ita premere subjectas partes quantum reliquæ ab aere premuntur; (vel etiam major; quod tamen casum non mutabit, quippe plus inibi non retinebitur, quæcunque fuerit altitudo tubi, sed quo superest spatii ID relinquetur hydrargyro vacuum; ut supra ostensum est;) adeóque non adjuvetur vis elevans à vi partium hydrargyri extra tubum tanquam plùs pressarum sursum pellente quod partibus C supereminet, tanquam minùs pressis: Sustinendum jam erit vel elevandum, non modò tubus ipse cujuscunque fuerit ponderis, sed & totum illud aeris quod tubi cavo superincumbit; (*Tubi*, inquam, *Cavo*; nam quod Tubi lateribus utcunque crassis supereminet, ab Hydrargyro Tubi labiis subjecto sustinebitur.) Nam nisi hoc fiat, tubus (qui hydrargyrum jam deserturus est, ut quod altiùs non propelletur,) non sustinebitur vel elevabitur. Cui quidem, cùm Hydrargyrum, ex pulsu sursum, jam nihil ferat auxilii; (ut priùs tulerat, cùm ad justam altitudinem nondum pervenerat;) nec possit aer (propter tubi orificium, quod supponimus, in hydrargyro infra AB submersum,) ut alibi fieri solet, circuitu facto, à tergo in locum derelictum succedere, (adeóque, quod ex prop. 1. hujus facile demonstrabitur, tantundem quasi sursum propellere, quantum supernè deprimit; dempto saltem pondere quo res elevanda superat tantidem aeris pondus:) tantundem virium in sustinente vel elevante requiretur, quantum (præter ipsum tubi pondus) totum illud aeris quo cavum premitur Fig. 314.

premitur sustinere aut elevare poterit; (dummodo enim Vis sustinens aut elevans vi deprimente minor est, non sustinebit aut elevabit, per prop. 12. Cap. 1.) Id autem aeris quod sustinendum aut submovendum est, æquipollet hydrargyri Cylindro C I, (saltem dempto tantidem aeris pondere cujus locum occupat C D, propter Atmosphæræ minorem altitudinem supra D quàm supra C; quod meritò tamen negligi possit: ut & submersa tubi labia minùs gravia quàm tantundem hydrargyri; cujus differentia auferenda erit, si strictè agas, à pondere elevando. Sed hæc negligimus.) Cùm enim, Vis aeris extra Cylindrum hydrargyrum deprimens, tantum premat partes sibi subjectas quantum hydrargyrum in tubo premit subjectas sibi (quò superficiei partes omnes æqualiter premantur,) tantundem valet pondus aeris incumbentis quantum Cylindrus hydrargyri altitudinis C I: ut igitur tubus elevetur, adeóque submoveatur Vis aeris deprimens, vis ea requiritur quæ potis sit (præter excessum ponderis tubi supra pondus tantidem aeris cujus locum occupat, quod est ipsum tubi pondus in aere,) etiam tantundem hydrargyri elevare quantum est Cylindrus C I: &, quò sustineatur, quæ hydrargyri tantundem potis est sustinere. Quod demonstrandum erat.

Fig. 319. Adeóque si intelligatur tubi fundus D (fili ope) de librâ pendere, atque ex adverso pondus P: quò hoc tubo Gravato æquiponderet, requiritur ut æquet pondere tum tubi pondus (demptis saltem, quas diximus, minutiis,) tum tantum hydrargyri quantum æquet Cylindrum C I.

PROP.

PROP. XI.

Positis ut priùs; Si tubi sic inversi, altitudo (supra A B planum) C D, minor sit quàm C I, (quò, si locus esset, pertingeret hydrargyrum;) adeóque, qui partibus reliquis eminet, aer præponderet: Quantum valet hæc præponderantia, tantundem pressui in C sursum concedendum est; quod æquipollet sublationi tantidem ponderis incumbentis, aut ponderi æquali in adversâ lance posito: Adeóque tantò minor Vis (sive in tenentis manu, sive ponderis in adversâ lance positi, sive aliàs similiter applicata,) requiretur ad tubum sustinendum in hoc casu, quàm in casu propositionis præcedentis. Fig. 319.

Quæ verò in eâ altitudine sustinere potis est Vis, non tamen altiùs elevabit; propter pondus elevando auctum, seu minutum subsidium Vis sursum prementis: sed neque in majore altitudine sustinebit.

Cum enim Vis sursum in C, potis sit sustinere tantundem ponderis quantum est Cylindrus Hydrargyri, super eâ base, altitudinem habens C I; sitque C D eo pondere minus: Sustinere valebit (&, nisi aliunde impediatur, elevare) præter illud hydrargyri quod incumbit, tantundem ultrà ponderis, quantum illic à justo pondere deest; Adeóque tanto onere sublevare sustinentis manum (seu quod hujus instar est;) & propterea tantò minus virium requiretur, quàm (qui casus est propositionis præced.) si Hydrargyri Cylindrus justam altitudinem C I obtineret.

Et quidem subsidium illud à vi sursum premente propter Hydrargyri altitudinem justâ minorem, tantundem est atque additamentum illi æquipollens sustinentis viribus additum, seu pondus æquipollens in adversâ lance positum. Et, si, quod porro deest ad pondus prop. præced. requisitum, in lancem illam immittatur; sustinebitur tubus (cum incumbente aere) pariter atque si, in casu prop. præced. totum illud pondus immitteretur.

At vero, utut tubum sic sustinere possit, non tamen elevare poterit, quoniam

quoniam prout elevatur tubus (donec ad justam altitudinem C I pervenit) assurget intùs Hydrargyrum (propter locum jam factum quo recipiatur) adeóque minuitur quod priùs erat subsidium, adeóque vis (debilior facta) tubum sustinere in eâ altitudine non potis erit.

Et quidem, si aliâ vi aliàs elevetur, sibi tamen permissa; ad eam altitudinem deprimetur: Sin infra detrudatur; eò assurget: ut nempe, præter illud oneris quod ponderi P æquipollet, reliquum quicquid sit æquipolleat Hydrargyri Cylindro C I. Quæ omnia, per priùs demonstrata constant.

SCHOLIUM.

Summa rei huc redit. Æquabilis aeris alibi incumbentis pressura, potest (per æquiponderantiam suam) sustinere in C; Vel Columnam Aeris æquialtam; Vel Columnam Hydrargyri eidem æquipollentem; Vel partem hujus partem illius (quæ simul earum alteri æquipolleant:) Non autem utramque totam, aut plus quam quod earum alteri æquipolleat.

Adeóque, Si pars C, externo Aeri exponatur: sustinebitur hic, ut in partibus reliquis, Columna incumbentis Aeris. Sed tunc nihil ultra Hydrargyri sustinebit vis ea, nedum elevabit.

Si ab incumbentis Aeris pressu (inversi tubi fundo, vel aliàs,) defendatur: sustinebit, istius vice, Columnam Hydrargyri eidem æquipollentem; aut etiam (si locus sit quo recipiatur) tantundem elevabit. At verò jam nihil Aeris sustinet; quippe à quo defenditur ab inverso tubo, qui aliunde sustineri intelligitur; putà à tenentis manu, vel pondere in adversâ lance.

Si verò ab incumbentis aeris pressu defendatur quoad partem, sed non quoad totum; putà à pondere P in adversâ lance quod minus sit quàm ut totius aeris pressui æquipolleat: potis erit, propter hoc subsidium; sustinere, non tantum totum aerem incumbentem, (quem quidem sine auxilio sustineret,) sed & tantundem Hydrargyri quod isti auxilio æquipolleat; neque sustinere tantùm, sed & (si opus sit) eousque tubum impellere donec tantundem recipere possit.

Sin denique pondus P in adversâ lance majus sit quàm ut aeris pressui æquipolleat: proripiet tubum (nisi aliunde impediatur) in altum, etiam extra subjectum Hydrargyrum.

Exempli gratiâ. Intelligatur superficiei A B, pars C (inverso tubo inclusa,) tantæ amplitudinis esse, ut quæ, aperto aeri exposita, columnam aeris sustineret Ponderis unciarum 12 unius Libræ; (adeóque

pars

pars alia quælibet huic æqualis, propter æqualem aeris pressum, tantundem sustinere intelligenda est:) & propterea, si ab hoc aeris pressu penitus defendatur, tantundem Hydrargyri, istius vice, sustinere poterit; hoc est, columnam hydrargyri Unciarum 12 unius Libræ.

Cúmque Tubus, quo sic ab aere defenditur C, suum pondus habeat; Ponatur hoc, Unciarum 2. (Pondus aeris, qui tubi lateribus supereminet non computamus; quoniam id ab Hydrargyro tubi labiis subjecto sustinetur.)

Totum igitur Onus (tubi cum superincumbente aere) erit Unciarum 14; quod aliunde sustinendum erit, quò pars C toto pressu aeris tubique liberetur. Quod factum intelligatur, posito, in adversâ lance, pondere P, unciarum 14.

Sustinebit igitur C (ab omni alio pondere sic liberata) columnam Hydrargyri Unciarum 12, (utpote vi sursum in C prementi æquipollentem;) atque ad illam altitudinem (si opus sit) tubum sic libratum propellet. Donec enim hoc fiat, minùs premetur C quàm partes reliquæ; nec huic ascensui quicquam officit Tubus cum incumbente aere, utpote qui sunt cum P pondere in æquilibrio positi. Verùm jam, Contraponderans P, gravius esse debet (putà unciis 2, propter pondus tubi,) quàm est suspensa Hydrargyri columna; utut Hydrargyrum illud non à P pondere, sed à vi sursum in C, sustineatur.

Si verò à Pondere P auferantur, verbi gratiâ, unciæ 4, ut nonnisi 10 supersint, non poterit hoc pondus, Tubi aerisque incumbentis pressum sustinere (utpote unciarum 14,) sed istius tantum 10 uncias; adeóque reliquis unciis 4 adhuc urgetur pars C; quæ itaque (cum non possit plusquam 12 uncias omnino sustinere) non ultra 8 uncias hydrargyri (quæ cum illis 4 conficiunt 12) sustinere poterit. Sed & ad hoc requiritur contraponderans P, unciarum 10, quod gravius sit (putà 2 unciis) quàm suspensum Hydrargyrum, unciarum 8: utut hoc, non à P, sed à Vi in C sustineatur.

Sin, pro demptis unciis 4, tolleretur totum Pondus P unciarum 14, vel saltem inde demerentur unciæ 12: Subsideret Hydrargyrum omne cum onusto Tubo; vel demptis 2 unciis; quippe jam pars C onere saltem unciarum 12 (quo majus ferre non potest) Oneratur. (Saltem si tubi partem subsidendo demersam ponderi eximamus; atque etiam, si omnes minutias sectare velimus, excessum ponderis Hydrargyri suprà pondus demersæ partis tubi: Quæ tanta non sunt quin hic meritò possint negligi.)

Si jam ex demptis illis Unciis 4, restituantur unciæ 2, (quo Pondus P jam fiat unciarum 12; adeóque ex omnibus 14, nonnisi unciis 2 prematur

matur C;) Assurget Tubus donec supra A B emergant Hydrargyri unciæ aliæ duæ: Adeóque sustineat C, à pressu aeris ubique Uncias 2, atque Hydrargyri uncias 10; quæ simul faciant ipsius justum onus unciarum 12. Sed & adhuc pondus P unciarum 12, majus est (putà unciis 2) quàm suspensi Hydrargyri unciarum 10; utut hoc, non à P sed à Vi in C sustineatur.

Atque si adhuc restituantur aliæ 2 Unciæ, quò fiat Pondus P (ut prius) unciarum 14: Ascendet Hydrargyrum ad justam altitudinem C I, (tubúmque, si opus sit, eò propellet,) quò pars C (ab alio onere penitus libera) sustineat Hydrargyri Uncias 12, quæ pressui aeris in reliquis partibus æquipolleat.

At verò si porro augeatur pondus P, ut fiat, verbi gratia, Unciarum 16: Sursum adhuc in altum proripietur tubus (propter ponderis præpollentiam;) sed non simul Hydrargyrum, (utpote quod jam ad summam altitudinem ascenderit quam ferre potest C;) sed relinquetur superna tubi pars hydrargyro vacua. Idque eousque, donec vel obice impediatur descensus ponderis aut ascensus tubi; vel saltem donec, emersis extra subjectum hydrargyrum tubi labiis, Hydrargyrum inibi contentum (viâ jam patente) totum decidat, eique protinus succedat Aer irruens, tantundem quasi subtus propellens sursum, quantum supernè deprimit tubum; ut jam nihil aliud sustinendum restet quam ipsum tubi pondus.

Quod autem Experimenta his Demonstratis respondebunt; tantùm abest ut metuam, ut ea jam ante in *Societate Regiâ* administrata fuerint (& quidem cum hoc eventu) quàm hæc primò scriberentur (Anno scil. 1662, ut supra insinuatum est.) Nempe, præter notiora Experimenti Torricelliani phænomena; (quæ recensere non erit opus,) observatum erat, 1. Si tubus ad justam altitudinem C I extenderetur; opus erat in adversâ lance quò sustineretur tubus, pondere aliquantò majore quam erat Hydrargyri suspensi pondus; (& quidem tantò majore quantum conjectando æstimabant ipsius tubi pondus.) Idemque accideret, si altiùs adhuc elevaretur D; relicto I D, hydrargyri vacuo. 2. Si infra justam altitudinem C I, subsideret C D; minori opus esset pondere in adversâ lance, quò (propter æquilibrium) sustineretur tubus; & quidem tantò minori quantò minus erat pondus hydrargyri suspensi. 3. Si tamen superfluum illud pondus aut ejus pars aliqua (ultra quam quod necessarium erat) in lance relinqueretur; ascenderet Tubus, unà cum hydrargyro, donec fieret æquilibrium. 4. Denique, si plusquam illud superfluum pondus

lanci

lanci eximeretur; subsideret tubus, unà cum hydrargyro, ad æquilibrium. Et quidem, universim, (prout in Regiæ Societatis Commentariis res summatim colligitur) *Pondus in adversâ lance contraponderans, æquipollebat suspensi Hydrargyri, cujuscunque altitudinis, atque simul (quantum conjectando æstimabant) suspensi Tubi ei parti, quæ stagnantis in subjecto vase hydrargyri superficiei superemi-nebat.*

Quæ quidem res, cum primo aspectu incautis nonnullis, atque ad rem staticam minùs attentis, facilè imponeret; quasi ab adverso pondere P sustineretur, non tantùm Tubus ipse, sed (propter nescio quam cum tubo connexionem, seu Vacui fugam) contentum inibi Hydrargyrum: Quò scrupulus ille faciliùs tolleretur; ea statim scripsi quæ in hoc Capite hactenus habentur, (eisdem ferè verbis, nisi quod jam in Propositionum & Demonstrationum formam redacta sint;) eadémque *Regie Societati* exhibui, verbo quidem Augusti 13. 1662. quo Observata illa libero sermone exponebantur; atque deinde (id rogatus) scripto etiam Aug. 20. quo die etiam Observatorum illorum summa ab ipsis Observatoribus scripto exhibebatur. Quibus ostenderem, ex Principiis Hydrostaticis, rem ita omnino accidere debere, si suspensus Hydrargyri Cylindrus poneretur à Vi in C sursum premente sustineri, dummodo inverso Tubo ab incumbente Aere defenderetur, Tubúsque ille sustineretur aliunde.

Si verò jam quæratur, Quanta sit illa altitudo C I; ubi, propter pressum aeris in partes reliquas, consistet suspensum Hydrargyrum supra subjecti superficiem A B:

Dicendum est, Altitudinem illam neque omnibus Locis, neque omnibus Temporibus, eandem esse; sed, pro variâ Aeris Gravitate, subinde mutari.

Hìc autem *Oxonii*, quomodo se res habet, quantum ex propriis Observatis colligere licuit, sic habeto. Jam ante Sex Annos, Tubum (Quatuor pedes longum cum semisse) implendum curavi Hydrargyro, ab intermisto Aere diligenter purgato, (non summâ tamen diligentiâ;) eúmque sic impletum inverti, obturato primum diligenter orificio, nec priùs recluso quàm infra superficiem Hydrargyri in subjecto vase contenti demergeretur; dein, factâ subtus exeundi potestate, effluxit Hydrargyri tubo contenti pars magna, cum impetu notabili; factísque propter impetum illum vibrationibus aliquot, subsistebat tandem ad altitudinem Unciarum pedis Anglicani (plus minus) 29. Tubúmque cum subjecto vase (cujus fundo nitebatur apertum

apertum tubi orificium, sed ita ut intrandi & exeundi à Vase in Tubum Hydrargyro via non intercluderetur) in pegma quoddam priùs ad id paratum intuli, atque in hunc diem in eo statu conservo.

Nec ita multò post; scilicet à Calendis Januariis Anni (exeuntis 1664, sed) ineuntis 1665, Ephemeridem continuam Altitudinis Hydrargyri in Tubo contenti, supra stagnantis in subjecto vase superficiem, institui, (nisi cum fortè me domo abesse contigerit,) atque etiamnum instituo.

Observavi autem, ut plurimum, infra triginta Uncias pedis Anglicani subsidere, sed supra Uncias Viginti octo; intra hos limites subinde nunc ascendendo, nunc descendendo. Semel autem iterúmque tantillo supra 30 ascenderat, semélque subsiderat infra 28, (sed vix aut ne vix decimâ unius Unciæ parte, utrovis casu,) ut altitudo mediâ sit Unciarum 29.

Verùm quidem est, me aliquoties comparasse altitudinem in Tubo meo, cum altitudine in Tubo similiter inverso Honoratissimi D. *Boylii*, dum hic Oxonii ageret; atque altitudinem illius, altitudine meâ, aliquanto majorem deprehendisse, (quasi octavâ parte unius unciæ, si ritè memini,) sive quod in variis ejusdem urbis locis positi fuerint Tubi, sive quòd Hydrargyrum ejus meo fuerit aliquanto levius, sive quod alterum altero fuerit ab intermisto aere aliquantò depuratius, non dixerim: sed exiguum quicquid est discriminis innuere visum est, quò perspiciatur tantillum discriminis ex minutis & non observatis circumstantiis oriri posse.

Observo etiam, à Scriptoribus Gallis, altitudinem assignari solere Unciarum 27 pedis Parisini. Quod non tam altitudinum hic atque illic differentiæ dandum est; quàm differentiæ pedis Parisini, atque Londinensis seu Anglicani. Quippe Pes Parisinus superat Pedem nostrum Anglicanum, quasi quatuor quintis unciæ nostræ, (quod ego, collato semipede nostro, cum semipede Parisino ut dicebatur accuratissimo, memini me satis accuratè observasse;) Adeóque Unciæ Parisinæ 27, respondent nostris 29 quàm proximè. (Nam $12 . 12\frac{4}{5} : : 60 . 64 : : 27 . 28\frac{4}{5}$.) Ut vix ulla inde inferri possit differentia altitudinis istius apud illos observatæ ab altitudine mediâ Oxonii observatâ; quin eadem hic & illic (præter propter) altitudo censenda sit.

At interim, eâdem manente Aeris (quoad gravitatem) constitutione, aliam atque aliam deprehensam fuisse, eodem tubo æstimandam, altitudinem Hydrargyri, non tantum in ejusdem Montis, sed & ejusdem Turris, summo & imo, observatum fuit: minorem utique esse in summo quàm in imo altitudinem Hydrargyri, propter breviorem

illic

illic quàm hic incumbentis aeris Cylindrum, & leviorem pressum: quod, unà cum Honoratissimo *Boylio*, ego aliique experimentis aliquoties factis deprehendimus. Sed quâ proportione decrescat, altior est inquisitio quàm ut eam hic expedire locus sit.

Atque hactenus consideravimus pressum incumbentis Aeris, nullo facto discrimine, sive ab Aeris Gravitate, sive ab ejusdem Elatere procedat: Et quidem perinde est ad rem hactenus traditam utrovis modo fiat, modò pressus fiat.

Verùm aliunde certum est, ab innumeris Experimentis hoc seculo institutis, tum in *Organo Pneumatico Boyliano*, tum aliàs: Et Aeri inesse *Gravitatem*, quâ deorsum premit; & Vim *Elasticam*, quâ se vel à Gravitate suâ vel aliunde compressum restituere conatur.

Quibus positis; necesse erit, propter Aeris Gravitatem, ut superiores ejusdem partes proximè subjectas deprimant, & deprimendo comprimant, adeóque Elateri vim undiquaque restitutivam imprimant gravitati partium incumbentium æquipollentem (donec enim æquipollet renitentia, porro flectetur;) & quidem eâdem vi undiquaque se expedire satagentem; (Quod enim ad prop. 1. Cap. præced. ostensum, de Elatere, putà recto, se prorsum atque retrorsum æqualiter porrigente: pariter valet de Corpore Elastico se in Orbem explicante; Nempe, siquâ parte minus vel prematur vel coerceatur, eâ se expediet, pressum alibi declinans; ídque eousque donec undiquaque comprimatur æqualiter.) Eadémque vis, unà cum harum pondere; in partes adhuc subjectas propagatur: Atque sic porro, ad imum usque, aucto continuè pressu ob auctum pondus incumbens. Unde fit ut partes Aeris inferiores sint superioribus magis compressæ; adeoque & (propter plus aeris intra easdem dimensiones) graviores superioribus.

Haud secus atque Lanæ Vellera accumulata; quæ sunt & Gravia simul & Elastica. Vellus supremum, gravitate suâ premit secundum; cui vel Vim imprimit restitutivam sursum gravitati comprimenti æquipollentem (secùs enim adhuc ultra comprimeretur;) quæ cum sursum se liberare non possit (propter urgens onus quod compresserat) eâdem Vi deorsum nititur; additâ tamen gravitate suâ; quibus cùm premitur tertium, tantundem est atque utriusque gravitate premi: Vel, quod eodem recidit, (quódque omnino dicendum esset si Elateres abessent,) secundum sustinet supremi pondus; & tertium, utriusque; seu secundi primo gravati. Utut enim secundum à primo quantum potest comprimatur, id tamen non impedit quin sic compressum adhuc deprimatur, & utriusque onus à tertio sustineatur. Id saltem interest,

terest, quod, propter compressionem secundi, primum tertio propiùs quidem, sed eodem pondere, incumbat. Atque sic porro, Quartum à trium illorum Gravitate (sive interveniente, sive non interveniente, vi Elasticâ,) premitur; & Quintum ab illorum quatuor; & sic porro ad Sextum, & quæ sequuntur: Ut perinde omnino sit, sive à superiorum omnium Gravitate per se, sive interveniente Vi Elasticâ, comprimi dicamus. Dummodo saltem Vellera perfectè Elastica ponamus, nec simpliciter-Mollium naturam quadantenus participare; quippe, quatenus hoc obtinet, ad Gravitatem simpliciter recurrendum erit.

Sed &, propter Vim Elasticam, sive in Vellere sive in Aere, ad latera etiam undiquaque se expedire satagentem (siquâ parte debilior sit resistentia;) eâdem Vi Elasticâ (quæ incumbenti Gravitati, in quâcunque altitudine, æquipolleat,) ad latus undiquaque premit, quâ deorsum; haud secus atque alia fluida, quæ (propter facilem partium separationem) siquà fortius premantur, eà quà minùs premuntur se expediunt; sive id deorsum sit, sive à latere, sive etiam sursum.

Dato igitur, quòd Aer sit corpus elasticum, (de quo non ambigendum est,) quaqua versum à pressu se liberare satagens, procedimus ad propositionem sequentem.

PROP. XII.

Vis Aeris Elastica Vase inclusi, ejusdem tenoris cum ambiente, tantundem præstat atque onus incumbentis aeris aperti.

Atque hinc ex *Experimentis Boylianis* plurima (nempe quæ ex Aeris Elatere dependent) explicationem facilem sortientur, & Phænomenûm causa reddetur. Quod de aliorum item Experimentis Hydraulicis, aliísque innumeris, pariter intelligendum est.

Fig. 320. INtelligatur Tubus D, seu Vas quodpiam H (cujuscunque formæ, & quocunque situ,) orificium habens E apertum, quo cum aere externo communicet internus. Si adjacentes aeris externi partes minùs premantur quàm quæ sunt intra vas, hæ dilatabunt sese donec ad æquipollentiam res redigatur, (per prop. 1. hujus.) Si verò partes extrà adjacentes (ob pressum aeris incumbentis) magis premantur quàm quæ intùs

intùs sunt, seu quàm harum vis elastica potis sit sustinere, comprimentur adhuc quæ intùs sunt (per eandem prop. 1. hujus,) eousque donec æquipolleat earum Vis Elastica Vi extra comprimenti, hoc est oneri incumbentis aeris. Re itaque sic ad Æquipollentiam redactâ (ut ejusdem tenoris seu tensionis sit aer internus cum externo, adeóque Elateris vis eadem utrobique, ea scilicet quæ Oneri incumbentis aeris sustinendo par sit,) si firmetur orificium E, Vis Elastica (propter eandem quæ priùs tensionem) etiamnum æquipollebit oneri incumbentis aeris externi.

Atque hinc, ex D. *Boylii* aliorúmque Experimentis Pneumaticis, Hydraulicis, aliísque, plurimorum ratio facilè assignabitur. Quippe si, ad ea quæ aliàs pressu vel trusione fieri possent, istius vice adhibeatur vis Aeris Elastica æquipollens, idem effectus consequetur. Quod in singulis prosequi supervacaneum esset, cum Theorematis generalis ad particulares casus applicatio facilis sit: sintque ea fere omnia vel hinc orta quòd Aeris inclusi compressio (adeóque Vis Elastica) major fiat quàm est exterioris aeris, (unde plurima in Hydraulicis Phænomena derivantur à compresso aere orta;) vel, quod aeris exterioris compressio & vis elastica debilitetur minórque fiat quàm est aeris conclusi; (quod in *Antliâ Boylianâ* sæpe fit; putâ si Antliæ *Recipienti* immittatur Vesica seu Phiala vitrea Aerem ordinariæ tensionis continens, atque Recipientis Aer quadantenus saltem exhauriatur; qui, utut respectu aeris liberi Internus sit, respectu tamen aeris in Vesicâ illâ seu Phialâ contenti est Externus; cujus itaque exhaustione partis debilitetur Vis: idem fit acsi, hoc in statu suo permanente, fortiùs comprimeretur ille:) Utroque enim casu aer qui reliquo magis compressus est vim suam Elasticam in eum qui minus est compressus exercebit.

SCHOLIUM.

Dici quidem potest, aliam esse Externi aeris pondus ad E, quàm ad H vel D, quoniam E premitur, non tantùm ab aeris partibus quæ ipsis H vel D supereminent, sed & ab interjectis. Quod quidem verum est, utut in exiguâ altitudine tantillum id sit ut meritò negligatur. Sed hoc, quicquid sit, præsentem speculationem non turbat; quippe idem intra vas evenit. Nam & hic partes E (infimæ) plus premuntur, quàm (supremæ) H vel D, quoniam illæ partium interjectarum pondus sustinent. Adeóque Vis Elastica interni aeris in E, æquipollet pressui externi in E; atque interni in H, externi itidem in H. Quod utut in vastis altitudinibus fieri possit alicujus momenti, in minutis tamen meritò negligendum est.

PROP.

PROP. XIII.

Si inversi Tubi, aliúsve Vasis, D vel H, aere pleni (ejusdem tenoris cum ambiente) Orificium apertum, Hydrargyri plano A B applicetur: Hydrargyri nihil inibi vel assurget, vel deprimetur.

Fig. 320. INtelligatur enim Tubi seu Vasis D vel H (aere pleni) orificium E, superficiei Hydrargyri A B admoveri in C. Cùm Vis Elastica aeris inclusi, æquipolleat oneri incumbentis externi, (per prop. præced.) æquè premitur A B in C atque in reliquis ejusdem partibus; (vas ipsum enim aliunde sustineri supponimus:) Adeóque nulla propterea Hydrargyri inibi vel ascensio vel depressio: per prop. 1. hujus.

SCHOLIUM.

PRopositiones has duas de aeris Vi Elasticâ, ejúsque effectu, apponendas censui, ut obviam eatur scrupulis quorundam inde ortis quòd huic non attenderint.

Putà, Si inversus Tubus D C, aere plenus ejusdem tenoris cum ambiente, Hydrargyro in C superponatur; Tubóque (aliunde sustento) impediatur pressus superincumbentis aeris; adeóque pars C aere tantùm qui tubo includitur (modicæ altitudinis) prematur, reliquæ autem toto onere aeris incumbentis (altitudinis immensæ:) Certum est, pondus aeris prementis C, longè minus esse quàm alibi prementis partem huic æqualem; adeóque, si pondus tantùm spectetur, assurgere deberet Hydrargyrum in C; (neque huic obstaret aer tubum occupans, ut qui compressionis capax est, & reapse comprimeretur si elater debilior esset quàm vis in C sursum prementis:) Sed, propter Elateris vim æquipollentem ponderi externi aeris, non minùs ab aere qui includitur tubo premitur C, quàm ab aperto aere partes reliquæ.

Similiter in *Antliâ Pneumaticâ*, seu *Organo Pneumatico Boyliano*, si pondere tantùm, non elatere, ageret inclusus aer; immissa animalia, etiam àbsque aeris exsuctu, paria fere paterentur (utpote minùs pressa quàm in aperto aere) atque jam post exsuctum aerem.

Item, in eâdem Antliâ, si intromittatur Vas hydrargyrum continens, cui ita ut suprà dictum est immergantur inversi Tubi (hydrargyro

priùs repleti) labia: Postquam undique occluditur Antlia ne ulla fiat communicatio cum externo aere, manet adhuc hydrargyrum in tubo eâdem quâ priùs altitudine suspensum, putà ad uncias pedis Anglicani plus minus 29; non quòd eodem quo priùs pondere prematur subjecti vasis hydrargyrum, sed quòd inclusi aeris vi elasticâ externi aeris ponderi æquipollente prematur; nec priùs subsidit, quàm vis illa debilitetur. Ubi verò, propter exsuctam aeris partem, reliqui (utpote jam minùs compressi) Elater debilitatur, subsidit Hydrargyrum ad minorem minorémque continuè altitudinem prout plus plúsque Aeris exsugitur: Idque eousque, me spectante, aliquando factum fuit, ut vix ultra pedis Unciam unam altitudinis suspensum manserit: (Sed &c, si intruso aere fortior redderetur elateris vis, adhuc altiùs ascenderet Hydrargyrum quàm extra Antliam.) Quod & inter Experimenta *Boyliana, Physico-Mechanica* occurrit; *Experimento*, 17. Sed &, ex eo tempore, vase jam commodiùs præparato, observavit idem Honoratissimus *Boylius* aliquoties (quod ab eo ipso accepi;) Hydrargyrum in Tubo contentum, eâdem operatione præstitâ, ad ipsam usque stagnantis infrà Hydrargyri superficiem subsidisse, neque supra illam omnino eminuisse.

Atque similis ratio assignanda erit in variis istiusmodi phænomenis quæ non ab aeris gravitate immediatè dependent, sed ab ejus vi elasticâ à gravitatis pressu impressâ. Quippe nisi foret hæc vis Elastica, gravitas aeris ubi non posset directè applicari (ut in vase clauso) non id præstaret: Sin autem Gravitas non foret, nec esset ea vis Elastica, à pressu ponderis aeris incumbentis orta; Elater enim, utcunque in se fortis, nisi comprimatur nil agit, utpote cujus tota Vis activa est tantùm conatus se restituendi in situm unde detrusus fuerat.

Ex eodem principio (de conclusi Aeris Elatere) reddenda est ratio, *Cur Aeris pondus non sentiamus.* Quippe si tanti ponderis sit Aer quanti jam perhibetur (cum antehac, non modò nullius ponderis censeretur, sed positivè levis,) mirum videri possit quod tantum onus sustinentes non eo nos premi sentiamus.

Item, *Cur Aquâ immersi non sentiant Aquæ pondus.* Cùm enim, non modò nunc dierum, sed & in veteri Philosophiâ, Aquam gravem esse non dubitetur; eò magis mirandum videatur, quòd, Aquæ suppositi, incumbentis gravitatem non sentiant; cùm interim minorem aquæ molem alibi impositam ferentes opprimerentur. Quódque de Aquâ hic dictum est, de aliis item fluidis intelligendum est: imo & quæ fluidorum instar sunt; putà, siquis Arenæ seu Farinæ cumulo penitus

nitus immergeretur, non magis ille (credo) Arenæ seu Farinæ, quàm Aquæ, pondus sentiret.

Ratio est, (non, quod dici solet, quòd Aqua non gravitet in suo loco; putà supra aquam, aut gravius quiddam; contrarium utique dicendum est, nam superiores aquæ partes premunt inferiores, ut ex multis Experimentis seu Observatis satis liquet; sed) quoniam Aer vel Aqua ex omni corporis immersi parte æqualiter premens, partium positionem non turbat. Comprimit quidem (propter Aerem in sanguine aliisque humoribus compressionis capacem) quod observavit Honoratissimus *Boylius* (*Paradox. Hydrostat.* in fine) in Gyrinis (nostrates, alibi *Tad-poles* appellant, alibi *Hob-nails*,) aquâ inclusis validè compressâ, ubi satis vividè se movebant, sed magnitudine imminutâ: Sicut, ex adverso, Animalia, Antliâ Pneumaticâ inclusa, subducto aere, augeri solent; propter aerem humoribus contentum insigniter dilatatum; neque id sine dolore, propter insignem vasorum continentium & fibrarum seu membranarum distentionem, fortè & lacerationem.

Aerem autem, seu quod Aeris instar est, (*Spiritus* fortè dicas,) magnâ copiâ in Sanguine contineri, certissimum est, poteśtque ad oculum demonstrari: Sanguinem enim, in aperto vase contentum, si *Antliæ Pneumaticæ Boylianæ* immiseris; subducto aere (quod ipse aliquoties vidi, spumescit protinus,& non in spumam tantùm sed amplissimas bullas se expandit, (aere sanguini immisto, propter sublatam ab extra compressionem, se insigniter ampliante;) & quidem plus quàm speraveris, ita ut saponis inter lavandum expansio in bullas, huic aeris in sanguine expansioni cedat.

Quódque inde rumpantur fibræ, videtur hinc saltem existimandum, quòd Sanguis ille, post innumeras istiusmodi bullas turgente aere sic inflatas ruptásque, per aliquot dies postea reservatus, non (ut fieri solet) in grumosam massam coaluerit, sed liquidus permanserit. (Quod ipse vidi, & inter Experimenta *Boyliana* alicubi, si bene memini, memoratur.)

Contra verò; ubi ex omni parte (pro fluidorum naturâ) æqualiter premitur immersum Corpus; aerísque particulæ,in minutissimas quásque partes sese cum humoribus insinuantes, & pridem fuerant æqualiter pressæ (nam nisi sic fuissent, partes minùs pressæ reliquis locum concederent quo ampliarentur, per prop. 1. hujus,) &, novâ pressione jam accedente ab incumbente aquâ, æqualiter item (ob eandem rationem) porro comprimuntur; manent partes similiter ut priùs ad invicem sitæ, nec ulla fit fibrarum seu membranarum distractio aut laceratio, adeóque nullus dolor seu sensus oneris.

Con-

Contrahuntur quidem hac ratione fibræ membranæque sed non renitentes; (quippe jam ante in statu tensionis erant; quod patet ex fibrarum aut membranarum, siquando secantur, spontaneâ contractione;) adeóque nec dolor inde oritur seu sensus oneris. Et quidem, dummodo nulla fit inæqualis pressio seu partium dislocatio, nec caro ossium (utcunque conjunctorum) nec ossa carnis ullam ex sensu perceptionem habent; sed sicubi inæqualis pressio aut dislocatio fiat, quâ partes extra situm suum detrudantur, tum tandem fit tactûs perceptio. Sed hoc in immersis fluido (ut jam ostensum est) non contingit; adeóque nec sensus Oneris, sive ab Aere sive ab Aquâ (alióve liquore) incumbente.

Possunt hæc ex *Antlia Boylianâ* confirmari. Quippe, si Antliæ *Recipienti* immiseris Vesiculam, flaccidam quidem (utpote parum aeris inibi habentem,) sed stricto collo probè obturatam (nequid effluat;) dummodo eadem ubique maneat aeris Compressio adeóque & Vis Elastica, omnia ut priùs perseverant.

Sin ex Recipiente aliquid aeris exhaurias, adeóque compressionem & vim elasticam aeris in Recipiente minuas; aer in Vesicâ (utpote magis compressus adeóque & magis elasticus quàm qui est extra Vesicam in Recipiente) se expandet, vesicâ interim (tanquam inflatâ) turgente. Idque eousque fiet quamdiu Vesicæ latera ita extendi possint ut aeri intus contento expansionem similem concedant ei quam habet aer Recipientis. Ubi verò non ita possit extendi Vesica, si Recipientis aer reddatur adhuc minùs elasticus, qui itaque pressui interno minùs æquipolleat; violenter distenditur vesica, (nempe pro eo gradu vis Elasticæ quo superat interior aer exteriorem;) quod quidem, si adesset sensus, non sine dolore fieret; eáque violentia, si major sit quàm quæ laterum Vesicæ firmitati æquipolleat, rumpetur vesica. Quod & in phialis vitreis, tenuis corticis, sæpiùs observatum est.

Si verò inflatâ sic vesicâ (nec rupta tamen) aerem in Vas *Recipiens* denuo admittas; flaccesset iterum vesica atque in minorem locum (fibris se retrahentibus) recipiet: quod etiamsi adesset sensus, sine dolore fieret, cùm nulla vis fibris inferatur. Quodque in hac vesiculâ unicâ videre est, idem de innumeris in corpore vesiculis sive bullis (exiguas Aeris seu Spirituum particulas continentibus) intelligendum est; quarum pressio ex aere æquabiliter incumbente vix major erit quàm quæ fibrarum extensio priùs fuerat se jam retrahentium.

Verum quidem est, si vesicæ loco phialam vitream immiseris, cujus latera

latera rigida sint neque se (ut fibræ) contrahant, (modò vitri tenuitas & forma tales sint ut externæ pressionis excessui supra internam sustinere non valeant,) rumpetur phiala, partibus corticis intra trusis: at hoc in immersis fluido secus est, ubi vesicularum cortices flaccidi sunt, & pressuum sine violentiâ capaces. Si verò eò usque urgeretur (ob immensam puta aquæ profunditatem) compressio, ut non possent vesicularum cortices se ulterius sine dolore contrahere; non dubito quin oneris & doloris sensus tum futurus esset. Ossa verò, & cartilagines, in compressionibus minoribus, utut flaccida non sint, dolorem à pressu illo non sentiunt, eo quòd partes illæ corporis duræ sint perceptionis minus (si omnino) capaces; sitque sensatio tantùm in nervis, fibris, membranis, aliisve corporis partibus mollioribus.

Quanta verò sit ea sive Compressio sive Dilatatio cujus capax est Aer, non facilè dictu est. Magnam certè esse, ultra quàm quis putaverit inexpertus, experimentis plurimis compertum est.

Illum Aeris statum qui nobis ordinarius est, naturalem esse (quem sponte suâ subiret aer non vi compressus,) non est existimandum. Quippe, nisi compressus esset, nulla foret in eo statu vis Elastica, (quam esse experimur,) ut quæ ab Elateris compressione tota pendet, in situm ampliorem conantis se restituere.

Quousque verò, si omnis compressio tolleretur, se ampliaturus esset Aer (qui ex innumeris corpusculis Elasticis variâ figurâ varióque situ videtur componi,) tentatum potius quàm penitus exploratum est.

Mersennus olim, Æolipilæ ope, ingenti caloris vi adhibitâ, (quantam ejusmodi vasa sine fusione ferre possent,) Aerem se ita dilatâsse affirmat ut spatium *Septuagecuplum* illius quod priùs habuit occupaverit.

Honoratissimus *Boylius* noster, absque caloris ope, solâ vi suâ elasticâ Aerem se dilatâsse expertus est, in locum pristino majorem vicibus primùm 9; tum, vicibus saltem 31, (sed majoris adhuc expansionis capacem esse si spatium esset quo reciperetur:) deinde, plusquam vicibus 60: tum, vicibus plusquam 152; (quæ plusquam duplà est expansionis Mersennianæ, vi caloris obtentæ, quæ tamen tantum non incredibilis existimata fuerat:) Quæ recenset ille, inter *Experimenta* sua *Physico-Mechanica de Aeris Elatere*, &c. Experim. 6.

Post id temporis, sed jam ante Octennium vel Novennium plus minus, (ut idem refert in Experimentis nuper Editis *de Admiranda Aeris Rarefactione*,) Expansionem illam, aliis mediis, multò adhuc promovit; nempe, usque ad vices saltem 8000, (vi suâ Elasticâ solà, absque caloris ope:) atque, iterato experimento etiam adhuc major inventa erat; quibus Experimentis etiam ipse interfui.

Idem-

Idémque, Experimento adhuc aliter instituto, (prout ibidem recensetur) ad vices pervênit plusquam 10000, (seu plusquam *Decies Millecuplum* loci quem priùs occupaverat idem Aer,) imo ad locum occupandum vicibus 13769 majorem.

Et quidem, inter ingeniosa illa atque subtilia *Experimenta Florentina* ante paucos annos edita, inventus est Aer, non modò absque *Caloris* ope, sed & absque ope (quam *Boylius* adhibuerat) *Antliæ Pneumaticæ*, solius *Experimenti Torricelliani* auxilio, expansus in molem saltem 173 vicibus pristinâ majorem.

At quis interim spondere possit, etiam in expansionum harum actu præstitarum maximis, compressionem omnem penitùs sublatam esse? Quod in factum fuerit, etiam adhuc majoris Expansionis capax censensendus erit Aer. Quem itaque judicemus, ex tenuissimis, eísque maximè convolutis, particulis, & Elatere forti præditis, compositum esse. Quippe secus, vix cogitari potest quomodo in tam vastam amplitudinem, solâ suâ Vi Elasticâ (sublatâ vi extrinsecus comprimente) se dilatare posset exiguus Aer.

Cúmque se ita sponte dilataturus foret (si abessent impedimenta) quem hic habemus Aer; manifestum inde est, quod parem huic Compressionem jam sustineat. Sed majoris adhuc Compressionis capacem esse, non est quòd dubitemus; imò quotidie experimur.

Huc referri possunt *Sclopeti Pneumatici* dicti, seu *Spiritalis*, (nostri *Wind-gun* appellant) Experimenta, à *Mersenno* recensita; ubi, à compresso Aere, globulus magnâ vi projicitur, tanquam à pulvere Pyrio. In quo tamen summâ quâ potuerunt industriâ non in minorem quàm partem quindecimam, ejus quem priùs occupaverat loci, aerem vi comprimere valuerunt: & quidem etiam de hoc dubitat, qui illa instituit, *Mersennus* ipse (*Phænom. Pneumat.* prop. 32.) an in partem $\frac{1}{15}$, an $\frac{1}{8}$ potiùs dicendum fuerit, ob fallaciam aliquam quam Experimento subesse suspicatus est.

Item quæ in *Machinâ Compressivâ* (à *Societate Regiâ Londini* in hunc usum paratâ) instituta sunt Experimenta: in quâ compertus est Aer in soliti spatii partem $\frac{1}{10}$, vel etiam $\frac{1}{12}$ (*decimam*, vel *duodecimam*,) vi coerceri.

Eáque quæ habet *Boylius* idem (à quo & cætera desumpsi) *Experimenta Condensationis Aeris à Frigore.* Alterum quidem; in quo, quum Glaciem Sale mixtam circumposuerat undiquaque vasi vitreo quo continebatur conclusus Aer, (eo modo qui in congelandâ aquâ adhiberi solet,) contractum deprehendit in spatium quod ad pristinum erat ut 147 ad 158 plus minus; (quæ multò minor est quàm quæ vi

mechanicâ obtineri solet; quippe hic non nisi $\frac{1}{138}$ pristini spatii amittitur, hoc est, $\frac{1}{14}$ fere; cùm illic adhibitâ vi mechanicâ vix tantundem retineretur: dum tamen frigus sic adhibitum tantum fuerit ut aquæ congelandæ abundè sufficeret, summúmque hyemis apud nos rigorem superaverit.) Alterum; quo quum Glaciem vel Nivem Sale mixtam vasi similiter circumposuerat, cui Aeris exiguum & Aquæ multum includebatur, Aqua vi frigoris expansa (utpote congelationi proxima) Aerem sic compressit ut intra partem *Quadragesimam* seu $\frac{1}{40}$ pristini spatii concluderetur; fortiùs adhuc eundem compressura si non (quod contigit) vas ipsum rumperetur. Quæ quidem Contractio, seu Condensatio, utut minor sit quàm modò dicta Expansio seu Rarefactio, (eò quòd Aer jam fuerat, in statu ordinario, insigniter compressus;) multò tamen major est quàm vel hybernum Frigus, (aut illud artificiale, hyberno fortius,) vel vis Mechanica hactenus adhibita, potuerit efficere.

Si verò utramque (summæ Rarefactionis summæque Condensationis supra quàm est in statu aeris apud nos ordinario) considerationem componamus: Cùm spatium quod occupat Aer sic Dilatatus, sit ad spatium quod occuparet Aer nobis Ordinarius, ut 13769 ad 1; atque quod Aer Ordinarius occupat ad spatium quod occupat sic Compressus, sit ut 40 ad 1; erit spatium Aeris sic Dilatati ad spatium ejusdem sic Compressi, ut ($13769 \times 40 =$) 550760 ad 1; vel, numero rotundo, ut 550000 ad 1, seu ut *Quinquies Centena & Quinquaginta Millia*, ad *Unum*. Et, quanto, per media olim fortè excogitanda, removeri adhuc possit ab invicem uterque terminus; conjicere non valemus.

Unicum adhuc ex iisdem D. *Boylii* (de Aeris Rarefactione & Condensione, seu Dilatatione & Contractione,) Experimentis monendum duxi. Nempe, quòd, utut Aerem in statu admodum laxo seu dilatato conclusum detinuerit in vase vitreo per Menses aliquot, imò per aliquot Annos; non tamen hactenus observare potuit, quin Elaterem suum retinuerit, & quidem in eodem quo priùs vigore; nec ob laxitatem illam languorem contraxerit: Cùm tamen non rarò observemus, Corpora Elastica (putà, laminam Ensis, aliámve chalybeam) ubi aliquadiu in situ indebito detenta fuerint, Elaterem suum deperdere, nec vi suâ se in pristinum situm restituere; Sed & Magnetem, Acúmve Magnete incitatam, si extra situm suum longo tempore detineas, vel polos mutare, vel sensim deperdere verticitatem suam. Tantus scilicet est, etiam in rebus inanimatis, diuturnæ in eodem situ positionis effectus.

Verùm

Verùm hìc loci dissimulandum non est Experimentum aliud, illustre quidem & satis stupendum, quódque me de Phænomeni causâ sollicitum tenuit.

Nempe; *Si Hydrargyrum inverso Tubo* (ut dictum est) *suspensum, sit ante inversionem ab omni Aere accuratissimè depurgatum* (quod nonnisi summâ curâ & diligentiâ fiet,) *atque inversione cautè factâ, Tubus in loco firmo ab omni concussione liber constituatur; Hydrargyrum (aperto infra orificio) suspensum permanebit, etiam longè ultra altitudinem suprà indicatam: Si verò, Hydrargyro sic suspenso, vel tantillum Aeris admittatur, vel concutiatur Tubus; statim præcipitabitur Hydrargyrum usque ad solitam altitudinem, ibique* (post reciprocationes aliquot factas) *consistet.*

Phænomenon hoc, Experimentis quibusdam, in *Organo Boyliano* primum, deinde in aperto aere factis, debemus. Observaverat utique Honoratissimus *Boylius* (quod ex ejus *Experimentis Physico-Mechanicis*, Anno 1660. editis, *Exper.* 17. ante monuimus,) Hydrargyrum, intra Antliam suam Tubo suspensum, subducto Aere gradatim descendere, uti expectaverat; non ita tamen quin, quamcunque adhibuerit diligentiam, supra stagnantis inferiùs Hydrargyri superficiem (contra quàm speraverat) extaret adhuc ad altitudinem *Unciæ* vel saltem *Semi unciæ* (præsertim si ab aere priùs depuratum fuerit,) cui in Aquâ respondent pedis Unciæ saltem 7 aut 8. Idémque in Aquâ expertus, immissis in Antliam tubis brevibus (putà, 5 aut 6 unciarum pedis) eâ repletis, Aquam reperit (saltem si ab Aere priùs depurgata fuerit) non descendere. Quæ quamquam Organo minùs præcisè obturato, quàm ut potuerit Aer omnis inde exhauriri, imputari posse videretur; rem tamen cum iis è *Societate Regiâ* qui tum temporis solebant convenire communicavit, ut altiore dignam examine.

Cúmque, post Librum illum editum, Organúmque ipsum *Londini* 1661 conspectum, variis adhibitum usibus, id eousque approbavit Clar. *Hugenius*, ut domum reversus aliam sibi ad ejusdem Antliæ formam parandam curaverit: id ipsum ille in Aquâ expertus similiter evenire deprehendit, (nescius, credo, D. *Boylium* id pridem deprehendisse:) Nempe, immisso in Antliam tubo breviusculo aquâ repleto ab aere depuratâ, post Aerem ex Antliâ quantum potuit exsuctum, Aqua adhuc suspensa mansit.

Idémque (suis literis) ut notabilem in doctrinâ *Boylianâ* (de Aeris Pondere & Elatere) difficultatem objecit.

Cui (literis suis) reponebat D. *Boylius*, rem planè ita esse, atque ab ipso

ipso jam ante observatam, tum in Aquâ (ut D. *Hugenius*) tum etiam in Hydrargyro; agnitámque difficultatem, & cum Societate Regiâ communicatam, ut ulteriori adhuc examine dignam. Interea tamen solvi difficultatem videri posse ob Antliam non ita penitùs exhaustam quin ut residuus Aer exiguum illud pondus sustinere potuerit; & siquando Aqua illa brevium tuborum, aut huic æquipollens Hydrargyrum, ab aere nondum depuratum, subsideret, id imputari posse latenti intùs Aeri elatere suo depellenti vim Aeris extra tubum jam valde debilitatam.

Quod quidem responsum, utut Objectioni (prout tum res erant) satisfacere videretur; non tamen fecit quin *Societati Regiæ* visum fuerit in rem illam altiùs inquirere, Experimentis tum coram ipsis publicè, tum alibi privatim, præsertim ab Honoratissimo Præside D. Vicecom. *Brounckero* & D. *Boyle*, (quorum præsertim curæ res ea demandata fuit;) sive in Organo *Boyliano* sive in aperto Aere, faciendis.

Pόstque varia facta tentamina, retulit tandem Societati Regiæ D. *Præses*, se Hydrargyrum sic suspensum detinuisse, ultra solitam altitudinem ad Æquipondium necessariam (putà unciarum 29 aut 30,) nempe ad pedis uncias usque 34: Posteàque D. *Boylius*, se idem expertum in altitudine unciarum 52: Iterúmque D. *Præses*, se idem ad pedis usque uncias saltem 55; pollicitus porro se rem ulteriùs adhuc prosecuturum. Quæ ex Regiæ Societatis Regestis Annorum 1662 & 1663 liquent.

Idémque ex eo tempore, frequenti experientia, in aperto Aere (absque Antliæ ope) Experimentis Honoratissimorum *Brounckeri*, *Boylii*, aliorúmque, crebrò iteratis (quibus & ego aliquando interfui) confirmatum est; Hydrargyrúmque, non tantum ad usitatam altitudinem (quò Æquilibrium cum externo Aere fieret,) putà, ad pedis Anglicani Uncias 29 circiter, sed etiam ad Uncias usque 40, 50, 60, aut etiam plures, suspendi deprehensum est, atque ita suspensum per dies aliquot consistere; sed concussione factâ, vel tantillo Aeris admisso, statim præcipitari ad Æquilibrium usque: Ut de Phænomeni certitudine jam dubitandum non sit.

Atque hoc quidem Experimentum, illustre & insperatum, cùm leges Staticas suprà positas quadantenus turbare videatur, in Gravitatis naturam altiùs inspiciendum monet, eóque facem non contemnendam præferre fortè deprehendetur olim.

Interim, donec certius aliquod à Viris Eruditis conclusum fuerit, hæc mihi ratio videtur non improbabilis. Nempe; Cùm olim, in veteri

veteri Philosophiâ, Terra, Aqua, aliáque ejusmodi Corpora, Gravia censerentur; Aer autem Levis: videri possit contrarium quadantenus hinc dicendum; omnémque Gravitationem actualem ab Aeris Ætherísve pressu vel Elatere (expansionem moliente, cæteráque propterea loco suo deturbante,) provenire: Absque quo, segnia hæc Corpora, quæ Gravia dicimus, in quiete posita sic permanerent, sine Gravitatione actuali sive descensu; neque magis essent ad motum deorsum proclivia quàm ad lateralem. Hydrargyrum itaque ab omni intus Aere depuratum, atque ita ut dictum est suspensum, etiam ultra consuetam altitudinem ad æquilibrium necessariam, cùm ab omni Aeris pressu liberum sit, nec ejus vel gravitate vel elatere urgeatur, (quippe, qui intùs deprimeret, nullùs est; quíque extra est, si omnino premeret, sursum premeret; nempe, per Tubi orificium, quà solùm patet aditus; nam à pressu aeris superno vel laterali à Tubo defenditur;) in quiete positum immotum manet, suúmque situm retinet. Si verò, propter Tubi concussionem aliquam, aliquámve intùs commotionem ab Aeris elatere, vel priùs inibi relicti vel jam demum admissi, in motu ponatur; motum illum (pro ratione quantitatis materiæ, vel densitatis partium, vel quicquid id sit quod *Ponderis* nomine vulgò insinuamus,) prosequitur, deorsum (quà via patet) vergens. Adeóque, quicquid id sit quod in Hydrargyro (aliísque similibus) *Pondus* dicimus, utut absque Elatere vel pressu aeris aut quod hujus instar sit non inchoaret motum, motu tamen undecunque orto rationes Staticas deinceps observat. Atque hæc est quæ mihi videtur Phænomeni hujus non improbabilis ratio.

Addo tamen, Tubi superficiem utcunque politam (quod de aliis superficiebus pariter intelligendum) non ita ab omni asperitate seu inæqualitate immunem censendam esse, quin etiamnum aliquid asperitatis supersit, unde corporis adjacentis cohæsio aliqua & (si moveatur) frictio oriatur, (ut suprà aliquoties insinuatum est,) quâ motus aliquatenus impediatur, atque ob quam mota corpora alii contigua Volvi faciliùs quam Labi deprehenduntur. Atque hinc, si post omnem adhibitam diligentiam nonnihil aeris utut exiguum permanere censeatur, compensatio fieri possit ne Hydrargyrum excutiat.

Fateor interim mihi ne sic quidem penitus satisfactum esse, scrupulósque adhuc superesse & difficultates quibus respondendis necdum sufficio; quin aliquid adhuc mecum hæreat. Et quidem fieri potest (quod D. Vicecom. *Brounckerus* suspicatur) Aeris pondus multò majus adhuc esse quàm ut altitudini Hydrargyri unciarum plus minus 29 respondeat; sed ab aere intus latente (nisi expurgetur) ad eam usque alti-

altitudinem depressam esse Hydrargyrum: At ubi expurgatur Aer, nihilque tum supersit quod externi aeris ponderi se opponat præter nudum Hydrargyri pondus, rem secùs deprehendi, hydrargyrumque ab aeris æquipondio altius sustentum iri.

Sed nihil certi hic ausim determinare, severiori adhuc disquisitione rem dignam censens.

PROP. XIV.

Quæ de Hydrargyro propositionibus superioribus ostensa sunt eadem in aliis Fluidis, servatâ Gravitatum proportione, pariter obtinent.

CUm enim omnium Demonstrationes Hydrargyro speciatim applicatæ, procedant ex generali Fluidorum naturâ, eædem pariter obtinebunt in fluidis aliis, pro suâ cujusque gravitate.

Verbi gratiâ: Cum pondus Aquæ ad pondus Hydrargyri, æqualis magnitudine, sit ut 1 ad 14 (numero rotundo,) seu potius (quod D. *Boylius* ex suis Experimentis accuratius judicat) ad $13\frac{3}{4}$ circiter; (*Getaldus*, in suo *Archimede promoto*, ponit ut 1 ad $13\frac{4}{7}$:) Quò Cylindrus Aquæ æquipolleat externi Aeris pressui, requiritur ut altior sit Cylindro Hydrargyri æquipollente, vicibus 14, saltem $13\frac{3}{4}$, aut $13\frac{4}{7}$; prout hæc, illa, vel ista proportio sit accuratior; & quidem pro diverso sive Aquarum sive Hydrargyrorum pondere, poterit nunc hæc nec illa esse accuratior; potest enim & Aqua aquâ & Hydrargyrum Hydragyro levius esse graviúsve. Adeoque quam posuimus altitudinem C I, (fig. 314.) in Hydrargyro, unciarum plus minùs 29; ponenda erit, in Aquâ, pedum plus minus 33.

Huic consonum est D. *Boylii* Experimentum (cui & ipse cum aliis interfui) cujus meminit in *Continuatione Experimentorum Physico-Mechanicorum*, Experim. 15. Qui, experimento quærens quousque posset Aqua Suctione elevari in tubo, supra superficiem infra stagnantis aquæ cui insistebat, invenit (summâ adhibitâ diligentiâ) maximam ad quam tunc temporis elevari posset altitudinem fuisse pedum 33 & unciarum 6, hoc est pedum $33\frac{1}{2}$; quo tempore altitudo Hydrargyri propter Atmosphæræ æquipondium suspensi, fuit unciarum pedis $29\frac{1}{4}$ proximè; quæ quidem Hydrargyri altitudo per $13\frac{3}{4}$ multiplicata, exhibet uncias 402 proximè, hoc est pedes 33 cum 6 unciis. Atque,

eâdem analogiâ, quo tempore assurgeret Hydrargyrum ad pedis Anglicani uncias 30 (qui ascensus est quasi maximus,) assurgeret Aqua ad altitudinem unciarum 412 $\frac{1}{2}$, hoc est pedum 34 & unciarum 4 $\frac{1}{2}$: Quo tempore verò Hydrargyri ascensus esset nonnisi unciarum 28 (qui quasi minimus est,) ascenderet aqua ad altitudinem unciarum 385, seu pedum 32 $\frac{1}{12}$. Ut maximam Aquæ ascensionem ob Suctionem (seu, quod tantundem est, ob Atmosphæræ æquiponderantiam) obtinendam, ritè judicemus, nunc pedum 34 $\frac{1}{3}$, nunc pedum 32, (proximè,) nunc his intermediam, prout maxima minima vel intermedia fuerit Atmosphæræ gravitatio; saltem ab his limitibus quam parum recedendum erit.

Verùm non opus est, ad hoc de Aquâ Phænomenon probandum, (quod non ultra certam altitudinem suctione possit elevari,) ut ad idem in Hydrargyro tentatum recurramus. Quippe illud in Aquâ primò deprehensum est. Utut enim, qui ob Fugam Vacui suctiones fieri existimaverint, putaverint etiam (nec quidem inconsequenter) ad quantamcunque altitudinem sic posse Aquam elevari; nec dubitarint quin Antliarum atque Siphonum ope posset aqua etiam supra altissimas Turres nedum Montes suctione trahi: Deprehenderant tamen Antliopœi, cùm ad praxin deventum esset, rem non succedere; omnésque aquam supra certam altitudinem his mediis elevandi conatus frustra esse. Atque hoc ipsum est quod *Galilæo* primùm in animum induxit, Vacui Fugam illam non infinitam esse, sed intra certos limites coerceri; Aerísque Æquipondium illius loco substituendum. Indéque *Torricellio* ansa data est idem in Hydrargyro tentandi. Quippe non imprudenter conjecit ille, si ob Aeris Æquipondium nonnisi ad certam altitudinem elevaretur Aqua, ad minorem adhuc elevandum fore Fluidum aquâ Gravius: atque, in Hydrargyro tentata, res successit ex voto. Atque exinde, Torricellio præeunte, res jam redacta ab altitudine pedum plus minus 33, ad altitudinem tubi breviusculi, unciarum putà 29 plus minus, facta est magis tractabilis; (cùm tubi tot pedes alti, liquoribus aeríque impervii, nec facilè obtineri possent, nec commodè tractari:) Unde tot tantíque momenti Experimenta profluxerunt, profluúntque indies.

Quódque in Aquâ ostensum est, in Fluidis aliis, servatâ proportione gravitatum, perinde obtinere censendum est.

PROP. XV.

Quæ de Hydrargyro, aliisve Fluidis, in Tubo suspensis ostensa sunt; eadem Siphonibus, Antliis, aliisque ejusmodi organis, accommodanda sunt.

Fig.321. ESto enim, verbi gratiâ, Siphon seu Tubus incurvus C D E (utrinque apertus,) cujus alterum extremum C Aquâ alióve Fluido immergatur, alterum E extra propendeat. Notum est Experimentum (ut in deplendis vasis vinariis, aliisve,) si sugendo in E proliciatur liquor donec effluat, omissâ deinceps suctione continuabitur effluxus, donec liquor in vase vel penitus exhauriatur, vel a justâ altitudine deficiat: Eâ tamen lege, ut orificium E inferius sit quàm A B liquoris in vase superficies.

Hujus Phænomeni causa à Fugâ Vacui peti solebat olim; nempe, quod exsucto in E aere qui in Siphone fuerat, ascendat (contra gravitatis suæ propensionem) Fluidum in C, ne daretur (quod naturam omnibus modis aversari putabatur) Vacuum in Siphone. Et, consequenter, hujusmodi artificio etiam supra altissimos montes in oppositas valles aquam transferri posse putabatur.

Postquam verò experimento compertum est, non posse aquam (aliúdve fluidum) ultra certam altitudinem suctione attrahi, eámque in altitudinem immensam sic elevandi spes fuisse fallaces; cœpitque in Fugæ Vacui locum succedere (Galilæo id primùm suggerente, & promovente Torricellio,) Aeris Æquipondium: ad leges Staticas deventum est, quò altitudines illæ pro cujusque Fluidi gravitate determinentur.

Exsucto igitur Aere in E, (seu potius, loco facto in sugentis Thorace dilatato quo recipiatur aliunde protrusus aer,) subjectum Fluidum ab aeris extrà incumbentis pressu in Siphonem protruditur (eâdem ratione quâ, suprà, in Tubum rectum) in C; idque eousque (nec ultra) donec fiat Æquilibrium cum externi Aeris pressu, (per ante demonstrata;) putà, ad altitudinem C I; (hoc est, in Hydrargyro, Unciarum quasi 29; in Aquâ, Pedum quasi 33, plus minus; atque in aliis liquoribus proportionaliter pro suâ cujusque gravitate.) Si itaque Siphonis summum D, altius non sit quàm I; assurget fluidum ad summum usque; exitúque illic invento per crus descendens D E, effluet

ex E; atque hoc continuè, causis perseverantibus. Eâ tamen lege, ut inferius sit E quàm C (superficiei A C B:) Secùs enim, cùm æquali Atmosphæræ pressu urgeantur C & E, si Cruris D E altitudo minor sit quàm Cruris D C, adeóque fluidum quod illo continetur minùs gravitet quam quòd in hoc, contrario cursu feretur fluidum ab E per D ad C, succedente Aere in E: Saltem, nisi Siphonis amplitudo tanta sit ut possit Aer simul ascendere (per fluidi latera) dum defluit fluidum curis D E; quo casu, partiri poterit fluidum in D, descendente parte alterâ per D C, alterâ per D E, ascendente Aere per fluidi D E descendentis latera; in Siphonibus verò strictioribus retrò feretur fluidum in E, per E D C, ab aere in E urgente propulsum.

Sin D altius sit quàm I, sursum propelletur Fluidum (ob causas suprà traditas) à C ad I usque, sed non ultra; adeóque ad D non pertinget: Adeóque tantum abest ut cessante suctione continuè profluat per D ad E, ut nullâ suctione ad E protrahi possit. Cùm enim suctio non aliter agat quàm (aperto Thorace, aut quod Thoracis instar est,) locum faciendo quo recipiatur fluidum (non suctionis vi tractum, sed) ab externi aeris pressu (seu quod hujus instar est) propulsum; si, utut loco facto, non valeat tamen externus aer eò propellere Fluidum (propter D altiùs quàm I,) Fluidum ad I consistet, neque altius feretur quò per D ad E possit pertingere. Et quidem, si totus fluido impleatur Siphon C D E; aperto utrinque orificio, factâ partitione in D, quod est in crure D C deprimetur saltem usque ad I, (ne plus prematur C quàm superficiei A C B partes reliquæ,) quódque est in crure D E effluet per E (aere in illius locum succedente;) saltem nisi tam strictum sit crus D E ut non commodè possit ascendens Aer descendens fluidum præterire; quo casu, postquam descenderit fluidum in D E usque ad altitudinem I, suspensum illic detinebitur donec se possit Aer sensim insinuare; viâque tandem factâ quâ possit externus Aer liberè per E intrans vim suam exercere, deprimetur quod erat residuum in crure D E ad C usque.

Idémque in Antliâ (seu Organo Ctesibico) obtinet; Cujus structura ad hunc fere modum fieri solet; Lignum oblongum (vel ex pluribus, si opus sit, compositum) intus excavatum Cylindricè, in puteum demittitur, (extante parte superiore,) infra superficiem aquæ in putei fundo; quæ quidem Aqua intelligenda est, non libera ab aeris pressu, sed eidem obnoxia (secùs enim non sursum propelletur aqua;) Atque alicubi in Antliæ cavo repagulum transversum figitur Fig. 322.

 in

in cujus medio est foramen D per quod ascendat Aqua; & huic foramini incumbens operculum seu valva E, transversario ita fixa ut aperiri aut claudi possit prout infra suprave premitur; Item, Situla à manubrio supernè demissa, (ita Cavi lateribus aptata ut non possit Aer per latera se insinuans transire,) quæ similiter in fundi medio foramen habeat F, eique sic aptatam valvam G, ut E ad D.

His ita constructis; dum manubrium versando Situla sursum trahitur, cúmque illâ incumbens Aer, quò minùs subjecta intra Antliam aqua eo prematur, impelletur in Antliæ cavum aqua aliunde pressa per C ad D, & per foramen (valvam E aperiens) ad fundum usque situlæ (modò altior non sit quàm C I summa æquilibrii altitudo,) utpote à pressu supernè libera, atque infra propulsa: Contrà verò; dum manubrium aliàs versando deprimitur Situla, deprimátque proximè subjectam aquam quæ per D ascenderat; clauditur hac depressione valva E, atque aperitur G; per quam aqua, situlam supergressa, cum retractâ situlâ (clausâ G valvâ) sursum trahitur, viâque illic inventâ per orificium H effluit, succedente ut priùs in retractæ situlæ locum aquâ per D denuo assurgente: atque hoc continuè.

At verò, si altitudo C D major sit vel non minor quàm C I (quâ fieri supponimus æquilibrium cum externi aeris pressu) Aqua per D non ascendet (ne plus premeretur C quàm superficiei A C B partes reliquæ,) totúsque Antliæ labor incassum erit. Sin D sit infra I, ascendet aqua per D ad I usque, modò non impediatur; saltem ad usque fundum situlæ, nisi altior sit hic quàm I. Si verò eousque sursum trahatur situla ut F vel G superet altitudinem I, desertâ situlâ infra subsistet aqua ad I; ita tamen ut si situla dum infra I fuerat aquam per F G hauserat, hanc secum (clausâ G valvâ) elevabit atque per H effundet; sed cum majore exantlantis vi, utpote cui nihil subsidii conferat aqua infernè premens.

Hinc est, quòd Hydrargyrum non possit Siphone, Antliâ, Syringâ (nam & illic eadem est ratio,) alióve Suctionis Organo quocunque, ultra pedis Uncias 29 aut 30 in altum trahi; nec Aqua, ultra pedes 33 aut 34, circiter; aliáque Fluida pro suâ cujusque gravitatis ratione. Causa utique in omnibus eadem est; Nempe, Ea quæ Suctione fieri videntur omnia, Pulsione reverâ fiunt; putà, ab aere extrà gravitante, alióve pressu; suctione nil aliud faciente quàm ut locus paretur ad recipiendum id quod pressu aliunde pellitur.

CAP.



CAP. XV.

Epilogus, ex Miſcellaneis.

CUm tandem ad umbelicum perveniendum ſit, ne opus in immenſum creſcat, (utut pro materiæ copiâ ſatis arctum;) nonnulla in caput hoc ſtrictim congerere viſum eſt, quæ vel ſuis locis omiſſa fuerant, vel conſulto huc rejecta.

PROP. I.

De Spatiis Hyperbolicis, addi poſſunt ſupra traditis hæc quæ ſequuntur.

NEmpe, in hujus Operis Parte Secundâ, Cap. V. prop. 31. prope finem; *pag.* 555. poſt *lin.* 23. hæc inſerantur.

SCHOLIUM.

PRiuſquam autem hoc Spatium Hyperbolicum dimittam, libet ejuſdem cum aliis aliquot figuris Symbolizationes, non olim obſervatas, recolligere.

1. *Si rectarum quotlibet arithmeticè proportionalium quadrata, quadratis invicem æqualibus (vel eodem communi) augeantur; aggregatorum latera quadratica, ad rectam ut axem æqualibus intervallis ordinatim-applicata, complebunt Spatium Hyperbolicum, Curvæ, Semi-axi tranſverſo, & Axi Conjugato interjectum, rectâque axi tranſverſo parallelâ clauſum.* Puta, Si expoſitæ rectæ C A fig. 323. normalis fiat C δ Δ quantumvis producta, in quâ ſumantur partes æquales quotlibet C δ, δ δ, δ Δ, &c. adeóque C δ, C δ, C Δ, &c. arithmeticè proportionales; & junctis δ A, Δ A, &c. æquales ponantur δ o, Δ O, &c. Erit A o O curva Hyperbolica, cujus Semiaxis tranſverſus C A, & C Δ axis conjugatus; ſpatiúmque C A O Δ hyperbolicum complebunt rectæ δ o, &c. ipſis δ A æquales. Hoc demonſtramus Fig. 323.

ſtramus in Tractatu *De Curvarum* 'Εὐθύνσει, iterúmque ad prop. 32. hujus Capitis V.

Fig. 323, 324. 2. Si exponatur, fig. 324. A o O parabola, cujus Axis interceptus A d D, ordinatim-applicata D O, tangénſque O F axi producto occurrat in F; tangátque in verticè A τ T, = D O, diviſa utcunque in τ; cui æqualis ponatur C δ Δ (fig. 323.) ſimiliter in δ diviſa; fiátque angulo D F O, æqualis C Δ A, determinans (in rectâ ipſi C δ Δ normali) rectam C A; & junctis δ A, Δ A, æquales ponantur δ o, δ O, ipſi C A parallelæ, fiátque (ut modò dictum eſt) A o O Hyperbola, cujus Semiaxis C A; ſitque aſymptota C m M: Erit, *Ut ſpatium hyperbolicum* C Δ O A, *ad* C Δ M *triangulum; ſic* A o O *curva parabolica, ad ejus axem interceptum* A d D: *Itémque, ut* C δ o A, *ad* C δ m; *ſic* A o *curva parabolica, ad ejus axem* A d; *& ſic ubique.* Hoc demonſtramus in eodem De 'Εὐθύνσει tractatu; iterúmque hic monemus ad prop. 31. hujus Cap. V.

3. Si converſione Parabolæ A O D circa Axem A D deſcribatur Conoides parabolicum; & converſione Rectanguli circumſcripti A D O T circa eundem axem deſcribatur Cylindrus: Erit, *Ut momentum ſpatii hyperbolici* C Δ O A, *ad momentum trianguli* C Δ M, *reſpectu ejuſdem* C A; *ſeu, ut erecta Ungula ſuper illud, ad Ungulam erectam æque altam ſuper hoc, quarum communis acies ſit eadem* C A; *ſeu, ut Solidum ex converſione illius, ad Solidum ex converſione hujus, circa eandem* C A; (ſunt enim hæ rationes, eædem omnes:) *Sic Conoidis hujus parabolici ſuperficies curva, ad duos trientes ſuperficiei curvæ Cylindri circumſcripti.* Vel etiam (propter C Δ O A = C Δ O D − A O D,) Ut *Momentum Rectanguli* C Δ O D *minus momento Semihyperbolæ* A O D, ad *momentum Trianguli* C Δ M, (reſpectu ejuſdem C A D;) Sic *Conoidis hujus ſuperficies Curva*, ad *duos trientes curvæ ſuperficiei Cylindri circumſcripti.* Quod ibidem demonſtramus, atque hic monemus ad prop. 31. hujus Cap. V.

4. Sed; poſitis (ut § E. prop. 32. hujus Cap. V.) A C $= S = \frac{1}{2}T$, Latereque recto $= L$, A D $= d$, DO = CΔ $= h = \sqrt{\frac{dT + d^2}{T} L}$, ΔO = CD $= c = \frac{1}{2}T + d = S + d = \sqrt{: s^2 + \frac{T}{L}h^2 :} = \sqrt{: \frac{1}{4}T^2 + \frac{T}{L}h^2}$, ΔM $= \sqrt{\frac{T}{L}h^2} = h\sqrt{\frac{T}{L}}$: *Momentum Semi-hyperbolæ* AOD *reſpectu rectæ* CAD (utpote Semiquadrata omnium DO) eſt $\frac{\frac{1}{2}d^2T + \frac{1}{3}d^3}{2T} L$; (Quod ibidem ut demonſtratum aſſumimus ex prop.

prop. 164. *Arithm. Infin.* iterúmque oſtendimus ad § L. prop. 31. hujus Cap. V.) Momentum autem (reſpectu ejuſdem C A D rectæ) Rectanguli C △ O D, $\frac{1}{2} ch^2$; & Trianguli C △ M, $\frac{1}{3} h^3 \surd \frac{T}{L}$; (per pr. 6. ejuſdem.) Ergò, Ut $\frac{1}{2}ch^2 - \frac{\frac{1}{2}T + \frac{1}{3}d}{2T} d^2 L$, ad $\frac{1}{3} h^3 \surd \frac{T}{L}$; hoc eſt, Ut $ch^2 T - \frac{1}{2} d^2 TL - \frac{1}{3} d^3 L$, ad $\frac{2}{3} h^3 T \surd \frac{T}{L}$; Hoc eſt (propter $c = \frac{1}{2}T + d$, & $h^2 = \frac{dT + d^2}{T} L$,) Ut $\frac{1}{2}T^2 + dT + \frac{2}{3}d^2$, ad $T + d$, in $\frac{2}{3} \surd : dT + d^2$: Sic *illa ſuperficies curva Conoidica*, ad $\frac{2}{3}$ *Cylindricæ*: Seu, Ut $\frac{1}{2}T^2 + dT + \frac{2}{3}d^2$, ad $T + d$, in $\surd : dT + d^2$; Sic *Conoidica* ad *Cylindricam*.

5. Sed & eadem eſt ratio momenti curvæ parabolicæ $\overline{AO}$, ad momentum rectæ T O, reſpectu ejuſdem rectæ A D, (nempe, quæ eſt converſione factorum:) Cum itaque Momentorum ratio ex rationibus ponderum & diſtantiarum componatur; ſi ex hoc momentorum ratione eximatur ratio magnitudinum; hoc eſt (ut modo oſtenſum eſt) quadrilinei C △ O A ad triangulum A △ M, (ſeu hujus converſa cum eâ componatur:) habebitur ratio *diſtantiæ Centri gravitatis curvæ parabolicæ* A O, ad *diſtantiam centri gravitatis rectæ* T O, (ab eâdem A D,) hoc eſt ad $AT = C\triangle = DO = h = \surd : \frac{dT + d^2}{T} L$:

Adeoque $\frac{\frac{1}{2}T^2 + dT + \frac{2}{3}d^2}{T + d, \text{ in } \surd : dT + d^2} \times \frac{A\triangle M}{C\triangle OA} AT$ *Diſtantia Centri gravitatis curvæ parabolicæ* A O *ab ejus axe* A D: Vel, propter $A\triangle M = \frac{1}{2} h^2 \surd \frac{T}{L}$, ſi ponamus $hg = C\triangle OA$, adeóque $\frac{A\triangle M}{C\triangle OA} = \frac{\frac{1}{2}h}{g} \surd \frac{T}{L}$; erit ea diſtantia $\frac{\frac{1}{2}T^2 + dT + \frac{2}{3}d^2}{T + d, \text{ in } \surd : dT + d^2} \times \frac{\frac{1}{2}h}{g} h \surd \frac{T}{L}$, hoc eſt, reductione factâ, (propter $h = \surd \frac{dT + d^2}{T} L$ & $h \surd \frac{T}{L} = \surd : dT + d^2$:) $\frac{\frac{1}{2}T^2 + dT + \frac{2}{3}d^2}{T + d} \times \frac{\frac{1}{2}h}{g} = \frac{3T^2 + 6dT + 4d^2}{6T + 6d} \times \frac{\surd : dT + d^2 :}{2g} \surd \frac{L}{T}$. Ubi quantitates omnes ſunt Geometricè determinatæ præter unam g, quæ cum $C\triangle = h$ intelligitur Rectangulum comprehendere æquale Quadrilineo C △ O A; eáque ipſa ap-

prox-

Fig. 323, 324. proximatione quamlibet accuratâ determinatur prop. 31. hujus Cap. V. Sed & hinc similiter habetur ejusdem ab O T distantia; adeóque ratio superficiei ab AO curvâ circa O T conversâ descriptæ, ad Cylindricam rectâ A D sic conversâ descriptam. Aliáque de ejusmodi aliis curvæ parabolicæ conversionibus; quæ hic ulterius prosequi non est animus, ne nimis divagarer.

6. Si eadem curva Parabolica A O circa tangentem verticis A T ut axem convertatur, Conoidis Parabolici Acuti superficiem curvam describens; rectáque A D sic conversa describat circulum: Erit, *Ut Ungulæ Quadrilinei Hyperbolici* C △ O A, *aciem habentis* C A, *momentum respectu aciei suæ* C A; *ad Ungulæ Trianguli* C △ M, *aciem item habentis* C A, *momentum respectu ejusdem* C A: *Sic superficies curva Conoideos parabolici acuti ab* A O *circa* A T *descripti; ad circulum rectâ* A D *ut radio circa* A *ut centrum conversâ descriptum.* Quod etiam in eodem De Ἐυθυνσων tractatu demonstratur. Manente scilicet Magnitudinum ratione o o, d d, in Parabola, ut δ o, δ m, in Hyperbola; distantiæ to, t o, sunt (non ut d o, d o, arithmeticè proportionales, sed) ut quadrata arithmeticè proportionalium: adeóque comparantur (non cum Quadrilinei C △ O A, & Trilinei C △ M, Ungulis seu Momentis respectu C A rectæ, sed) cum Momentis Ungularum C △ O A & C △ M respectu communis aciei C A. Eademque (quæ factorum à conversione) est ratio momenti curvæ A O, ad momentum rectæ A D, respectu A T rectæ. Atque, ex hac momentorum ratione, si eximatur ratio magnitudinum, (vel hujus conversa cum eâ componatur,) habetur ratio distantiæ centri gravitatis Curvæ parabolicæ A O, ad distantiam Centri rectæ A D (quod est ipsius punctum medium,) ab A T eâdem tangente verticis. Adeóque (propter habitam istius Centri distantiam à duabus rectis non parallelis) habetur ipsum curvæ Parabolicæ A O Centrum gravitatis; &, quæ inde dependent.

7. *Figura ex Primanorum Reciprocis conflata, est Spatium Hyperbolicum, Curvæ & Asymptotis interjectum, rectâ Asymptotarum alteri parallelâ terminatum.* Ut A S H h σ fig. 210. Hoc demonstravimus prop. 94, 95. *Arithmet. Infinit.* iterúmque prop. 31. hujus Cap. V.
Fig. 210.

8. *Idémque spatium Hyperbolicum, est Figura Secantium, finibus rectis complementorum (aut arcuum suorum finibus versis) arithmeticè proportionalibus respondentium.* Hoc insinuatum est, § B. prop. 17. hujus Cap. V. iterúmque occurrit § E. pr. 30. (Nam quæ illic occurrunt

rectæ

rectæ $\frac{R^2}{x}$ sunt hæ Secantes.) Estque obvium & demonstratu facile. Cum enim sit, in fig. 327. Ut sinus complementi $CV=x$, ad radium $CB=R$; sic radius $CA=R$, ad secantem $CT=\frac{R^2}{x}$: Sumptis Sinibus complementi $CV=x$ arithmeticè proportionalibus (adeóque & sinibus versis $AV=v$ arithmeticè item proportionalibus;) si ponantur (fig. 325, 326.) rectis C B T secantibus, æquales ordinatim-applicatæ V B O; (quæ itaque erunt totidem $\frac{R^2}{x}$, ipsis x arithmeticè proportionalibus reciprocæ, *Figuram Secantium* complentes;) erit, eadem Figura Secantium, spatium illud Hyperbolicum, (per modo dicta;) utpote Figura ex Primanorum Reciprocis conflata. Fig. 325, 326.

Nempe, ut C A H O M: Ubi hyperbolæ Centrum, C, Asymptotæ C M, & C A, Vertex, H. (Quæ autem de C, A, H, O, M, dicta sunt; pariter intelligantur de $\kappa, \alpha, \eta, o, \mu$.)

Et quidem, si sumatur A H, æqualis semidiametro Circuli C A, (ut fig. 325, 326.) ordinatim ad Asymptotam applicatæ V O sunt ipsis secantibus C T æquales; eritque H Vertex Axis. Si verò brevior sit A H quàm A C, in eâdem ratione breviores erunt V O, quàm C T, respectivæ Secantes ad Radium C A: neque erit H vertex Axis, sed alterius alicujus diametri; Axis autem vertex situs erit propiùs ad Asymptotam, (nempe ubi recta bisecans angulum C, occurrit curvæ.) Sin longior sit A H quàm A C, etiam in eâdem ratione longiores erunt V O quàm C T; (utrobique scilicet æquales Secantibus ad Radium A H, sive longior sit sive brevior quàm A C:) Nec erit H vertex Axis sed alterius diametri, Vertex autem Axis nusquam comparet, quippe qui ibi futurus esset ubi recta angulum C bisecans occurreret curvæ ultra H productæ. Quippe recta Angulum C bisecans, in figurâ *Primariâ*, (ubi A H ipsi A C æqualis,) occurrit rectæ A H, in H: Secùs autem in *Secundariis*: Nempe, In *Contractâ*, (ubi A H brevior quam A C,) ultra H, intra Hyperbolam: In *Protractâ*, (ubi A H longior quàm A C, citra H (inter H & A) extra Hyperbolam.

Si verò Duo Circuli Quadrantes componantur, (ut fig. 325.) semicirculum absolventes; erunt duæ Hyperbolæ H O O, $\eta o o$, situ inverso positæ communem habentes Asymptotam C M, ut & A C α: Sin quadrantes duo inversis verticibus componantur, (ut fig. 326.) Hyperbolæ duæ, H O O, H $o o$, communem verticem H habentes, Asymptotas habebunt oppositas C M, $\kappa \mu$, communem verò C A κ.

Duæ autem Hyperbolæ, H O O, H o o, sic compositæ; utut similes sint, & quidem quamvis (ut in *Primariâ*, fig. 326.) communem habeant Axis Verticem H; non tamen eandem continuant Curvam hyperbolicam; sed Angulum in H faciunt (productæque, se mutuò secabunt,) Rectum quidem in *Primariâ*; Acutum, in *Protractâ*; Obtusum, in *Contractâ*; magisque vel Acutum vel Obtusum, quo magis vel Protracta vel Contracta fuerit: adeò ut, in valde contractis, fere videantur unam facere continuam curvam.

Ponuntur enim (fig. 326.) H O O, H o o, semihyperbolæ, situ distorto; propter dirempta puncta C, κ; (quæ, ut O H o foret una Hyperbola, idem essent punctum, nempe commune centrum semihyperbolarum H O O, H o o;) convergentibus punctis M, μ; adeóque &, O, o. Neque est A H utriusvis vel Axis vel Diametrorum ulla: utpote quæ per C transire debent omnes quæ spectant H O O; & per κ, quæ H o o spectant.

Si verò, in figurâ *Primariâ*, (propter H verticem Axis,) manente communi puncto H, divaricari intelligantur curvæ O o; simúlque Asymptotæ in M, μ, donec in unum coeant K, κ, puncta; evanescet angulus ad H, fiétque o H O una Hyperbola. Sed non item in *Secundariis*, (in quibus H non est vertex Axis:) Possunt quidem, etiam in his, manente H puncto, ita divaricari curvæ in O o, ut, evanescente angulo ad H, coeant in unam curvam, at non in unam *Hyperbolam* (sed duarum portiones.) Manifestum enim est (ex constructione) hyperbolas H O O & H o o omnino similes esse & congruentes: fieri autem non potest in ullo hyperbolæ puncto, præter ipsum Axis Verticem, ut curvæ utrinque adjacentes congruant.

9. Verùm hic cavendum est ne existimetur O H O fig. 326. eadem
Fig. 186. curva cum ω ω ω fig. 186. Quanquam enim A α O ω ω sit etiam figura Secantium, (sed Contracta, propter A O minorem quam A C,) ut § B. prop. 17. insinuatum est: Sunt tamen illæ (non, ut hîc, Secantes sinibus versis, seu complementorum rectis, sed) Sinibus Rectis, arithmetice proportionalibus respondentes. Sunt enim illic rectæ $V\omega = \frac{BR}{s}$ (sinibus rectis $s = VB$, arcuum A B, reciprocæ;) hic verò, $VO = \frac{R^2}{x}$, ipsis $x = VC$ sinibus complementorum B D reciprocæ. Hoc est; Sumptis A V arithmetice proportionalibus; spatium complentes rectæ V O fig. 326. sunt arcuum A B secantibus
Fig. 327. C T fig. 327. proportionales; sed V ω fig. 186. proportionales complementorum B D secantibus C τ.

10. Cúmque

10. Cúmque sint $s = \sqrt{:} R^2 - x^2$. Si sumantur $x =$ CV (adeóque & $v =$ AV) arithmeticè proportionales; erunt omnes s, ut rectarum in parabolâ, axi parallelarum radices quadraticæ, seu in ipsarum ratione subduplicatâ; putà quæ sint in rectarum V β fig. 164. semiparabolam complentium ratione subduplicatâ; (cùm enim rectæ $\beta\delta$ complentes semiparabolæ complementum sint ut x^2, quadrata primanorum; erunt harum continuationes V β, axi parallelæ, ut $R^2 - x^2$; sumpto Axe ut R^2:) quæque ex istiusmodi radicum reciprocis conflatur figura, est ipsa CAOω fig. 186. Omnésque s^2, sunt ut ipsæ rectæ axi Parabolæ parallelæ. Puta, ut ipsæ Vβ fig. 164. (ut pr. 112. *Arithm. Infin.* & § V. pr. 15. hujus Cap. 5. ostenditur:) atque harum reciprocæ, $\frac{R^4}{s^2}$, sunt ut rectarum Vω (fig. 186.) $\frac{BR}{s}$ vel $\frac{R^2}{s}$ quadrata, seu ut earum momenta respectu Aα, aut circuli earundem conversione circa Aα facti. Rectarum verò VO$= \frac{R^2}{x}$ fig. 326. (spatium hyperbolicum complentium) quadrata seu momenta, ut $\frac{R^4}{x^2}$, sunt ut ipsarum $\beta\delta$ (fig. 164.) rectarum reciprocæ. Quæ autem sunt ipsis βb fig. 164. vel Vp fig. 178. ordinatim-applicatis in parabolâ reciprocæ, sunt ut Vω figuram AαOω (fig. 178.) complentes, curvæ Cycloidalis particulis (continuè sumptis) proportionales; spatiique (quod illæ complent rectæ) AαOω portiones, proportionales respectivis Curvæ Cycloidalis partibus quas illæ complent particulæ: ut § B, C. prop. 22. ostensum est. Sed rectæ Vω fig. 186. sunt peripheriæ circularis particulis (continuè sumptis) proportionales; spatiique quod illæ complent rectæ, proportionales respectivis peripheriæ partibus quas illæ complent particulæ: ut § B. prop. 17. ostensum est.

Multáque alia adjungi possent, nisi sic nimius essem.

PROP. II.

De Ciſſoide, addi poſſunt ſupra traditis hæc quæ ſequuntur.

Nempe, in Parte hujus Operis ſecundâ, Cap. XXIX. (ubi de Ciſſoide agitur,) ad finem, (pag. 533. lin. 20.) hæc ſubjungantur.

Fig. 205. Sed & ſic poteſt conſtrui eadem Curva.

Ductâ rectâ $\alpha\beta T$, quæ tangenti TAT occurrat in T.; erit ubique $\beta b = AT$. Eſt enim $\alpha V . V\beta :: VA . Vb :: \alpha A = \alpha V + VA . AT = V\beta + Vb = \beta b$.

Demonſtratio D. Hugenii.

Quòd autem *Spatia Ciſſoidalia* $b\alpha A$, $b\alpha b$, $b\alpha\tau$, *&c. ſint tripla reſpectivorum in Semicirculo* $\alpha B\alpha$, $B\alpha B$, $B\alpha A$, &c. & ſic ubique. Demonſtrationem Clar. *Hugenii* ingenioſam, (quam ab ipſo, poſt impreſſam partem ſecundam, accepi nuper,) libet hic adjungere, ne pereat: cui ſubjungam meam.

Erat autem D. *Hugenii* Demonſtratio ad hunc ſenſum; (verbis nonnihil, ipſo inſinuante, mutatis;) quàm potui proximè ad mentem ſuam deſcripta.

Fig. 328, 329. "Sit ACB, ſemicirculus, (cui Centrum Z, tangens BF) & "AVPE Ciſſoides Dioclis inde genita: Cujus hæc proprietas, ut "ſit ubique AC = EF. Atque eidem Semicirculo (ſeorſum tran- "ſcripto, quò vitetur linearum confuſio,) circumponatur ABS cir- "culi Quadrans (Centro A radio AB deſcriptus;) cui AC pro- "ducta occurrat in K.

"Dico, *Spatium* AVPEFB *æquari Triplo ſegmento* CBT "*unà cum Triangulo* ACB: Hoc eſt, Sectori AKB unà cum Spatio "CTBK. Eſt enim Segm. CBT = Spat. CTBK. Nam (jun- "ctâ CZ) erit Ang. CZB = 2 Ang. CAB. Adeóque Sect. "ZCB = $\frac{1}{2}$ Sect. AKB. Ergo Sect. ZCB = Triang. ACZ + "Spat. CTBK. Auferantur æqualia, hinc Triang. ACZ, inde Tri- "ang. ZCB: Fit, Spat. CTBK = Segm. CBT.

"Oſtendendum ergo, quòd Spat. AVPEFB = Sect. AKB + "Spat. CTBK.

"Præ-

"(Præsumitur autem, tanquam facile demonstratu, per notas "exhaustionum methodos, *Sectori* A K B *Inscribi posse & circum-* "*scribi figuram Dentatam, ita ut altera alteram excedat spatio minore* "*quolibet dato: Et similiter, Spatio Cissoidali* A V P E F B.)

"Si dicatur Cissoidis Spatium A V P E F B, minus esse quàm "Sect. A K B + Spat. C T B K: Sit horum excessus Ω. Et inscri- "batur sectori A K B figura ordinatè, ut duplum omnium Trilineo- "rum K N D sit minùs quàm Ω. Et Cissoidis Spatio A V P E F B, "figura inscribatur ex totidem trapeziis. Ostendetur Trapezium "E F G Q = Triang. A K N + Trapez. C N. Est enim Trapez. "E G ad Triang. A C L, ut F G + E Q ad C L, (quia eandem ha- "bent altitudinem;) Hoc est, ut F A + A E ad A C; Hoc est, ut "A F + F C ad A C; Hoc est, (demissâ perpendiculari C R) ut "A B + B R ad R A. Ergo, componendo, Trapez E G + Triang. "A C L ad Triang. A C L, ut 2 A B ad A R; Hoc est, ut 2 Qua- "drat. A B ad Quadrat. A C; Hoc est, ut 2 Qu. A K ad Qu. A C; "Hoc est, 2 Triang. A K N ad Triang. A C L. Ergo, Trapez. E G "+ Triang. A C L = 2 Triang. A K N. Et, ablato utrinque Tri- "ang. A C L, manet Triang. A K N + Trapez. C N = Trapez. "E G. Et similiter de cæteris. Ergo, figura in Sectore Inscripta + "Omn. Trapez. C N, = Figuræ spatio Cissoidis Inscriptæ. Sed fi- "gura in Sectore assumens omnia K N D, item Trapezia C N assu- "mentia omnia K N D, ista inquam omnia simul sumpta superant "Sectorem A K B + Spat. C T B K. Ergo, figura in Sectore + "trapeziis C N (hoc est, figura in Cissoide,) assumens spatium Ω, "longe superabit Sectorem A K B + spat. C T B K. Sed ipsum Cis- "soidis spatium A V P E F B + Ω æquatur ex hypothesi Sectori "A K B + spat. C T B K. Ergo figura in Cissoide ipso Cissoidis "spatio major erit. Quod est absurdum.

"Dicatur jam Spatium idem A V P E F B, majus Sectore A K B Fig. 330, 331. "+ Spat. C T B K. Sitque excessus Ω. Et circumscribatur Sectori "figura, ut omnia K N D bis sumpta sint minora excessu Ω. Et "Cissoidis spatio, figura ex totidem Trapeziis; (nisi quòd, pro ultimo "Trapezio, habeatur in Cissoide Triangulum A H B = Triang. "A H B in Sectore.) Ostendetur, ut supra, Trapez. P Q F G = "Triang. A D N + Trapez. L D. Ergo, tota figura circumscripta "Cissoidi, æqualis circumscriptæ Sectori + omnibus Trapeziis L D. "Sed ab his si demantur bis omnia Trilinea K D N, residuum minus "erit quàm Sector A K B + spat. C T B K. (Nam primùm aufe- "rendo omnia K D N, à figurâ circumscriptâ Sectori, relinquitur

" Sector A K B: At eadem K D N auferendo à Trapeziis L D, residua " omnia simul minora sunt spatio C T B K: Quin additis rursus spatiis " L I C, omnia simul æquantur demum spatio C T B K.) Ergo, " Si ab his ipsis, à figurâ nimirum circa Sectorem + Trapeziis L D; " Hoc est, à figurâ Spatio Cissoidis circumscriptâ; Auferatur Ω: Re- " liquum multò minus erit Sectore A K B + spat. C T B K. Sed " spatium ipsum Cissoidis dempto Ω æquale dicebatur his ipsis. Ergo " Cissoidis spatium majus erit figurâ sibi circumscriptâ. Quod est ab- " surdum.

" Hoc itaque demonstrato, Quòd Spat. A V P E F B = 3 Segm. " C B T + Triang. A C B: facilè ostendetur, Quòd *Spatium infi-* " *nitum* A V P E Y F B = 3 *Semicirc.* A C B.

" Item, *Quòd Spatium* A V P E B = 3 *Segment.* C B T.

Atque hactenus Demonstratio D. *Hugenii*. Aliam se dicit ad D. *Slusium* olim misisse, (quam non vidi,) sed cui hanc præfert.

Idem aliter.

Huic D. *Hugenii* demonstrationi, libet etiam meam subjungere, (*Hugenianæ* consultò accommodatam,) ad eandem fere formam quâ suprà in Cycloide usus sum; retentis item eisdem Symbolis. Nempe;

Fig. 169, 174, 332. Intelligatur (ut, in Cycloide, §. C, H. prop. 20. & alibi,) Semicirculi Genitoris peripheria A D α, in punctis X, B, D, &c. in partes quotlibet æquales dividi; putà, X B, B D, vel X B D, &c. Quibus respondeant Sectores X α B, B α D, vel X α D, &c. semicirculum complentes: Seu (quod in partibus infinitè exiguis tantundem valet) Triangula figuram Inscriptam complentia, quorum unum sit B α P; vel complentia figuram Circumscriptam, quorum unum sit B α Y; vel denique (quod hìc potissimùm sequemur) complentia figuram partim inscriptam partim circumscriptam, quorum unum sit P α Y.

Quibus respondeant Triangula (situ contrario) ad Circulum, B A P, B A Y, P A V; ad Cissoidem, b A p, b A y, p A y; ad Tangentem, β A π, β A υ, π A υ; & (Triangulorum ad Cissoidem, & ad Tangentem, differentiæ) Trapezia b β π p, b β υ y, p π υ y. Quæ quidem (figuras partim inscriptas partim circumscriptas spectantia) P α Y, P A Y, p A y, π A υ, p π υ y, repræsentent axes sui α B, A B, A b, A β, b β. Quanquam enim, in sectione definitâ, major sit B Y quàm B P, adeóque b y quàm b p, & β υ quàm β π; neque rectæ A X, α D, in eodem Y puncto præcisè coeant; aut rectæ α X, A D, in eodem præcisè puncto P: sectione tamen in infinitum continuatâ, differentiæ illæ evanescunt; adeóque hìc pro nullis habendæ, ipsáque

recta

recta PB = BX arcui, & BY = BD, & PBY = XBD. Ut, ex supra traditis de Cycloide, liquet.

His ita constructis; Ponamus Triangulorum P α Y, PAY, (seu α B, AB,) basin PBY $= B$; Adeóque (propter hujus altitudinem AV $= v$,) erit Triangulum PAY, seu AB, $= \frac{1}{2}vB$. Sed, (propter similia triangula) ut recta AB, ad Ab, & ad Aβ; hoc est, ut AV $= v$, ad A$\Sigma = \alpha$V $= h$, & ad A$\alpha = 2R$; sic est PY $= B$, ad $\frac{hB}{v} =$ py, & ad $\frac{2RB}{v} = \pi\upsilon$. Adeóque (propter altitudinem, illic A$\Sigma = h$, hic A$\alpha = 2R$,) erit Triangulum Apy, seu Ab, $= \frac{h^2B}{2v}$; & A$\pi\upsilon$, seu Aβ, $= \frac{4R^2B}{2v}$; & (horum differentia) Trapezium py$\upsilon\pi$, seu bβ, $= \frac{4R^2 - h^2}{2v}B$; hoc est (propter $h = 2R - v$, adeóque $h^2 = 4R^2 - 4vR + v^2$, & $4R^2 - h^2 = 4vR - v^2$,) $\frac{4R - v}{2}B$. Et sic ubique.

Ut igitur, Omnia AB Triangula, hoc est *Omn.* $\frac{1}{2}vB$, (sumptis arcubus a arithmeticè proportionalibus usque ad a maximum seu arcum AB, quorum communis differentia B,) complentia vel totum Semicirculum ADα, vel illius Segmentum ABA, vel Sectorem BAα; ad Omnia py$\upsilon\pi$, hoc est *Omn.* $\frac{4R-v}{2}B$, complentia vel totum spatium Cissoidale interminatum Qbb A$\alpha\tau$, vel ipsius partem (item interminatam) b$\beta\tau$Q arcum AB spectantem, vel partem reliquam Abb$\beta\alpha$ arcum Bα spectantem, (nam de toto & de partibus perinde valet demonstratio;) vel (propter omnes $\frac{1}{2}B$ invicem æquales) ut *Omn.* v, ad *Omn.* $4R - v$, eò spectantia; sic spatia illa *Circularia*, ad respectiva *Cissoidalia*.

Sunt autem (sumptis, ut dictum est, a arithmeticè proportionalibus) *Omnes* v arcum AB spectantes, (hoc est, AbK fig. 170.) $= eR$ (per § B. prop. 17.) & *Omnes* $4R$, $= 4aR$. Adeoque Segmentum ABA, ad correspondens spatium Cissoidale b$\beta\tau$Q, ut eR ad $4aR - eR$, hoc est, ut e ad $4a - e$, vel (propter $e = a - s$) ut $a - s$ ad ($4a - a + s =$) $3a + s$. Est autem Segmentum ABA, $= \frac{1}{2}eR = \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR$ (per § G. prop. 15.) Ergo, Spatium Cissoidale b$\beta\tau$Q, $= \frac{3}{2}aR + \frac{1}{2}sR$. Et, additis Triangulis, illic αBA, hîc αbβ, (invi-

cem

cem æqualibus, propter æquales baſes A B, b β, & altitudinem eandem,) quorum utrumvis $= sR$; fiet Sector B α A $= \frac{1}{2}aR + \frac{1}{2}sR$, & Spatium Ciſſoidale α b Q τ $= \frac{3}{2}aR + \frac{3}{2}sR$, Sectoris Triplum.

Similiter; *Omnes* v arcum B α ſpectantes, (hoc eſt K b τ T fig. 170.) $= \frac{1}{2}PR - eR = \frac{1}{2}PR - aR + sR = \alpha R + sR$ (per § B. prop. 17.) & *Omnes* $4R, = 4\alpha R$. Adeóque Sector B A α, ad correſpondens Spatium Ciſſoidale A b b β α, ut $\alpha R + sR$ ad $(4\alpha R - \alpha R - sR =)$ $3\alpha R - sR$, hoc eſt, ut $\alpha + s$ ad $3\alpha - s$. Eſt autem Sector B A α $= \frac{1}{2}\alpha R + \frac{1}{2}sR$ (per § H. prop. 15.) Ergo, Spatium Ciſſoidale A b b β α $= \frac{3}{2}\alpha R - \frac{1}{2}sR$. Et, ſublatis æqualibus Triangulis, (illic α B A, hîc α b β,) $= sR$; fiet Segmentum α B α $= \frac{1}{2}\alpha R - \frac{1}{2}sR$, & ſpatium Ciſſoidale α b b A $= \frac{3}{2}\alpha R - \frac{3}{2}sR$, ſegmenti Triplum.

Totum autem, quod A D α ſemicirculum ſpectat, Spatium Ciſſoidale A b b Q τ α, utrovis modo conſequemur, propter evaneſcentia Triangula α B A, α b β; ſeu $sR = 0$.

Eadem non multò aliter conſequemur, ope Triangulorum P α Y. Nam, ut (Omnia Triangula P α Y arcum A B ſpectantia, hoc eſt) *Omnia* $\frac{1}{2}hB$, ad (omnia reſpectiva Trapezia p y υ π, hoc eſt) *Omnia* $\frac{4R - v}{2}B$; ſeu ut *Omn.* h. ad *Omn.* $(4R - v =)$ $2R + h$; ſic Sector (quem illa complent Triangula) B α A, ad Spatium (quod ea complent Trapezia) β b Q τ. Sunt autem *Omn.* h, eo ſpectantia, (hoc eſt, A b β α fig. 170.) $aR + sR$ (per §. B. prop. 17.) adeóque *Omn.* $2R + h$ reſpectiva, $2aR + aR + sR = 3aR + sR$. Ergo, ut $aR + sR$ ad $3aR + sR$; ſeu ut $a + s$ ad $3a + s$; ſic Sector B α A $= \frac{1}{2}aR + \frac{1}{2}sR$ (per § H. prop. 15.) ad Spatium β b Q τ $= \frac{3}{2}aR + \frac{1}{2}sR$. Si huic itaque addatur Triangulum β b α $=$ α B A $= sR$; fiet totum ſpatium α b Q τ $= \frac{3}{2}aR + \frac{3}{2}sR$, Triplum Sectoris B α A.

Item, ut *Omn.* (Triang. P α Y, ſeu) $\frac{1}{2}hB$ arcum B α ſpectantia, ad *Omn.* (Trapez. p y υ π, ſeu) $\frac{4R - v}{2}B$ reſpectiva; ſeu *Omn.* h ad *Omn.* $(4R - v =)$ $2R + h$ eò ſpectantia; ſic Segmentum (quod illa complent) α B α, ad Spatium (quod hæc complent) β b b A α. Sunt autem *Omn.* h arcum B α ſpectantes (hoc eſt, b β τ fig. 170.) $\alpha R - sR$ (per § B. prop. 17.) adeóque *Omn.* $2R + h$ reſpectiva, $3\alpha R - sR$. Ergo, ut $\alpha R - sR$ ad $3\alpha R - sR$; ſeu ut $\alpha - s$ ad $3\alpha - s$; ſic Segmentum α B α $= \frac{1}{2}\alpha R - \frac{1}{2}sR$ (per §. G. prop. 15.) ad Spatium β b b A α $= \frac{3}{2}\alpha R - \frac{1}{2}sR$. Unde ſi auferatur Triangulum β b α $=$ α B A $= sR$; relinquitur Spatium α b b A $= \frac{3}{2}\alpha R - \frac{3}{2}sR$; Triplum Segmenti α B α.

Hinc

Hinc facilis esset ad Momenta, & Centra gravitatis (ubi habentur,) Solidáque conversione facta,& horum item(ubi habentur) Centra Gravitatis, transitus; per methodos suprà sæpiùs adhibitas.

PROP. III.

Inflatâ Vesicâ pondus elevare.

EXperimentum hoc primùm vidi *Oxoniæ* institutum Anno (si rectè memini) 1651. (saltem non anno integro seriùs citiúsve) in Conventu studiosorum qui tunc temporis ibidem convenire solebamus stato die singulis septimanis, ad studia communicanda, instituenda experimenta, & rem philosophicam promovendam. Verùm non tum primùm inventum erat, sed (ut res jam ante cognita) repetitum. Idemque post id tempus in Societate Regiâ *Londini* repetitum fuit. Sic autem instituitur.

Sit B vesica; cujus cervix N pegmati seu fulcro alicui firmo figatur; Fig.333. ita tamen ut per calamum seu fistulam Q inflari possit: fundóque affigatur pondus P. Experimento compertum est, flatu spiritûs humani, inflatâ vesicâ, adeóque lateribus distentis & longitudine contractâ, pondus librarum 50, 60, 70, aut etiam plurium (pro viribus pulmonum flantis) notabiliter elevari posse.

Id autem ne incredibile videatur; considerandum primò erit; vim spiritus humani, præsertim ubi summo nisu intenditur, non ita exiguam esse ut quis primâ vice existimet. Quod manifestum erit si consideremus, ad quantam distantiam, & quàm celeri fortíque motu, globulus argillaceus flando expelli soleat ex Tubo oblongo, quali in occidendis avibus utuntur, etiam ad distantiam non exiguam.

Considerandum porro erit, (quod hic præsertim spectamus,) quàm accommodè ad motum hunc præstandum adhibetur vis illa; quippe non nisi magnâ spiritûs inflantis copiâ in vesicam immissâ pondus ad exiguam altitudinem elevatur.

In hunc finem consideranda erit Vesica Bubula, utut irregularis sit figuræ, ad Sphæroidem tamen proximè accedens, Ellipseos M N O P circa longiorem Axem N P conversione factam; cujus quidem Ellipseos Perimeter si eadem intelligatur vel sibi semper æqualis, Ellipseos Species continuè mutabitur prout vesica plus inflatur; auctâ solidâ capacitate, propter auctum axem breviorem M O, dum longior N P

contrahitur; sphæroide factâ latiore, sed breviore, atque ad sphæram magis accedente. Quod cùm fieri non possit retractâ cervice, ut quæ intelligitur stabili fulcro firmiter alligari, fit elevato Pondere: Cujus elevatio itaque tanta erit quanta est longitudinis N P contractio.

Fig. 334. Hanc autem longitudinis contractionem, adeóque elevationem ponderis, quò aliquatenus æstimemus; sepositâ aliquantisper Ellipsi, substituamus Rhombum M N O P; adeóque, pro Sphæroide, Rhombum Solidum; intellige, Solidum conversione Rhombi circa longiorem axem N P factum; adeóque ex duobus conis similibus & æqualibus compositum, quorum communis basis sit M O circulus, & vertices N, P. Non quod hæc figura propius ad Vesicæ formam accedat; sed quòd ad calculum sit accommodatior, nec ita ab vesicæ formâ recedat quin præsenti negotio satis sit accommoda; non enim propter peculiarem vesicæ formam res ita miranda videtur, sed propter pondus tantum tantillâ vi elevatum.

Rectam N P (Rhombi diagonalem longiorem) appello *Solidi Altitudinem*: quæ quoniam pro variâ positione varia est, *positionem primam* eam suppono quâ, nullâ adhuc inflatione factâ, lineæ NMP, N O P, in rectas extenduntur, adeóque cum N P rectâ coincidunt; quo casu N P recta æqualis erit duobus Rhombi lateribus; puta N O, O P, vel N M, M P. Distantiámque punctorum N, P, in hac positione primâ appello *Primam Altitudinem*.

Calamus seu Fistula Q (per quam fit inflatio) intelligatur Cylindricè excavari, Cavíque diameter ponatur, verbi gratia, $\frac{1}{100}$ (pars Centesima) Primæ Altitudinis.

Vim Flatûs (quo aer in vesicam impellitur) quasi æqualem reputo vi Musculorum pectus comprimentium, adeóque aerem ex pectore in vesicam impellentium. Utut enim Flatus humanus in libero aere imbellis videatur, eò quod quam primum spiritus ex ore in aerem transeat undiquaque expandatur: quum tamen per fistulam impellitur, cujus lateribus cohibetur ne diffluat, vis ejus in Fistulam eadem quasi est quâ ex Pectore detrudebatur. Dico tamen *quasi eadem* potius quam *eadem præcisè*; quoniam non negaverim quin virium aliquid pectus comprimentium impendi potuerit in comprimendo expulso aere, reliquúmque tantum in expellendo.

Vim Flatûs hanc (sive major fuerit sive minor) ponamus æquipollentem pressui ponderis in S (cavi Summo) incumbentis, subjectum aerem in Fistulæ spatiis 1, 2, 3, 4, &c. deprimentis, adeóque impellentis in Vesicam; unde Vesicæ lateribus distentis, capacitas augetur,

pro ratione ingeſti aeris; ſeu pro ratione deſcenſus ponderis S. Nam dum pondus S per ſpatia 1, 2, 3, 4, &c. deſcendit (quæ ſunt in Cylindro altitudinibus proportionalia) tantundem aeris in veſicam intruditur quantum illis ſpatiis continebatur, atque tantundem augetur veſicæ capacitas.

Quoniam verò negandum non eſt, quin aer, propter elaterem quem habet, compreſſionis capax ſit; adeóque veſicæ extenſio minor aliquantò ſit quàm ſpatium quod S deſcendens occupat, (virium parte aliquâ in comprimendo aere impenſâ, reliquâque tantùm in extendendâ veſicâ:) Deſcenſum ponderis S, utut reverâ aliquantò major ſit, tantum jam reputabimus quanta eſt illa Veſicæ extenſio; hoc eſt, quantum oporteret deſcendere propter illam extenſionem ſi aer non eſſet capax compreſſionis. Quod tamen facio potiùs ne ſit objectioni color aliquis, quàm quòd ſit præſenti inſtituto neceſſarium. Nam (præterquam quod Calculo ſummè exquiſito hîc opus non ſit,) quicquid id ſit, non tam Quantitatem ſpectat quàm Celeritatem aſcenſûs ponderis P.

His ita Calculo præſtructis; Altitudinem Primam NP, hoc eſt NM + MP in quolibet Rhombo, ponamus $= n$; adeóque NM $= \frac{1}{2} n$. Item NP pro particulari aliquo Rhombo, $= a$; adeóque NR $= \frac{1}{2} a$. Erit itaque in Rhombo illo MR $= \surd :$ NMq — NRq $: = \surd : \frac{1}{4} n^2 - \frac{1}{4} a^2 : = \frac{1}{2} \surd : n^2 - a^2 :$ Adeóque MO $= \surd : n^2 - a^2 :$ cujus quadratum MOq $= n^2 - a^2$ in NR $= \frac{1}{2} a$ ductum, exhibet $\frac{1}{2} n^2 a - \frac{1}{2} a^3$ æquale Parallelepipedo circumſcripto Cono NMO; hujúſque duplum $n^2 a - a^3$ æquale Parallelepipedo quod toti ſolido Rhombo MNOP circumſcribatur; Cui parallelepipedo ſi intelligatur Cylindrus inſcribi, erit hic Triplus Rhombi ſolidi. Fig. 335.

Intelligantur porro, Cylindri QN ſpatia 1, 2, 3, 4, &c. totidem eſſe Cylindros æque altos & ſuper æquales baſes: Et ponamus Baſis diametrum QT $= u = \frac{[illegible]}{100} n$; atque altitudinem item TV $= n$, quæ in diametri baſis quadratum ducta, exhibet u^3 æqualem Parallelepipedo circumſcripto Cylindro QV.

Eſt autem, ut Parallelepipedum ad Parallelepipedum, ſic inſcriptus Cylindrus ad inſcriptum Cylindrum (propter æquales altitudines & baſes proportionales:) Eſtq; (per priùs poſita) Cylindrus QV æqualis ſolido Rhombo qui fit deſcenſu ponderis S per ſpatium QV; hoc eſt, æqualis trienti Cylindri huic Rhombo circumſcripti: Ideóq; & Parallelepipedum circumſcriptum Cylindro illi, æquale trienti Parallelepipedi Cylindro huic circumſcripti. Sed, per modò oſtenſa, Parallelepipedum circumſcriptum Cylindro QV eſt u^3; & Parallelepipedum circumſcriptum

cumſcriptum reſpectivo Rhombo ſolido MNOP, $n^2a - a^3$; cum itaque illud ſit hujus trienti æquale, erit $u^3 = \frac{1}{3}n^2a - \frac{1}{3}a^3$; adeóque $3u^3 = n^2a - a^3$. Quæ quidem Æquatio reſpondet ſolido Rhombo facto ex deſcenſu ponderis S per primum ſpatiorum 1, 2, 3, &c.

Et, conſequenter; (cùm, propter illa ſpatia æqualia, æqualia etiam ſint Rhomborum ſolidorum reſpectiva incrementa,) $6u^3 = n^2a - a^3$ reſpondebit deſcenſui per ſpatia duo; $9u^3 = n^2a - a^3$ deſcenſui per tria; & ſic de cæteris. Hoc eſt, (poſito $n = 100$ & $u = 1$)

Dum S deſcendit per ſpatia	Æquationes reſpectivæ erunt $n^2a - a^3 =$	Vel, $10000\,a - a^3 =$
1	$3u^3$	3.
2	$6u^3$	6.
3	$9u^3$	9.
4	$12u^3$	12.
5	$15u^3$	15.
6	$18u^3$	18.
7	$21u^3$	21.
8	$24u^3$	24.
&c.	&c.	&c.

Quibus æquationibus reſolutis; propter cognitas quantitates n, u, reperietur quantitas a; hoc eſt, reſpectiva altitudo NP pro quolibet Rhombo: Et conſequenter, quantum ea deficit ab altudine primâ; hoc eſt, quantum aſcenderit interea pondus P ſupra primam ejus poſitionem.

Æquationes illæ, ſic reſolutæ exhibebunt nobis ſubjectam Tabellam; In quâ Columna S numerat ſpatia per quæ deſcendiſſe ſupponitur vis ſeu pondus S. Æ exhibet reſpectivas æquationes his ſpatiis reſpondentes. A, reſpectivas altitudines NP pro illis deſcenſibus. P, harum complementa ad altitudinem primam 100; hoc eſt, menſuram aſcenſuum ponderis P, deſcenſibus illis reſpondentium. D, differentias complementorum continuè conſequentium; hoc eſt; quantum aſcenderit P propter deſcenſum S per ſingula ſpatia 1, 2, 3, &c. reſpectiva. Nempe,

Dum

Dum S descendit per spatia

Æquationes correspondentes sunt, $10000\,a - a^3 =$

Adeóque respectivæ altitudines, $NP = a =$

Quarum complementa ad 100 (altit. primam) seu Elevatio ponderis supra positionem primam,

Complementorum differentiæ, seu elevatio P pro singulis spatiis,

S	Æ	A	P	D
1	3	99.999,849,999,66	00.000,150,000,34	00.000,150,000,34
2	6	99.999,699,998,6	00.000,300,001,4	00.000,150,001,06
3	9	99.999,549,997,0	00.000,450,003,0	00.000,150,001,6
4	12	99.999,399,994,6	00.000,600,005,4	00.000,150,002,4
5	15	99.999,249,991,6	00.000,750,008,4	00.000,150,003,0
6	18	99.999,099,987,9	00.000,900,012,1	00.000,150,003,7
7	21	99.998,949,983,4	00.001,050,016,6	00.000,150,004,5
8	24	99.998,799,978,3	00.001,200,021,7	00.000,150,005,1
9	27	99.998,649,972,6	00.001,350,027,4	00.000,150,005,7
10	30	99.998,499,966,2	00.001,500,033,8	00.000,150,006,4
11	33	96.998,349,959,2	00.001,650,040,8	00.000,150,007,0
12	36	99.998,199,951,	00.001,800,049,	00,000,150,008,
13	39	99.998,049,943,	00.001,950,057,	00.000,150,009,
14	42	99.997,899,933,	00.002,100,067,	00.000,150,010,
15	45	99.997,749,923,	00.002,250,077,	00.000,150,010,
16	48	99.997,599,913,	00.002,400,087,	00.000,150,010,
17	51	99.997,449,902,	00.002,550,098,	00.000,150,011,
18	54	99.997,299,890,	00.002,700,110,	00.000,150,012,
19	57	99.997,149,878,	00.002,850,122,	00.000,150,012,
20	60	99.996,999,865,	00.003,000,135,	00.000,150,013,
49	147	99.992,949,25	00.007,050,75	
50	150	99.992,799,22	00.007,200,78	00.000,150,03
99	297	99.985,146,69	00.014,853,31	
100	300	99.984,996,62	00.015,003,38	00.000,150,07

Dum S descendit per spatia.

Æquationes correspondentes sunt, $10000a - a^3 =$

Adeóque respectivæ altitudines, $NP = a =$

Compl. ad 100. seu Elevat. Pond. supra Alt. primam.

Complementorum differentiæ, seu elevatio P pro singulis spatis,

S	Æ	A	P	D
149	447	99.977,642,503,	00.022,357,497,	
150	450	99.977,492,402,	00.022,507,598,	00.000,150,101,
199	597	99.970,136,624,	00.029,863,376,	
200	600	99.969,986,489,	00.030,013,511,	00.000,150,135,
299	897	99.955,119,789,	00.044,880,211,	
300	900	99.954,969,589,	00.045,030,411,	00.000,150,200,
399	1197	99.940,096,184,	00.059,903,816,	
400	1200	99.939,945,914,	00.060,054,086,	00.000,150,270,
499	1497	99.925,065,795,	00,074,934,205,	
500	1500	99.924,915,455,	00.075,084,545,	00.000,150,340,
999	2997	99.849,811,822,	00.150,188,178,	
1000	3000	99.849,661,143,	00.150,338,857,	00.000,150,679,
4999	14997	99.241,542,959,	00.758,457,041,	
5000	15000	99.241,389,480,	00.758,610,520,	00.000,153,479,
9999	29997	98.464,986,865,	01.535,013,135,	
10000	30000	98.464,829,682,	01.535,170,318,	00,000,157,183,
13595	40785	97.894,734,392,786,6	02.105,265,607,213,4	
13596	40788	97.894,574,393,555,3	02,105,425,606,444,7	00.000,159,999,231,3
13597	40791	97.894,414,393,521,9	02,105,585,606,478,1	00.000,160,000,033,4

Patet ex hac Tabellâ, dum S per Spatium 1 descendit, vix plus assurgere P quàm $\frac{0.000,15}{1.000,00}$ istius altitudinis, (nempe tantillo plus, ut in decimalium fractionum loco inferiùs quarto ne quidem 1 habeatur, quod hîc meritò negligi poterit.) Adeóque, cum Descensus S sit ad Ascensum P, ut 100000 ad 15; si pondus seu vis flatus S sit ad P pondus elevandum saltem ut 15 ad 100000, (hoc est, ut 3 ad 20000,) Vis Ponderi æquipollebit; si major, præpollebit, adeóque elevabit, saltem tantundem quantum Descensui S per spatium 1 respondeat.

Sed & illa proportio tam parum variatur pro spatiis subsequentibus aliquammultis, ut donec S descendisse intelligatur ultra spatia 13596 (hoc est, donec per fistulam ingestum sit in vesicam tantum aeris quantum impleat plusquam 13596 spatia ipsi QV æqualia) non opus erit tantâ vi in S quæ sit $\frac{0.00016}{1.00000}$ ponderis P, seu quæ sit ad P ut 16 ad 100000, hoc est, ut 1 ad 6250. Adeóque, si Vis Flatûs S sit ad pondus P saltem ut 16 ad 100000, seu 1 ad 6250: elevabitur P saltem tantundem quantum Descensui S per spatia 13596 respondebit; hoc est (ut ex Tabellâ liquet) plus quam $\frac{2.1}{100.0}$ altitudinis primæ.

Cùm itaque non incongruum sit ut Vis Flatûs humani accedat saltem ad $\frac{16}{100000}$ seu $\frac{1}{6250}$ Ponderis satis magni; non mirum videri debet, ut Flatu hoc Pondus illud attollatur; & quidem, ultra $\frac{21}{1000}$ altitudinis primæ, vel (paulò rotundiùs) plusquam est $\frac{1}{50}$ (pars quinquagesima) semiperimetri NM + MP, quæ satis est notabilis. Quod ostendendum erat.

Patet hinc etiam, si ponamus vel S augeri vel P diminui, adhuc altiùs elevatum iri P, eâdem vesicâ manente, eodémque fistulæ cavo.

Patet etiam, pro diminuto foramine fistulæ seu diametro ejus QT, diminui etiam proportionem S ad P necessariam ad pondus elevandum: Et quidem, si Mathematicè solummodo res consideretur, ad proportionem quantumvis exiguam, seu ut datum pondus datâ vi sic moveatur; Verùm, si ad praxin Physicam deveniatur, non expectandum est ut res succedat; quoniam Aer per foramen valde exiguum non potest nisi magnâ vi protrudi etiamsi non contrà urgeret pondus P; sed neque ad exiguum istiusmodi foramen potest quis ita se accommodare ut totam flatûs potentiam eò exerat. Est itaque mediocris quædam

foraminis

foraminis magnitudo necessaria ad praxin hanc efficaciùs exercendam; quæ, cùm ex physicis circumstantiis dependeat, experimento potiùs quàm demonstratione determinabitur. Sin Mathematicè tantùm rem spectemus, (seclusis hujusmodi circumstantiis;) auctio vel diminutio diametri foraminis, contrariâ vice minuit augétque vim flatûs, in duplicatâ ratione istius auctionis vel diminutionis diametri. Quod ex præmissis facilè probaretur, si res tanti esset.

Facile item ostensu est, Ad quantam altitudinem (pro dato foramine) data vis flatûs datum pondus elevare posset: Et, vice versâ, quanta vis (pro dato foramine) requiratur ut datum pondus ad datam altitudinem (possibilem) elevetur: Sed &, datis altitudine (possibili,) vi flatûs, & pondere, quantillum foramen esse debeat.

Dico, *altitudinem Possibilem*: quoniam non ad quantamvis altitudinem hæc fiet; sed saltem ubi, ad maximam vasis capacitatem perventum est (ut alias omittam circumstantias Physicas) non ultrà flando extendetur. Ea autem est (datâ perimetro MNOP) in Rhombo solido (quo hactenus usi sumus) quando quadratum lateris N M, æquat tria quadrata semialtitudinis N R, (hoc est N M q = 3 N R q, vel $\frac{1}{4}n^2 = \frac{3}{4}a^2$:) in Sphæroide verò (cui propiùs accedit vesica) ubi ex Sphæroide fit Sphæra, factâ peripheriâ transversâ M O æquali perimetro expositæ M N O P.

Verum quoniam hæc à præsente proposito aliena sunt, demonstrationes horum omitto; quas tamen fusiùs olim, in scripto in Societate Regiâ *Londini* exhibito, Martii die 4. 1662. exposui.

Sed redibimus tandem à Rhombo solido ad Sphæroidem. Quanquam Sphæroides sit figura minùs ad calculum accommodata: Cùm tamen constet, Ellipsin Rhombo (si ritè comparentur) capaciorem esse; adeóque & Sphæroidem Rhombo solido; non dubitandum est quin, quod de Rhombo solido ostendimus, de Sphæroide abundantiùs constet. Cùm enim, positis utriusque figuræ perimetris MNOP æqualibus, major sit Sphæroidis Sphæræque capacitas quàm Rhombi in respectivis positionibus; adeóque, quo extendantur, plus Aeris illic quàm hic ingerendum, quod majori descensui S æquipollet; contrà verò major sit hic quàm illic altitudinis contractio, adeóque ascensus P; (quæ ex figurarum naturâ satis constant:) Erit, propter majorem descensûs ad ascensum rationem in Sphæroide (adeóque in Vesicâ) quàm in Rhombo rationem, facilior quidem (utut tardior & ad minorem altitudinem) Ponderis per Vesicam quàm per Rhombum elevatio. Adeóque abundantiùs constat propositum. Siquis verò existimet, in inflatâ Vesicâ, non modò ambitum transversum M O, sed & erectum

MNOP,

MNOP, augeri: Utut ego contrarium potiùs putem, contrahíque non tantum altitudinem NP sed & ambitum MNOP ob distentum ambitum NO; illud tamen si concedatur, non officit jam positis, sed prodest potiùs: nam & sic augebitur Vesicæ capacitas, ascensus P minuetur, adeóque facilitabitur, propter minorem altitudinis NP contractionem, dummodo tamen contractio fiat. Unde fortiùs adhuc confirmatur propositum; ne mirum sit, (quod experimento comperimus,) inflatâ Vesicâ sat grave Pondus elevari.

PROP. IV.

Solvuntur aliquot aliæ Quæstiones Mechanicæ:

Multa alia sunt ad rem Staticam & doctrinam de Motu spectantia, quæ vel Capitibus superioribus interseri possent, vel pluribus adhuc capitibus materiam suppeditare, nisi quod operis moles jam nimium excreverit. Sed ea ex suprà traditis pleraque non difficulter elici possunt ad rem præsentem ritè accommodatis. Nonnulla tamen hic strictim attingam; quæ utut res ludicræ non nemini forsan videri possint, seriam tamen in staticis causam habent.

Verbi gratiâ. Si quæratur, Cur, *qui ad erectum murum stat erectus, dorso & utrisq; calcibus murum attingens, non potest, nisi promoto pedum altero, nummum humi jacentem prorsum incurvatus tollere, quin præcipitabitur:* Ratio petenda à situ Centri gravitatis. Quippe, cùm fulcrum corporis sit in pedibus, qui cadere non volet hoc curare debet ut totius Corporis Centrum gravitatis pedibus emineat, saltem non extra eorum extrema hac vel illac ulteriùs deflectat quam ut musculorum & tendinum vires sic positum sustinere valeant & revocare. Hinc, qui erectus stat, stat firmus, utpote qui totam corporis molem habet pedibus supereminentem. Qui verò quid humo tollere velit, dum demissum Caput protendit antrorsum, Nates retrorsum tendit, quò fiat æquilibrium, centrúmque totius pedibus seu fulcro superemineat, saltem extra pedum ambitum vel non omnino vel tantillum deflectat. Qui autem propter murum à tergo hoc non possit, dum (quò quid humo tollat) protendit Caput non retractis Natibus, præcipitatur, (propter totius Centrum positum extra fulcrum seu fulcrorum extremum ambitum, & quidem magis quàm ut valeant tendines id oneris ferre iterúmque sublevare;) saltem, nisi vertebrarum tendines, musculíque eò spectantes, admodum robusti fuerint.

Hinc item est, quòd *Alii fortiùs, alii molliùs terram ambulando feriant*, adeóque *sonitum majorem minorémque sonoro pavimento incedentes edant.* Nempe, duo sunt incedendi modi, utut pauci id animadvertant. Quippe, Alii, dum pedem promovendum attollunt, corporis centrum gravitatis à reliqui pedis perpendiculo non priùs amovent quàm pes promotus terram iterum attingat: (Atque hoc *Chorodidascali* seu *Saltatoriæ artis Magistri*, si rem suam intelligant, inprimis curare debent discipulis insinuandum, quò saltem uni pedi insistens corpus agile in omnem partem prout opus erit convertere paratus sit:) Alii vero festinantiores, dum pedem promovent, promovent simul & Centrum gravitatis; quod itaque, relicto priore fulcro, procidere statim incipit, donec pes promotus terram iterum attingens casurum sustineat; (apud quos itaque Incessus est quasi Casus & Sustentatio se mutuò continuè excipientes:) Hi itaque, propter procidentem corporis molem pondúsque, fortiùs terram feriunt & cum majori sonitu, quàm qui (sustento à pede altero totius Centro gravitatis & onere) pedem promotum molliùs demittunt; & quò præcipitantiùs Centrum gravitatis sic promovent, eò fortiùs solum feriunt.

Hinc item reddenda est ratio cur *Alii aliis sæpius titubent, & titubatu cadant:* Nempe, postquam relicto priori fulcro Centrum promovetur, promoto pedi mox statuminando confidens, si pes promotus vacillet aut infidæ terræ se committat aut expectato fulcro destituatur, decidit corpus, saltem casui proximum est; pariterque si inexspectatò pes impingat, ut non possit sat citò eatenus promoveri ut valeat cadenti corpori maturè ferre suppetias. Qui verò perstantis pedis fulcrum non priùs deserunt quàm pes promotus iterum firmetur, minùs sunt his periculis obnoxii: Adeóque, qui incedunt erecti, minus quàm qui prono Capite.

Hinc porro est (quod Funambulos maximè spectat) quòd *Qui Dextrorsum casuri sint, protendant brachium Sinistrum; qui Sinistrorsum, Dextrum; qui Retrorsum, alterum vel utrumque Porrigant; qui Prorsum, Retrahant.* Nam qui Dextrorsum casurus (ob corporis centrum dextrorsum propendens) Sinistram protendit, sinistræ gravitationem auget (utpote remotiùs à fulcri perpendiculo positæ) adeóque commune totius Centrum gravitatis sinistrorsum retrahit, quò vel non omnino vel minùs ad dextram propendeat, & casum moliatur. Et in cæteris similiter.

Atque ad idem intenti sunt *Athletæ colluctantes.* Quippe qui, Antagonistæ corporis variè torquendo, Centrum gravitatis extra fulcrorum ambitum longiùs dimoverit, facilè illum subvertet.

Huc

Huc item referendum erit, quòd, *Qui promissis brachiis incedunt, dum pedem dextrum promovent, promovent sinistrum brachium; dum sinistrum pedem, brachium dextrum.* Quippe hac alternatione totius Centrum melius retinetur in perpendiculo duobus pedibus ceu fulcris intermedio; nequa propendeat, totique casum minitetur.

Item (quæ inter *Aristotelis* Quæstiones Mechanicas occurrit) Cur, *Qui sedet, non potest se in rectum erigere, nisi vel protenso Capite, vel Pedibus retractis.* Nempe, qui sedet, (puta, in situ C N G P, factis in N & G angulis rectis,) longè majorem corporis partem habet à G versus N positam (nempe totam partem C N G, à Capite ad genua;) adeóque Centrum gravitatis (ejusve perpendiculum) procul à G versus N. Cùm itaque stanti futurum sit Fulcrum in Pedibus P, adeóque (manentibus ut priùs cruribus G P in situ perpendiculari) revocandum sit totius C N G Centrum ad perpendiculum G P, ut ipsi G supereminea; vix aut ne vix illud fiet nisi supra modum robustos supponamus musculos tendinésque eò spectantes. Erigendus enim est, rotationis Centro G, vectis G N (& ipse gravis,) onere N C in extremo onustus. Si verò retrahantur pedes à P ad π, quò Fulcrum Centro gravitatis subjiciatur; vel protendatur caput à C ad κ, quò Centrum gravitatis propiùs ad P fulcrum Centrúmque motûs G feratur, aut etiam ipsis immineat; vel partim hoc, partim illud: magno onere liberantur musculi tendinésque. Fig. 336.

Hinc item respondendum quæstioni, (quæ quamvis ridiculè proponi soleat, seriam tamen meretur responsionem,) Cur *Anser horrei ostium intrans utcunque altum*, (quod plaustrum demesso tritico onustum admittere possit,) *Caput demittat.* Cui ridiculè respondere solent (acutè forsan, ut ipsi cogitant,) Quoniam Anser est, (hoc est, animal simplex & imprudens;) id factum reputantes, quasi metuerit anser ne caput superliminari (in tantâ distantiâ remoto) impingeret. Sed (nisi illud quandoque fiat, quòd anser etiam ab ipso statim horrei introitu grana quærat quibus pascatur;) vera causa est, quòd ad horrei ostium (sicut ad ostia minora) poni soleat Limen (seu quod liminis instar sit) ab ansere superandum quo horreum ingrediatur: Quod ut fiat, pedum antecedente limini superimposito, circa quod itaque ut fulcrum seu motûs Centrum rotandum erit corporis totius Centrum gravitatis, rotationem illam facilitat porrecto capite ultra limen, adeóque auctâ ipsius gravitatione, Centrum totius propiùs ad fulcrum admovet. (Sin dicatur, non semper esse ad ostium horrei quod Liminis instar sit, sive Ascensus; dicendum, nec Anserem semper introeuntem caput demittere.)

Quódque Anser ipsis ridiculus, idem faciunt ipsi, atque ob eandem causam; Nempe, *Dum scalam, gradus, montémve ascendunt, caput protendunt.* Causa est, quòd, hoc facto, facilior fiat circa pedem anteriorem, gradui scandendo impositum, rotatio, (quæ omnino facienda erit ut fiat ascensus,) ob porrectum capitis pondus ultra fulcrum. Saltem, si hoc nondum faciant, ab Ansere discant.

Item, Cur *Bajuli, si onus Humeris seu Tergo gestant, se antrorsum incurvant; si Ulnis, retrorsum:* & *Ancilla, si aquæ situlam promisso brachio sinistro ferat, dextrorsum se incurvat, (extento etiam brachio dextro;) si dextro, sinistrorsum; si utroque, recta incedit; similitérque si capiti impositam ferat.* Nempe his modis omnibus efficitur, ut Corporis Onerísque commune Centrum gravitatis communi fulcro superemineat, saltem extra fulcrorum ambitum minùs recedat.

Vidíque ipse non neminem, *Qui cum pondus, manibus latum, antrorsum projecit, cecidit ipse retrorsum.* Nempe; Quò Corporis Ponderísque commune Centrum gravitatis fulcro immineret, Corporis sui Centrum gravitatis nonnihil retro motum erat; quod itaque ipsum post separatum quod manibus gestaverat pondus, ita retraxit, ut antequam se in debitum situm restituere posset, retro ceciderit.

Aliáque multa, quæ à mutato totius Centro gravitatis ob mutatum situm dependent, (quorum exempla innumera, ne longè abeamus, animalium incessus alíique motus suppeditabunt,) solutionem ex eodem fonte sortientur.

Et quidem, de motibus purè Staticis (quæ à solâ Gravitate dependent) vel efficiendis vel non efficiendis, judicium fiet ex illo generali principio (à Torricellio alíisque passim adhibito;) *Si, effecto motu proposito, Gravis movendi Centrum gravitatis, vel Aggregati ex pluribus conjunctis Commune Centrum, descensurum sit; Motus consequetur: sin minùs; non consequetur.* Quod nos Universaliùs efferimus, (quò ad alios etiam motus res extendatur,) *Si Processûs Secundum directionem moventis, (vel aggregati processuum plurium,) Magnitudo (ex Virium gradu, & Altitudine processûs, æstimanda,) præpolleat Magnitudini (similiter æstimandæ) Regressûs (regressuúmve aggregati) Contra moventis directionem; Motus efficietur: Sin minùs; non efficietur.* Ut ex prop. 2, 5 6. Cap. 2. liquet. In motibus autem facilitandis, seu minori Vi perficiendis, *Pro diminutis Viribus effectricibus, in eâdem ratione diminuitur Celeritas;* (adeóque Virium defectus Temporis dispendio redimendum:) per prop. 27, 28. Cap. 1.

Atque hæc Principia, ad Quæſtiones Mechanicas innumeras ſive apud *Ariſtotelem* ſive alios occurrentes, ſive in communi vitâ humanâ paſſim obvias, ſolvendas; facile eſſet accommodare. Sed, creſcente volumine, alicubi tandem ſiſtendum erit, ne nimii ſimus; totíque operi finis imponendus.

FINIS.

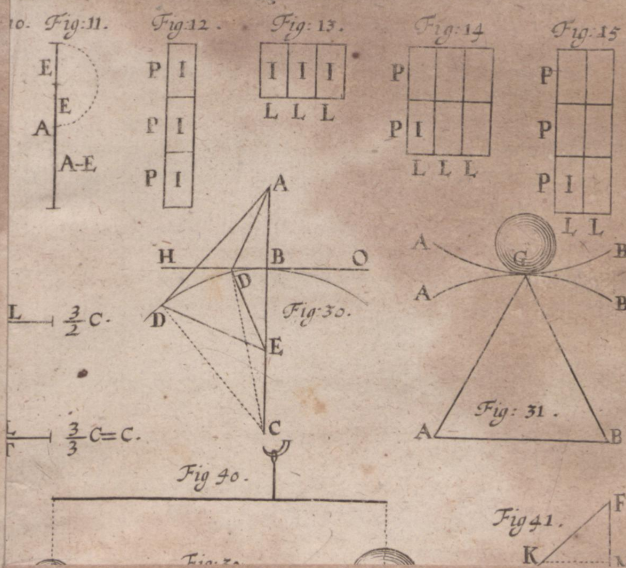
EMENDANDA.

IN Parte Secundâ (poſt priùs notata) *p.* 258. *l.* 26. atque à $\tau\alpha$. *p.* 263. *l.* 22. $\frac{1}{2}aR^2$. *p.* 271. *l.* 2. *(bis)* $5eR^2P+3svRP$. *p.* 275. *l.* 13. quo. *p.* 297. *l. pen.* eſtque. *p.* 286. *l.* 11. Atque hinc. *l.* 19. rentur. *p.* 287. *l.* 2. Semiperipheriæ. *l.* 5. (ex una parte) $\xi o, \zeta \upsilon, \delta \kappa$. *l.* 6. $\alpha\kappa\tau$. *l.* 16. occurrunt rectæ z V. *l.* 18. A D, A E. *l.* 25. x$\xi\zeta$z. *l* 37. rectis X O. *l. ult.* X I α. *p.* 288. *l.* 18. propterea. *l.* 21. ſuo X O. *l.* 25. trianguli. *p.* 290. *l.* 20. quam b k C A. *p.* 291. *l.* 13. ſinum. *p.* 294. *l* 10. $+\frac{1}{2}as^2=$. *l.* 27. *(infra) pro R*, lege 2 *R*. *p.* 296. *l. ult.* dicatur S. *p.* 308. *l.* 2. $-\frac{1}{2}v^3R$; Reſpectu A α, av^2R-evR^2; re- *p.* 311. *l.* 18. reſpectivas rectas. *p.* 315. *l. ult.* *Omn.* $\frac{1}{4}sR^2$. *p.* 319. *l.* 4. $\beta\alpha=a$. *l.* 20. $3R^2P-6eR^2$. *p.* 329. *l.* 1. & 5 hujus. *p.* 335. *l.* 5. $5\alpha sR+\alpha sh$. *p.* 344. *l.* 20. ut YP. *p.* 345. *l.* 33. magnitudinem. *p.* 348. *l.* 13. $\frac{2}{3}avR^2-\frac{1}{3}as^2R$. *l.* 20. $h=2R-v$. *p.* 352. *l.* 1. *Omnes s.* *p.* 354. *l.* 16. α, ſeu $\tau\beta=\alpha$. *l.* 18. *Omn.* $-\frac{3}{4}sR^2$. *p.* 355. *l.* 16. *dele* momentum. *l.* 27. A b $\beta\alpha$. *l.* 30. B b $\beta\alpha$. *p.* 359 *l.* 29 relinquuntur. *p.* 361. *l.* 21. ſic expeditis. *p.* 363. *l.* 4. ſuper ipſa *l.* 10. *marg.* O. *p.* 364. *l.* 8. Ungulæ $\alpha\delta\kappa$. *l.* 13. $v=2R$. *p.* 367 *l.* 18. *marg.* H. *p.* 369. *l.* 9. $-\frac{1}{3}s^3$; Diſtantia Centri gravitatis à T A, $\frac{1}{2}R-\frac{s^3}{3eR+3sv}$; à $\tau\alpha$, $\frac{3}{2}R+\frac{s^3}{3eR+3sv}$; à BV, $v-\frac{1}{2}R+\frac{s^3}{3eR+3sv}$: Momentum reſpectu A α, $\frac{2}{3}vR^2+\frac{1}{4}a^2R$. *l.* 11. $8vR^2+3a^2R$. *p* 370. *l.* 11. comprehenſam. *p.* 374. *l. ult.* $-\frac{3}{2}fR$. *p.* 375. *l.* 4. *marg.* 168, 173, 174. *p.* 176. *l* 3. quod æquale. *p.* 380. *l.* 12. Trapeziorum illorum. *p.* 385. *l. ult* $\frac{1}{4}a^2R$. *p.* 386. *l.* 3. $8vR^2+3a^2R$. *p.* 392. *l.* 10. $-\frac{19}{72}s^2R^2$. *p.* 396. *l. à fine* 6. Baſeſque. *p.* 399. *l.* 8. $\frac{35}{24}fR^3$. *p.* 404. *l.* 26. $\frac{1}{3}as^2v+\frac{1}{4}s^3v$. *p.* 405. *l.* 17. lis. *p.* 406. *l.* 28, 31. eorundem. *p.* 422. *l.* 25. eiſdem rectis. *p.* 432. *l.* 3. inventam. *p.* 436. *l.* 30. plam. *p.* 437. *l.* 27. diſtantiæ ſint. *p.* 438. *l.* 28. exhibitæ. *p.* 449. *l.* 26. $=\xi\delta$ fig. 170. *p.* 454. *l.* 5. prop. 6. hujus)

hujus) *p.* 458. *l.* 12. ipsæ b C. *p.* 466. *l.* 18. si dentur. *p.* 483. *l.* 32. ad C B. *p.* 486. *l.* 6. 7966955. *p.* 487. *l.* 10 *à fine.* =0.0127154. *p.* 504. *l.* 2. infini- *l.* 12. discriminis. *p.* 516. *l.* 13. Spiralem. *p.* 520. *l.* 24. enim M B. *p.* 521. *l.* 5. similiter. *l.* 6. *dele* quæ. *p.* 522. *l.* 11. prius feceram. *p.* 523. *l.* 10. componuntur ex. *p.* 529. *l.* 20. $\sqrt{:\frac{1}{2}aP + \frac{1}{2}a^2}$: *p.* 534. *l* 2. applicatur. *p.* 535. *l.* 1. *marg.* Fig. 206. *p.* 537. *l.* 27. sinibus versis A V. *p.* 539. *l.* 33. semi-quadrantalem. *p.* 540. *l.* 9. semi-quadrantalem. *p.* 545. *marg.* *l.* 15. M. *l.* 18. N. *p.* 551. *l.* 31. X S & S A *p.* 552. *l.* 7. A O V, H D X. *l.* 8. A C I, H d x. *p.* 556. *l.* 24. Genitricis, aut hyperbolam hanc ubivis tangat. *p.* 558. *l.* 9. transiturum. *p.* 560. *l.* 28. $\frac{h^2L+n^2T}{h^2-n^2}$. *p.* 561. *l.* 5. $\frac{h^2L+n^2T}{n^2-h^2}$. *p.* 564. *l.* 7. m vel M. *p.* 565. *l.* 11. non attingat, Axis conjugatus: sin curvam tangat, perinde est ad utrumvis casum referas; quippe tum Hyperbolæ degenerant in opposita Triangula, quorum communis vertex est O punctum contactus, evanescente latere recto. *l.* 23. $\frac{n^2-h^2}{L}T$. *l.* 24. axis est.

In Parte Tertia. *p.* 574. *l.* 23. quæ componitur ex. *p.* 575. *l.* 22. premat. *p.* 577. *l.* 2. nitendo. *p.* 579. *l.* 1. distantias. *l.* 6. major sit. *p.* 580. *l. pen.* pre- *p.* 581. *l.* 22. rationemque. *p.* 585. *l.* 31. labatur. *p.* 586. *l* 28. fulcri C. *p.* 599. *l.* 15. semi-onus. *l.* 18. *dele* plusquam. *l.* 19. Tignorum fere *Quatuordecim:* Nempe $\frac{1}{2}+$. *l.* 20. $=13\frac{1183647}{1360668}$. *p.* 603. *l.* 4. semi-tigno. *l.* 6. $+\frac{1}{2}$. *l.* 7. $18\frac{-27}{238}=18\frac{81}{34}$. *l.* 13. Quatuordecuplum. *p.* 611. *l. pen.* par erit. *p.* 612. *l.* 35. amoliendum. *p.* 619. *l.* 37. Asperitas. *p.* 621. *l.* 23. angulus C O P. *p.* 622. *l.* 28. Rotam. *p.* 626. *l.* 11. absimilis. *p.* 628. *l.* 23. Declivitas. *p.* 632. *l.* 13. motuum. *p.* 635. *l. antepen.* cujusque. *p.* 637. *l* 4. ἑλίσσω. *p.* 650. *l.* 5. βCβ. *p.* 659. *l.* 1. Scholium. *p.* 661. *l.* 26. habent. *p.* 681. *l.* 10. abstrusioribus. *p.* 685. *l.* 11. accommodari. *l. ult.* ad hanc. *p.* 697. *l. antepen.* *mrPC* =. *p* 699. *l.* 31. quæ mis- *p.* 700. *l.* 5. fuerint. *l.* 14. Phænomenûm. *l.* 22. *marg.* Fig. 301. *p.* 721. *l.* 16. sed quod. *p.* 724. *l.* 5. vi altiùs. *p.* 737. *l.* 12. ni factum. *p.* 738. *l.* 34. aliquandiu. *p.* 742. *l.* 1. depressum. *p.* 756. *l.* 30. B A Y, P A Y. *p.* 760. *l.* 33. est ei.

Emendandorum numerum facilè excusaret difficultas operis, etiamsi plura essent. Sed eorum plurima sunt non nisi menda unius literæ, quæ in alio opere negligi possent, & solent: hîc autem magni sæpe sunt momenti, adeóque in Lectorum gratiam studiosiùs collecta, numerum augere videantur.


Fig:11.
Fig:12.
Fig:13.
Fig:14
Fig:15
Fig:30.
Fig: 31.
Fig 40.
Fig 41.

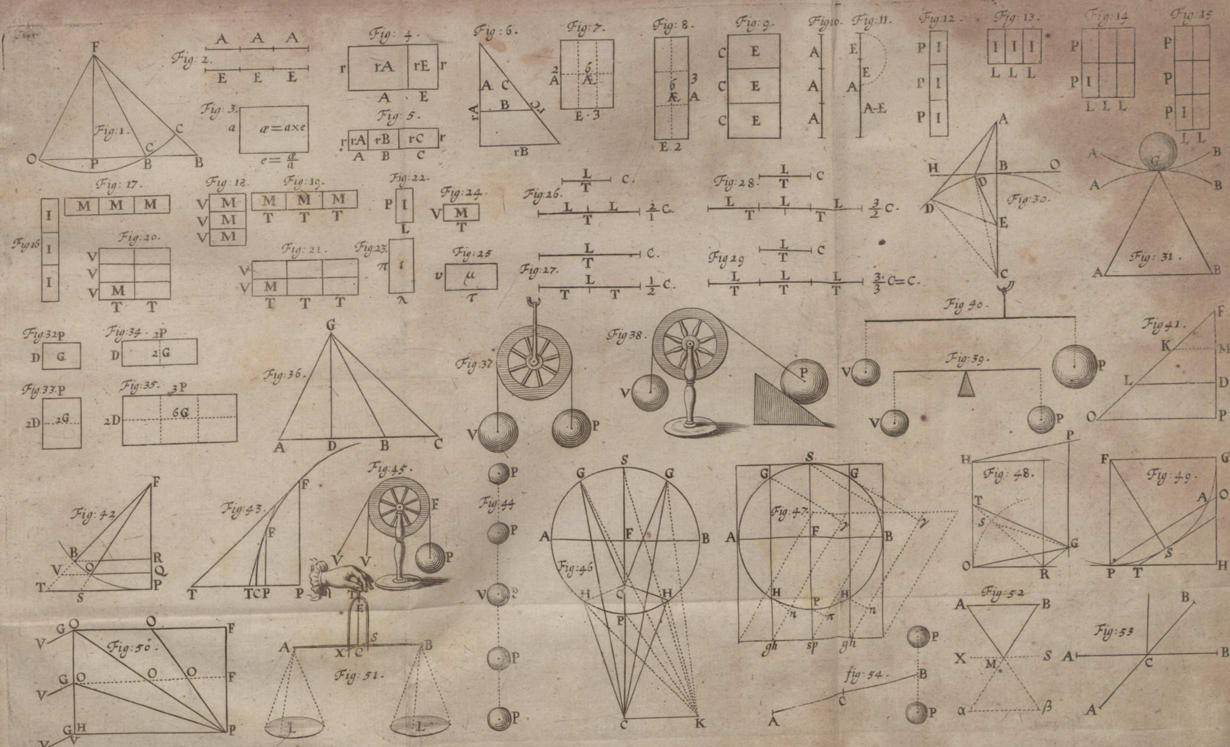


Fig: 1.
Fig: 2.
Fig: 3.
Fig: 4.
Fig: 5.
Fig: 6.
Fig: 7.
Fig: 8.
Fig: 9.
Fig: 10.
Fig: 11.
Fig: 12.
Fig: 13.
Fig: 14
Fig: 15
Fig 16
Fig: 17.
Fig: 18.
Fig: 19.
Fig: 20.
Fig: 21.
Fig: 22.
Fig: 23.
Fig: 24.
Fig: 25
Fig: 26.
Fig: 27.
Fig: 28.
Fig: 29
Fig: 30.
Fig: 31.
Fig: 32
Fig: 33.
Fig: 34.
Fig: 35.
Fig: 36.
Fig: 37
Fig 38
Fig: 39.
Fig 40.
Fig 41.
Fig: 42
Fig: 43
Fig: 44
Fig: 45.
Fig: 46
Fig: 47.
Fig: 48.
Fig: 49.
Fig: 50.
Fig: 51.
Fig: 52
Fig: 53
fig: 54.

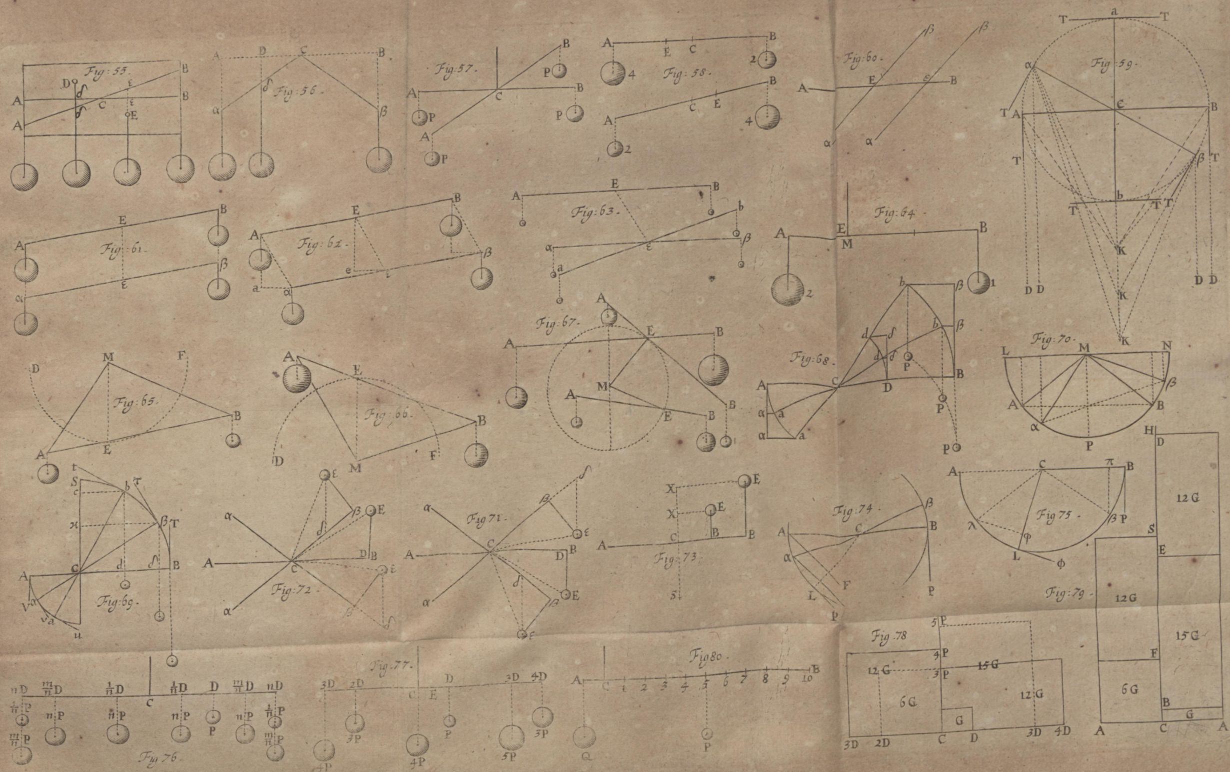
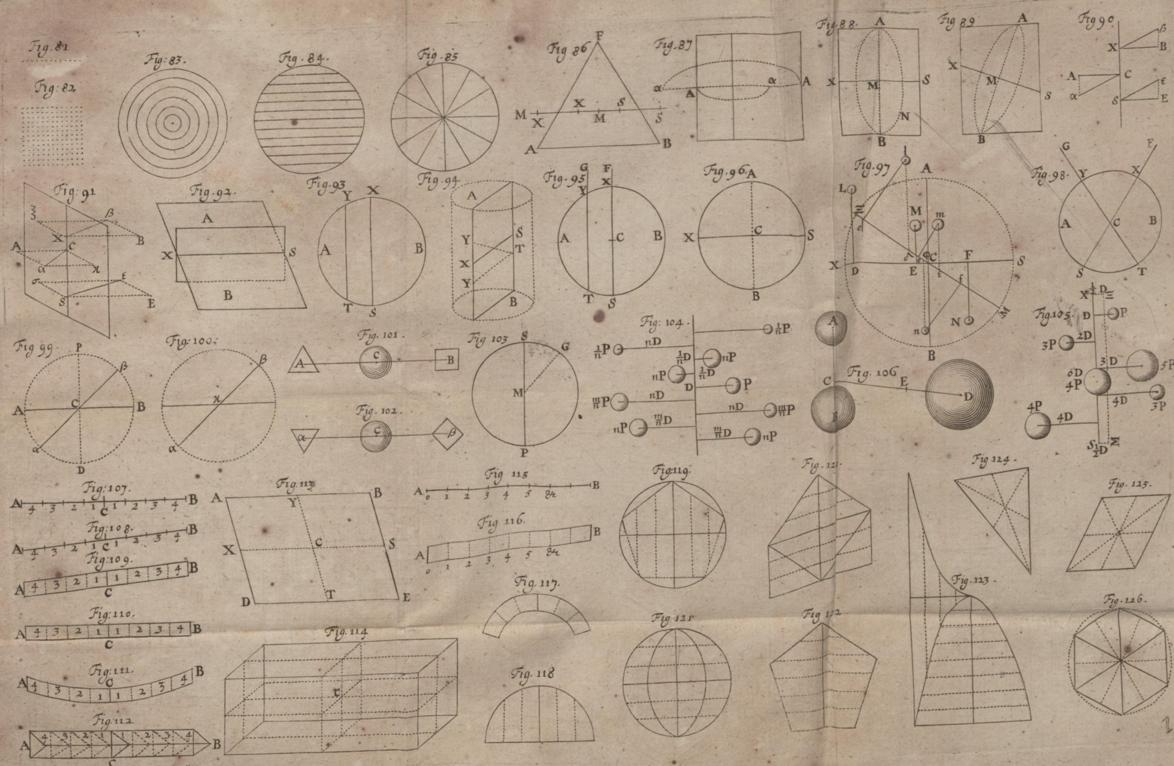
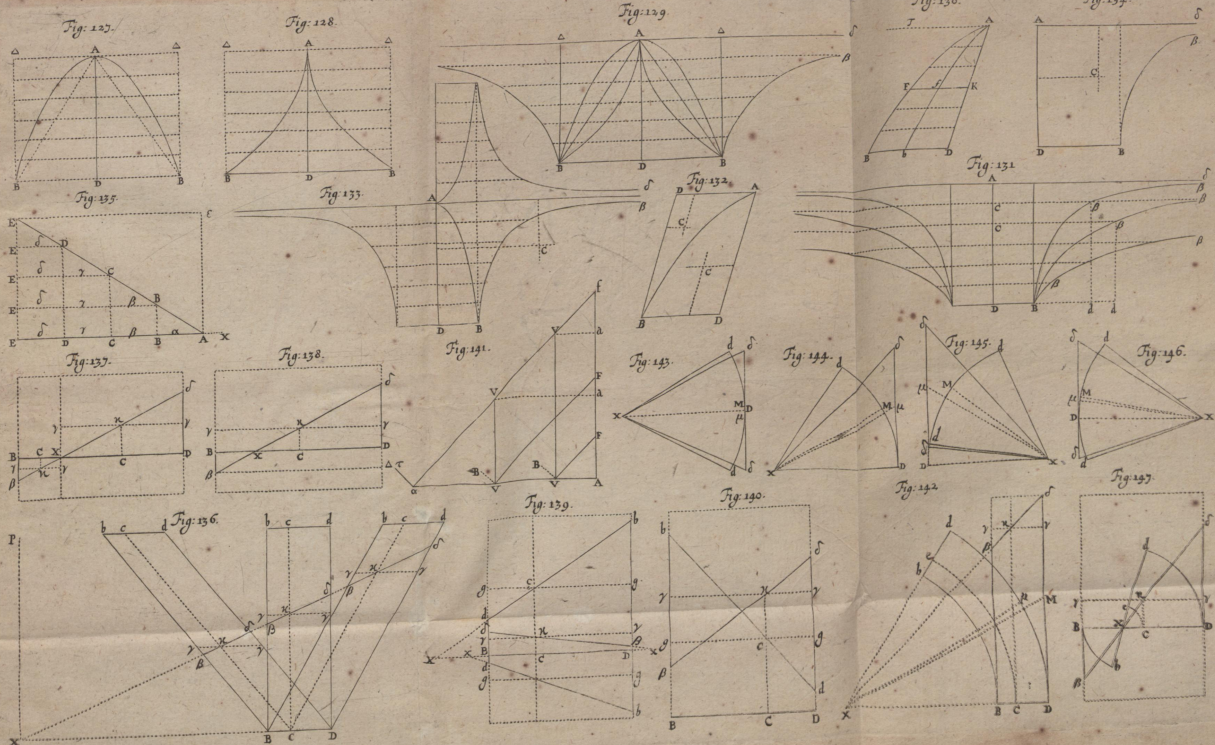


Fig: 55.
Fig: 56.
Fig: 57.
Fig: 58.
Fig: 60.
Fig: 59.
Fig: 61.
Fig: 62.
Fig: 63.
Fig: 64.
Fig: 65.
Fig: 66.
Fig: 67.
Fig: 68.
Fig: 70.
Fig: 69.
Fig: 72.
Fig: 71.
Fig: 73.
Fig: 74.
Fig: 75.
Fig: 79.
Fig: 78.
Fig: 76.
Fig: 77.
Fig. 80.
12 G
15 G
6 G


Fig. 81
Fig. 82
Fig. 83.
Fig. 84.
Fig. 85
Fig 86
Fig. 87
Fig. 88.
Fig. 89
Fig. 90
Fig. 91
Fig. 92.
Fig. 93
Fig. 94
Fig. 95
Fig. 96
Fig. 97
Fig. 98.
Fig. 99
Fig. 100.
Fig. 101
Fig. 102
Fig. 103
Fig. 104
Fig. 105
Fig. 106
Fig. 107.
Fig. 108.
Fig. 109.
Fig. 110.
Fig. 111.
Fig. 112
Fig. 113
Fig. 114
Fig. 115
Fig. 116.
Fig. 117.
Fig. 118
Fig. 119
Fig. 121
Fig. 123
Fig. 124
Fig. 125
Fig. 126


Fig: 127.
Fig: 128.
Fig: 129.
Fig: 130.
Fig: 134.
Fig: 135.
Fig: 133.
Fig: 132.
Fig: 131.
Fig: 137.
Fig: 138.
Fig: 141.
Fig: 143.
Fig: 144.
Fig: 145.
Fig: 146.
Fig: 136.
Fig: 139.
Fig: 140.
Fig: 142.
Fig: 147.

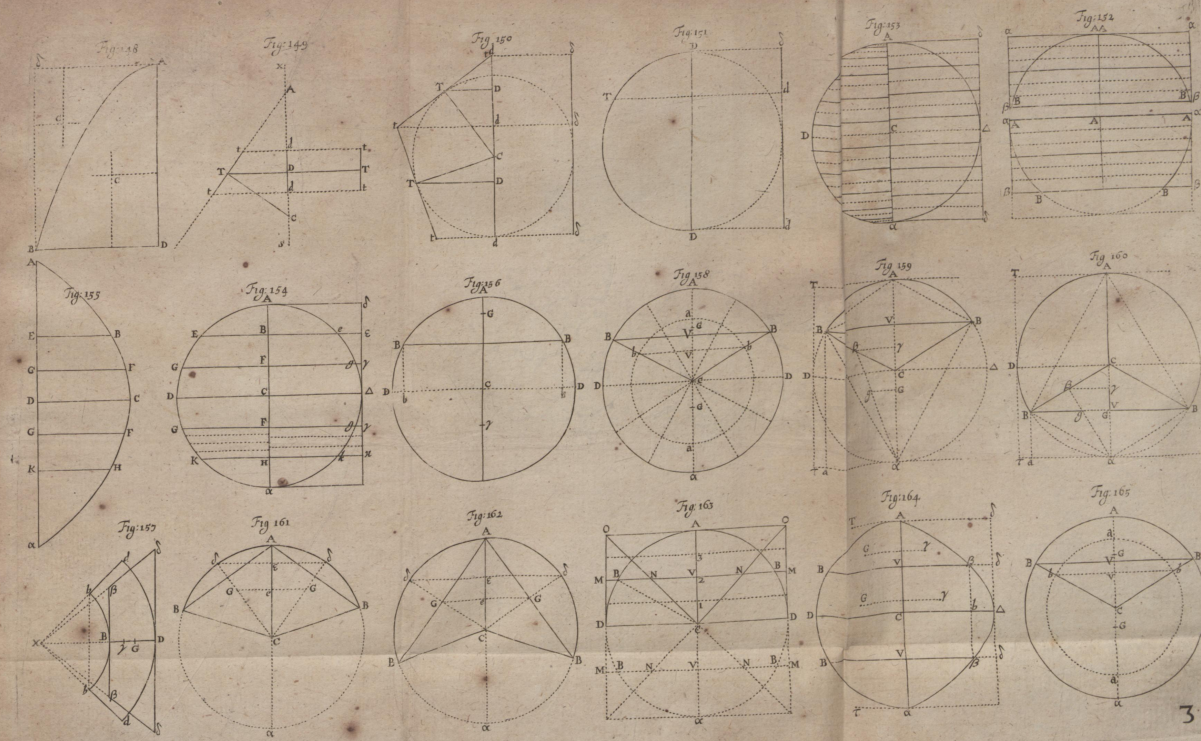
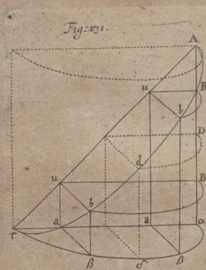
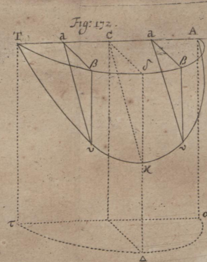
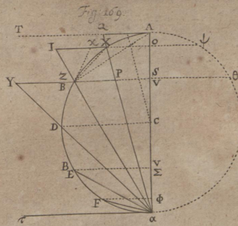
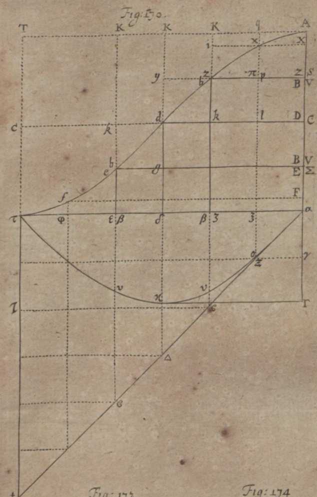


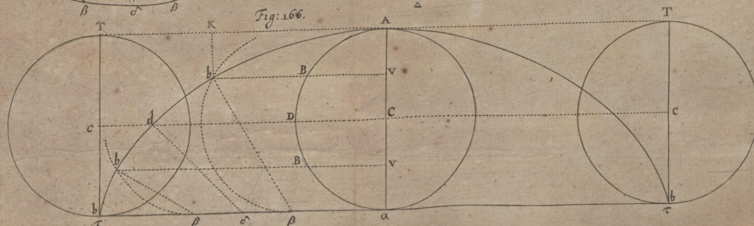
Fig: 148
Fig: 149
Fig 150
Fig: 151
Fig: 153
Fig: 152
Fig: 155
Fig: 154
Fig: 156
Fig: 158
Fig: 159
Fig: 160
Fig: 157
Fig 161
Fig: 162
Fig: 163
Fig: 164
Fig: 165
3

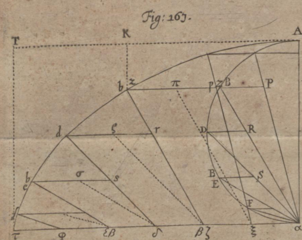

Fig: 171.

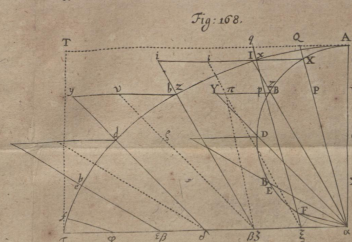

Fig: 172.

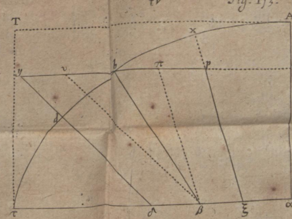

Fig. 169

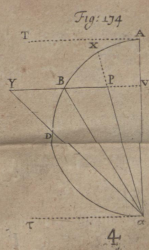

Fig. 170.


Fig: 166.


Fig: 167.


Fig: 168.


Fig: 173.


Fig: 174

4

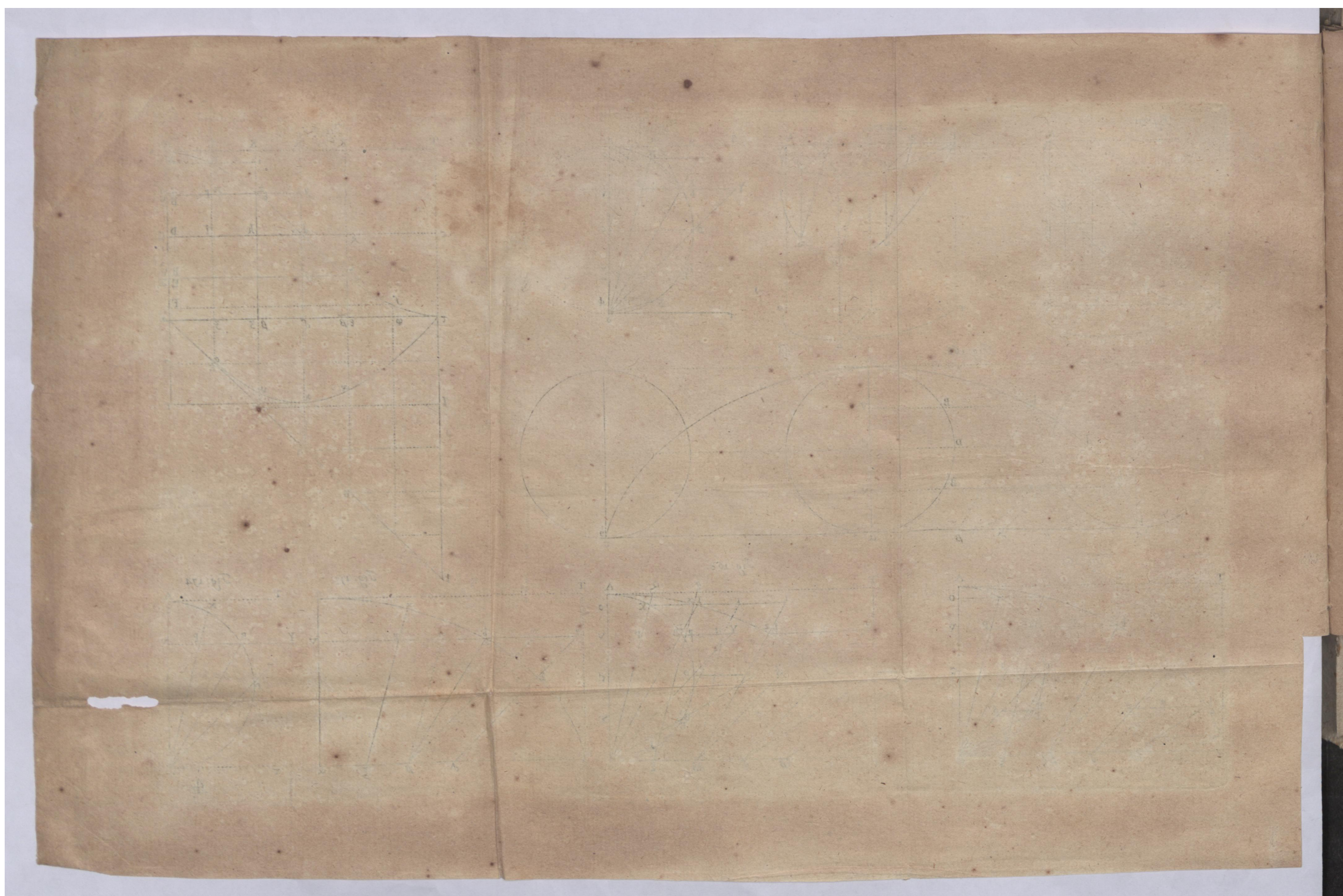


Fig. 177

Fig. 178

Fig. 179.

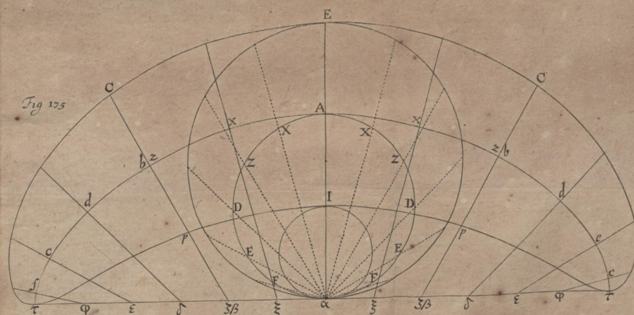


Fig. 176

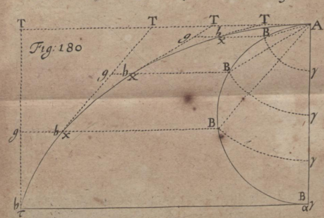
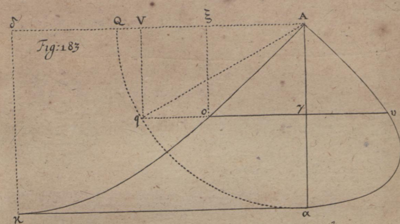
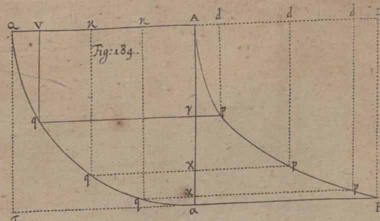
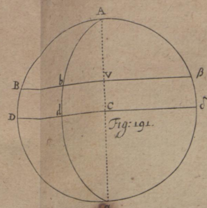


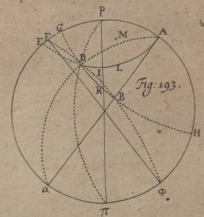
Fig. 181

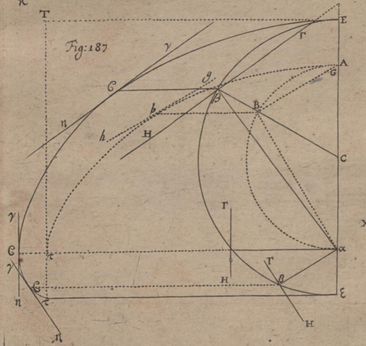
Fig. 182

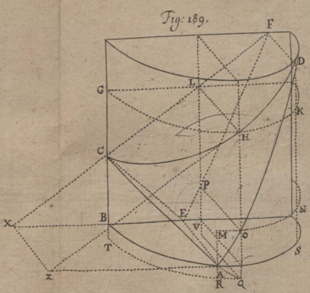

Fig: 183

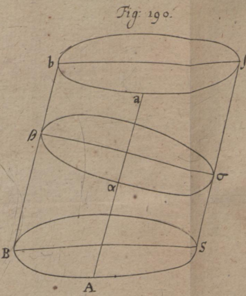

Fig: 184

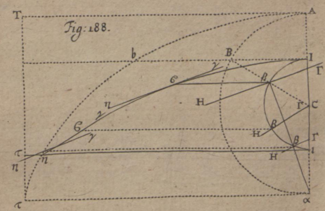

Fig: 191

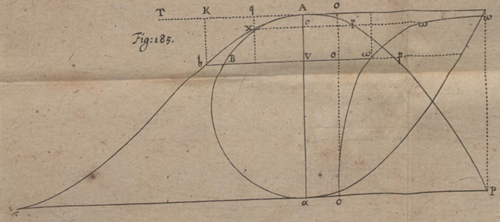

Fig: 193

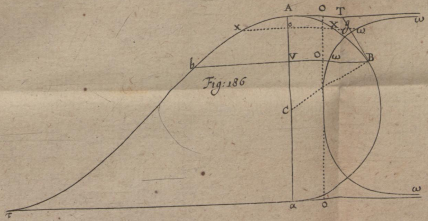

Fig: 187

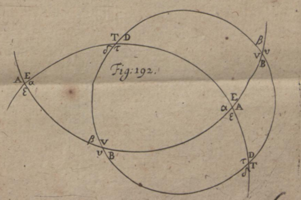

Fig: 189


Fig: 190

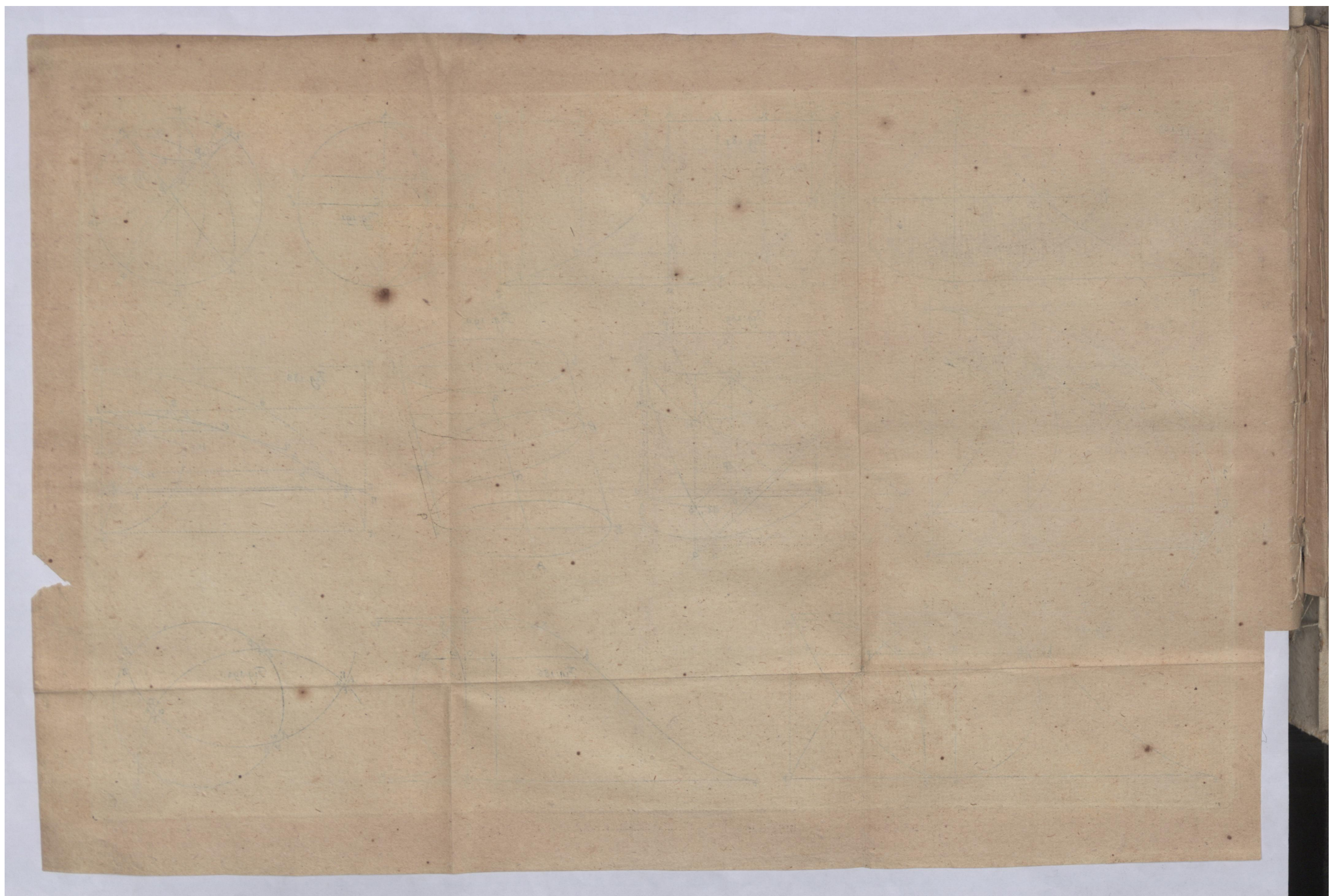

Fig: 188

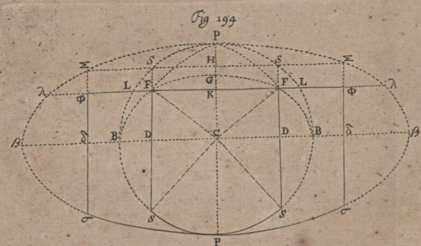

Fig: 185

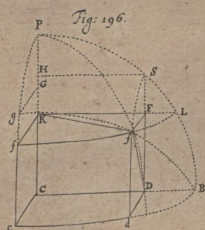

Fig: 186

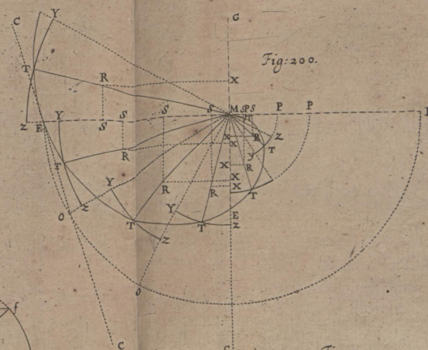

Fig: 192

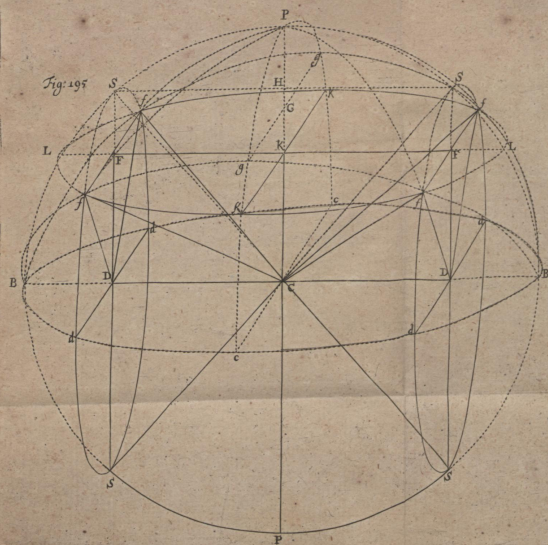
6

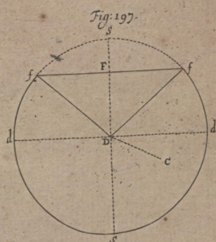


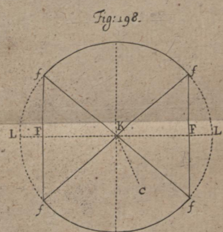


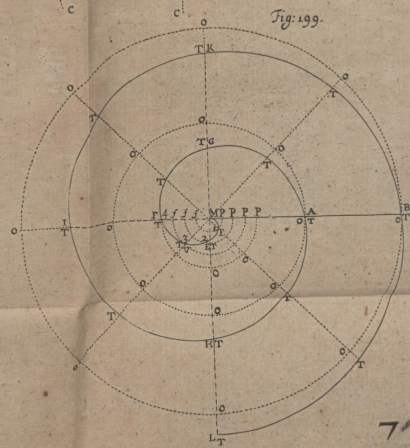












7

Fig: 201.

Fig: 202

Fig: 203.

Fig: 204

Fig: 205.

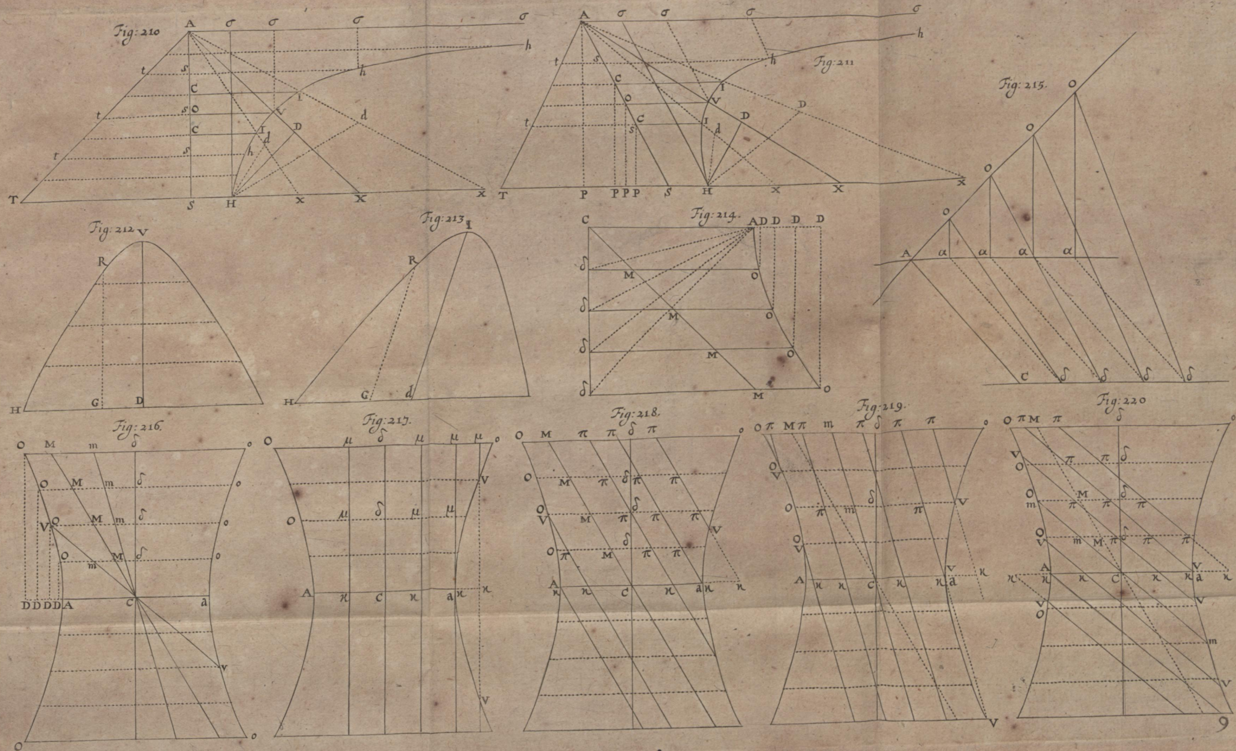
Fig: 206.

Fig: 207.

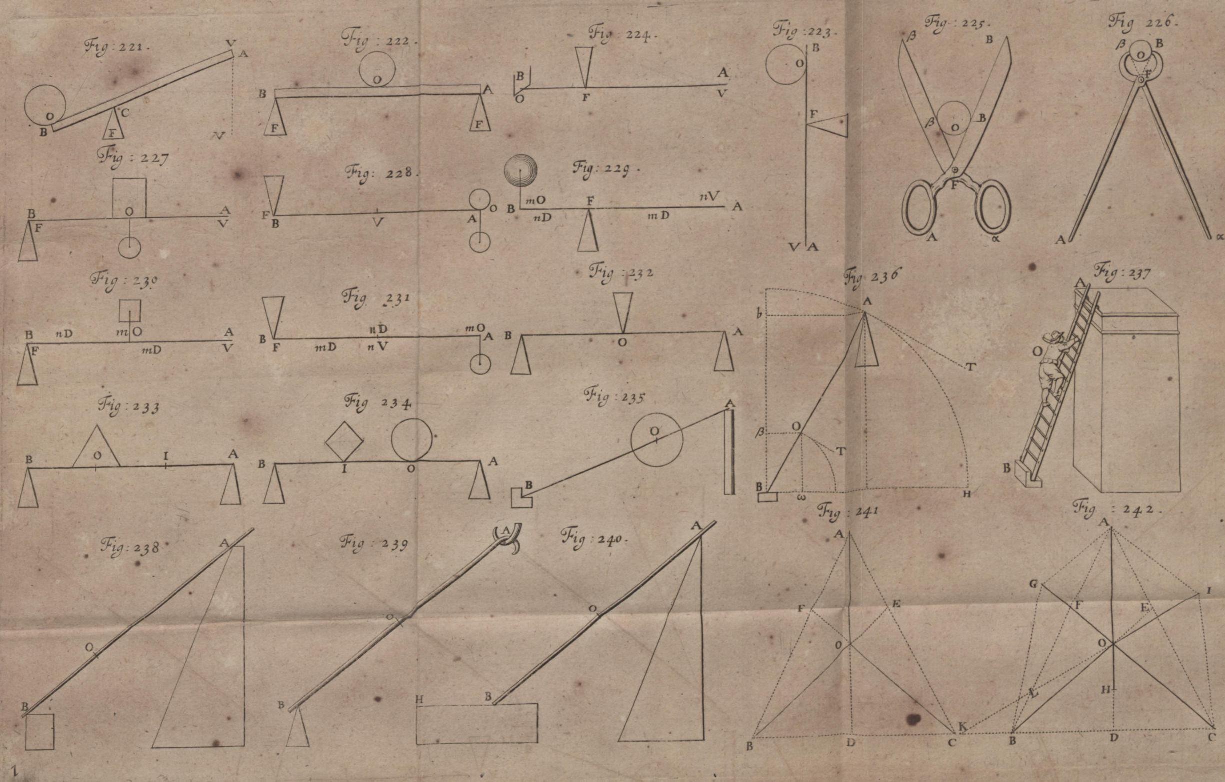
Fig: 208.

Fig: 209.




Fig: 210
Fig: 211
Fig: 212
Fig: 213
Fig: 214
Fig: 215
Fig: 216
Fig: 217
Fig: 218
Fig: 219
Fig: 220
9




Fig: 221.
Fig: 222.
Fig: 224.
Fig: 223.
Fig: 225.
Fig 226.
Fig: 227
Fig: 228.
Fig: 229.
Fig: 230
Fig 231
Fig: 232
Fig 236
Fig: 237
Fig: 233
Fig 234
Fig: 235
Fig: 238
Fig: 239
Fig: 240.
Fig: 241
Fig: 242.

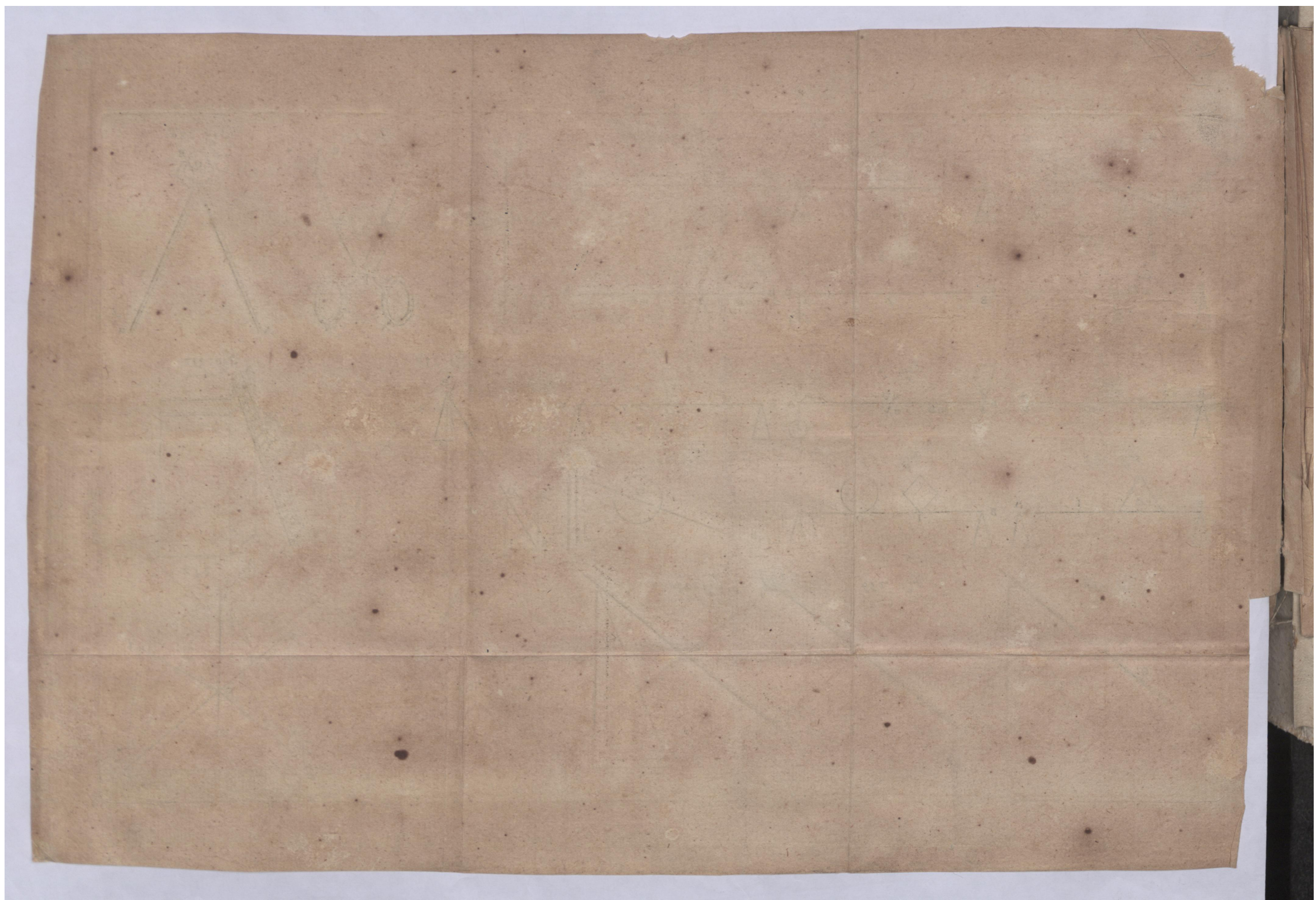


Fig: 243

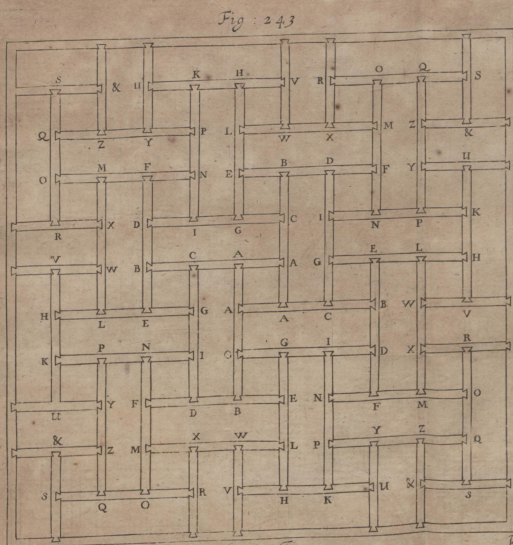


Fig: 244.

Fig: 245.

Fig: 249.

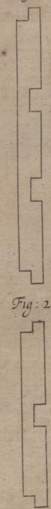


Fig: 248

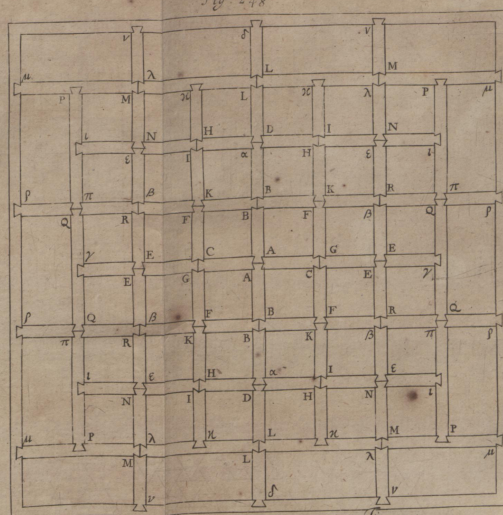


Fig: 246

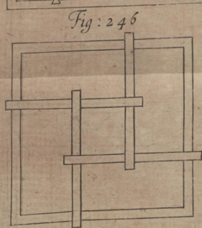


Fig: 247

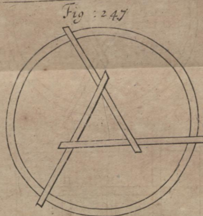


Fig: 250

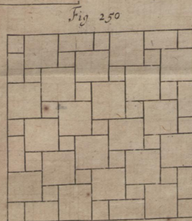


Fig: 251.

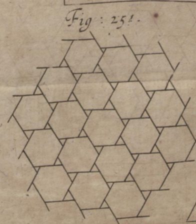


Fig: 252

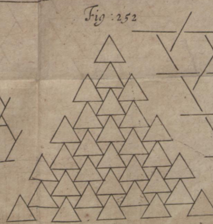
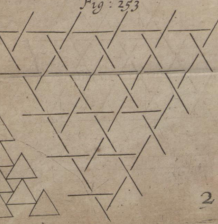


Fig: 253



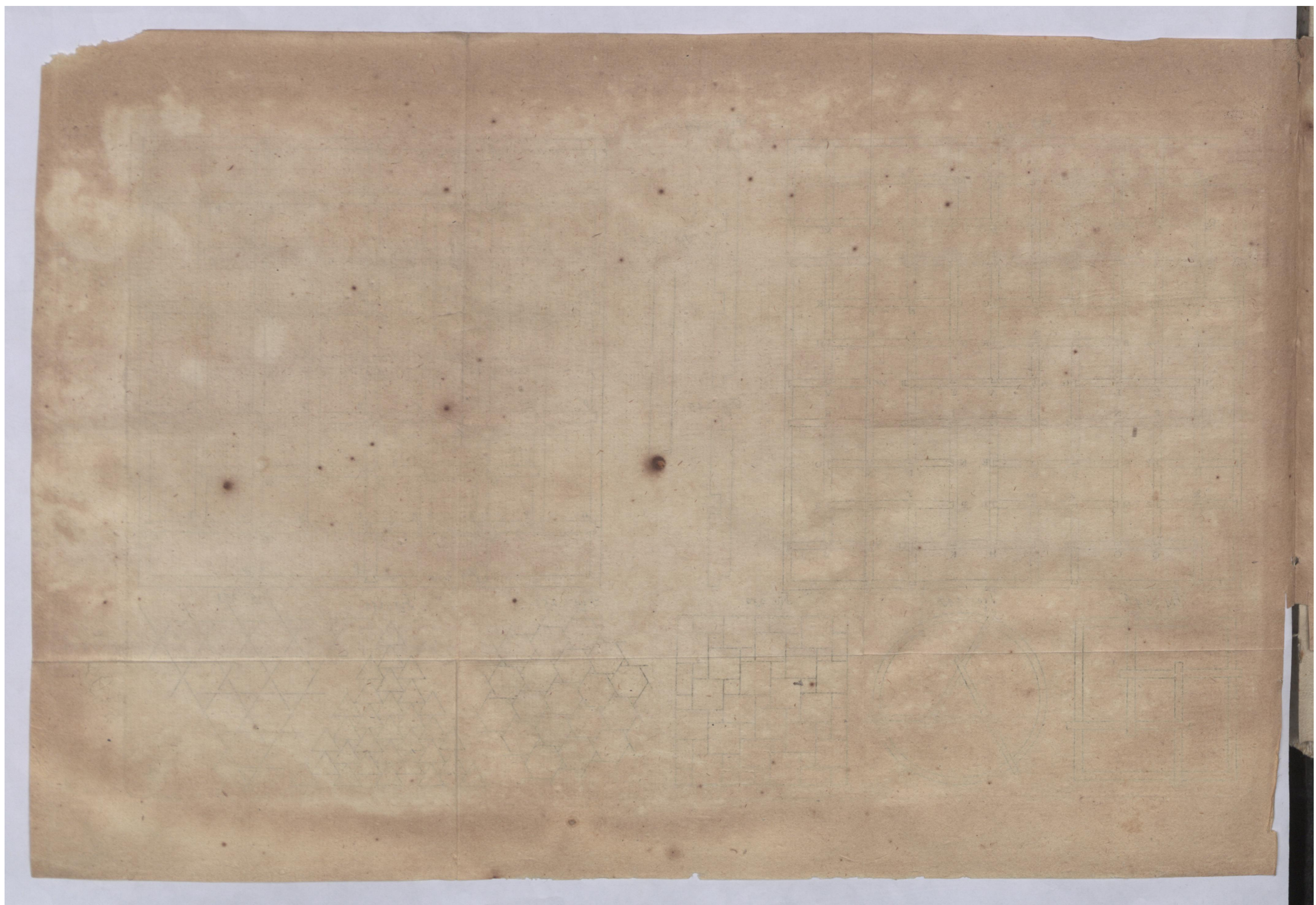


Fig 254

Fig : 255

Fig : 256

Fig 259

Fig : 260

Fig : 257

Fig 263

Fig 264

Fig 258

Fig : 261

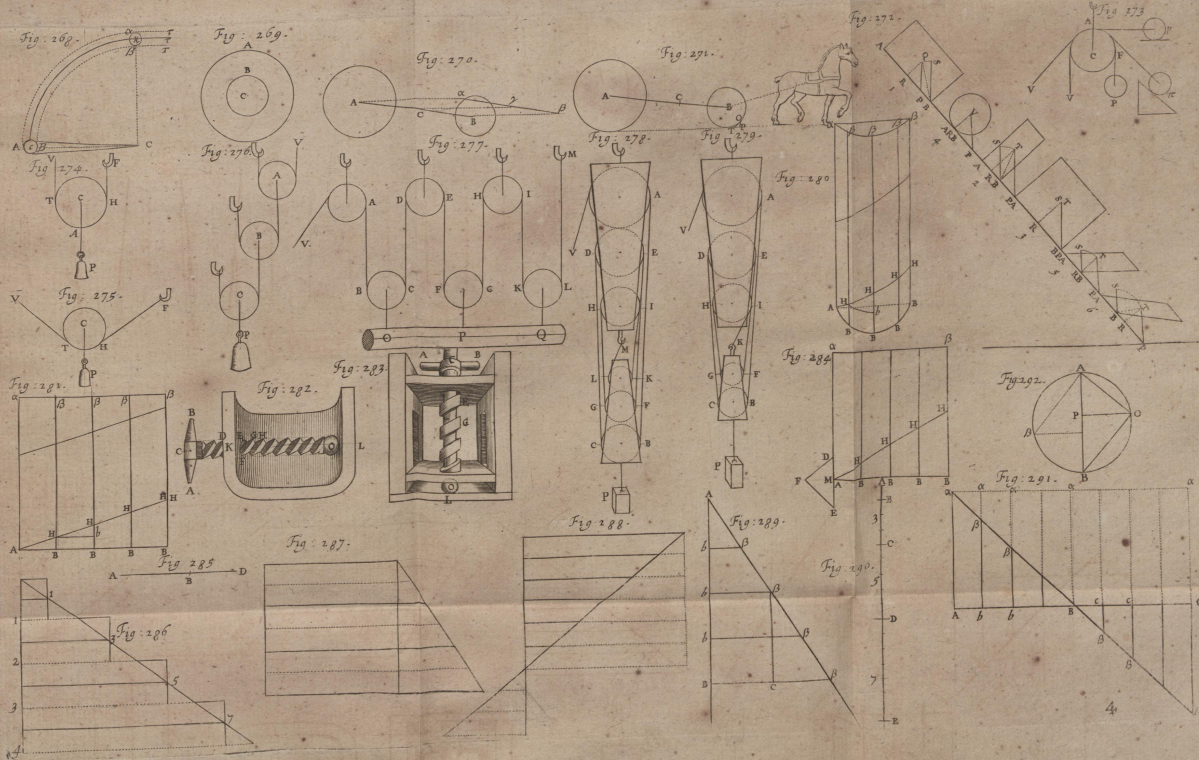
Fig 265

Fig : 266

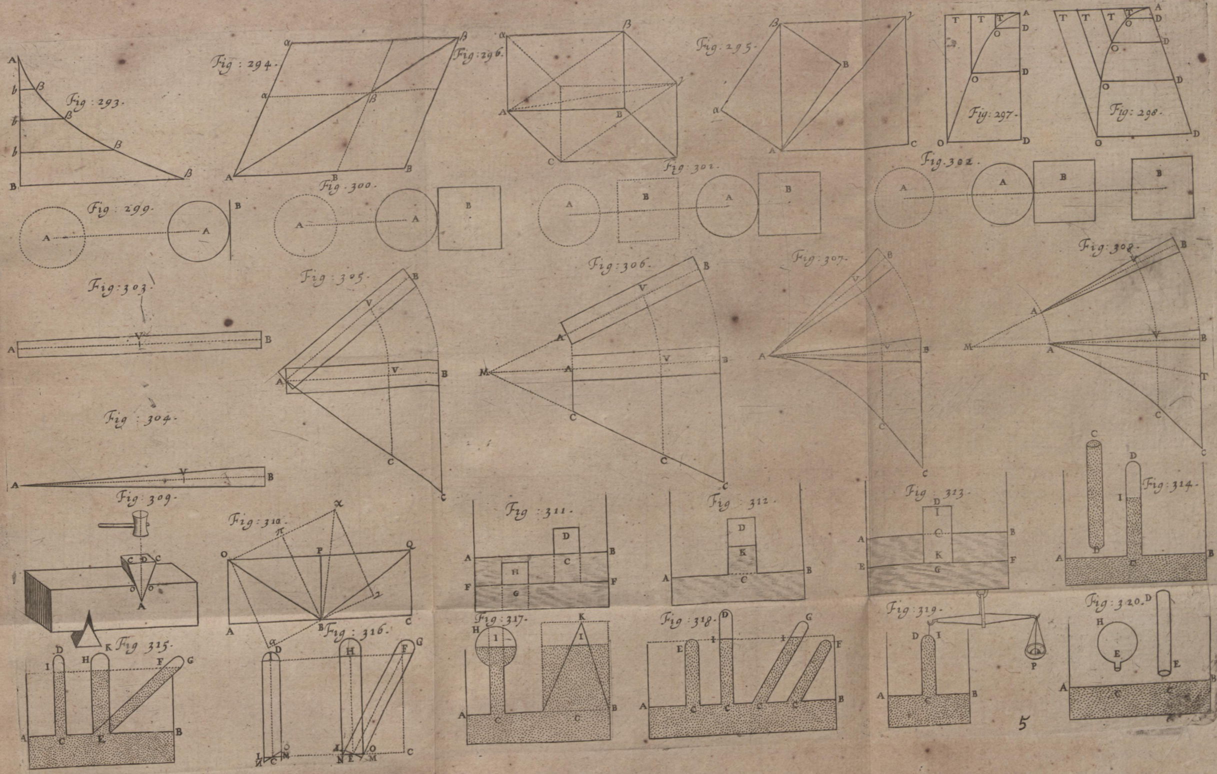
Fig : 267

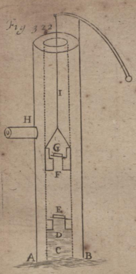
Fig 262

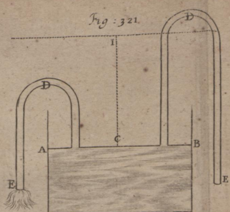
3

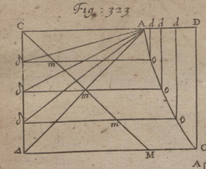

Fig: 268.
Fig: 269.
Fig: 270.
Fig: 271.
Fig: 272.
Fig: 273
Fig: 274.
Fig: 275.
Fig: 276.
Fig: 277.
Fig: 278.
Fig: 279.
Fig: 280
Fig: 281.
Fig: 282.
Fig: 283.
Fig: 284.
Fig 285
Fig: 286
Fig: 287.
Fig: 288.
Fig: 289.
Fig: 290.
Fig: 291.
Fig: 292.

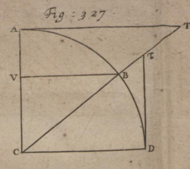


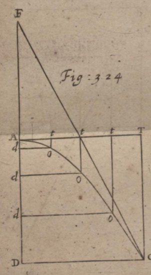

Fig: 293.
Fig: 294.
Fig: 296.
Fig: 295.
Fig: 297.
Fig: 298.
Fig: 299.
Fig: 300.
Fig: 301.
Fig: 302.
Fig: 303.
Fig: 305.
Fig: 306.
Fig: 307.
Fig: 308.
Fig: 304.
Fig: 309.
Fig: 310.
Fig: 311.
Fig: 312.
Fig: 313.
Fig: 314.
Fig: 315.
Fig: 316.
Fig: 317.
Fig: 318.
Fig: 319.
Fig: 320.
5

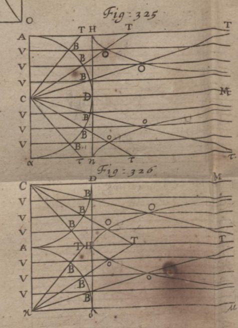


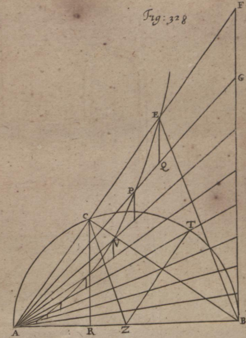

Fig: 321.

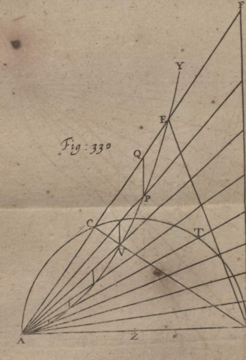

Fig: 323

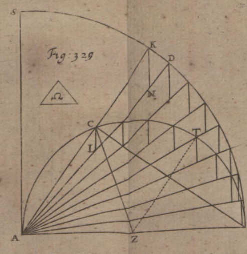

Fig: 327

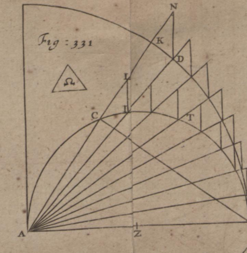

Fig: 324

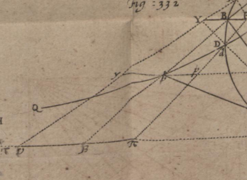

Fig: 325
Fig: 326

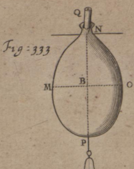

Fig: 328


Fig: 330


Fig: 329


Fig: 331


Fig: 332


Fig: 333

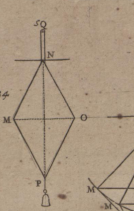
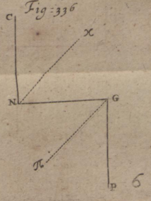

Fig: 334


Fig: 335


Fig: 336

6

